La logique : d’un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d’enseignement

Zoé Mesnil

▶ **To cite this version:**

Zoé Mesnil. La logique : d’un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d’enseignement. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Paris Diderot, 2014. Français. NNT : . tel-01114281v3

HAL Id: tel-01114281

https://hal.science/tel-01114281v3

Submitted on 21 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS.DIDEROT (Paris 7) SORBONNE PARIS CITÉ

ÉCOLE DOCTORALE « Savoirs scientifiques :
épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines »

Doctorat

Didactique des mathématiques

Zoé MESNIL

La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement

Logic : from a tool for language
and reasoning in mathematics
towards a teaching object

Thèse dirigée par Madame Michèle ARTIGUE

Soutenue le 28 novembre 2014

Jury :

Michèle ARTIGUE, Université Paris Diderot, directrice,
Ferdinando ARZARELLO, Università degli Studi Torino, rapporteur,
René CORI, Université Paris Diderot, co-directeur,
Arnaud DURAND, Université Paris Diderot, examinateur
Viviane DURAND-GUERRIER, Université Montpellier 2, rapporteure,
Christian MICHAUX, Université de Mons, examinateur
Cécile OUVRIER-BUFFET, Université de Reims Champagne-Ardenne, co-directrice.

Annonce

Beaucoup d'enseignants de mathématiques constatent chez leurs élèves ou étudiants des difficultés à s'exprimer et à raisonner. La logique est volontiers invoquée pour le raisonnement, beaucoup moins pour le langage. Langage et raisonnement sont pourtant les deux piliers de la logique, et un fil conducteur de ma thèse est de redonner au langage la place qui lui revient.

Nous savons déjà qu'enseigner la logique mathématique, qui traite le langage et le raisonnement comme des objets, n'est pas suffisant pour pallier ces difficultés. Les « mathématiques modernes » étaient allées dans cette direction (1970-1980) mais le résultat avait été décevant, certains disent catastrophique. L'approche formelle des notions de logique (proposition, connecteur, quantificateur, types de raisonnement) proposée alors, peu mise en lien avec l'activité mathématiques des élèves, s'est révélée stérile. Mais le bannissement de la logique des programmes qui ont suivi (1981-2000) n'a pas eu plus de succès ! Aujourd'hui, alors que des objectifs concernant la logique figurent à nouveau explicitement dans les programmes de lycée (depuis 2009), il me paraît important de définir une approche de la logique utile aux enseignants et aux élèves, vaste sujet qui est en filigrane de ma thèse.

Les obstacles sont nombreux : la logique est inexistante dans la formation des enseignants ; les ressources disponibles sont très rares ; il n'y a pas de corpus de connaissances qui fasse référence ; une bonne partie des enseignants considère, à tort, que la capacité qu'ils ont à mettre spontanément en œuvre des éléments de logique quand ils font des mathématiques suffit amplement. Je propose dans ma thèse une référence pour l'enseignement de notions de logique, un *savoir de référence* intermédiaire entre *savoir savant* et *savoir à enseigner*. Je l'ai constitué à partir de l'étude naïve du langage des mathématiciens.

J'utilise cette référence pour analyser les programmes et les manuels actuels. Je reprends l'approche de la logique adoptée dans un stage de formation continue proposé par l'IREM de Paris, dont je propose également une analyse. La formation me tient à cœur, et mon ambition est que mon travail puisse être, en plus d'une contribution à la recherche en didactique, une ressource utile pour les enseignants.

Remerciements

Plusieurs personnes qui sont remerciées ici le sont d'un point de vue professionnel. Mais ces riches échanges dans le cadre du travail ont souvent été accompagnés de moments moins formels, qui sont pour moi essentiels dans ces relations, et pour que je me sente bien. Alors d'abord merci à tous ceux avec qui j'ai bu un coup, mangé au resto ou à la Conviv', pris un thé ou un café, pris une pause, partagé une chambre ou un gîte, chanté, dansé, marché, nagé.

Je dois évidemment beaucoup de ce qui est écrit dans cette thèse à Daniel Lacombe et à René Cori. J'ai l'impression de m'inscrire dans leur sillage tout en étant parfaitement consciente de dire les choses à ma façon, et de dire parfois des choses avec lesquelles ils ne sont pas d'accord. C'est sans doute le destin des grandes idées d'être parfois malmenées...

Merci donc à René. Pour les heures de discussion autour de ce manuscrit, qui n'ont pris fin que parce qu'il fallait l'imprimer. Mais aussi pour m'avoir accompagnée bien au-delà de cette thèse, de Paris à Séoul : dans le réseau des IREM, aux Journées APMEP, et même dans des colloques de didactique. Tout cela restera très présent pour l 'enseignante-chercheuse que je serai peut-être.

J'ai démarré cette thèse au moment au Michèle Artigue prenait sa retraite (qui ne signifie en rien l'arrêt de son immense activité scientifique). Je m'inscris dans une longue lignée de thésards et je ne peux que confirmer les compliments que j'avais entendus dans la bouche de mes prédécesseurs : merci à Michèle pour sa direction attentive, pour les propos clairs dans lesquels elle reformulait mes idées brouillonnes, pour m'avoir laissé tester plusieurs pistes qui n'ont pas abouti, mais qui m'ont fait avancer.

Les troïkas dirigeantes n'ont pas toujours été heureuses en politique. Pour ma part, je suis très contente que Cécile Ouvrier-Buffet ait également co-dirigé cette thèse, me rappelant régulièrement la nécessité de préciser le cadre de mes réflexions. Merci à Cécile d'avoir été là de la rédaction du projet de thèse à celle du manuscrit qui suit.

Les directeurs de thèse dirigent. Ça n'est pas à eux que l'on dit les inquiétudes d'avant les rendez-vous, les déprimes d'après, les petits doutes et les grands coups de ras-le-bol. J'ai eu la chance d'avoir à mes côtés des accompagnateurs de thèse.

Merci à Christophe d'avoir eu la patience d'entendre tout cela, de m'avoir aidé à le transformer en dynamique positive pour avancer. Merci pour les petits et grands bonheurs.

Il a fallu aller loin (jusqu'à Séoul !) pour me rapprocher de Julie. Merci à elle pour sa présence depuis, de petits croisements en plus longs séjours, au bureau, au resto, à la piscine, en Normandie…

Elle est partie loin mais reste toujours proche. Merci à Raquel pour les *abrazo* qui requinquent en toutes circonstances ya ya ya !

Merci à Viviane Durand-Guerrier. Elle n'est pas seulement rapporteure de cette thèse, mais aussi une figure très importante de la didactique des mathématiques – particulièrement en ce qui concerne la logique – qui m'a beaucoup inspirée (en témoigne les nombreuses citations de son travail dans ce manuscrit).

Merci à Ferdinando Arzarello qui a également accepté d'être rapporteur. Nous nous connaissons moins, mais j'espère que nous aurons l'occasion de poursuivre nos échanges autour des précieuses remarques qu'il a faites sur mon travail.

Merci à Arnaud Durand et Christian Michaux qui ont accepté d'être examinateurs, et de lire pour cela toutes les pages qui suivent. Il y a cinq ans, j'ai rencontré Arnaud, alors directeur du master de logique mathématique, pour discuter de la possibilité de faire la thèse en logique mathématique que je n'avais pas faite il y a 15 ans. J'ai finalement laissé tomber cette idée, ce qui l'oblige aujourd'hui à être dans le jury d'une thèse de didactique des mathématiques !

Être jeune chercheur(e) au LDAR, c'est être membre d'un groupe, se sentir accueilli(e) et entouré(e) puis accueillir et entourer à son tour. Merci à tous ceux que j'ai connus dans ce cadre : merci à mes grandes sœurs de thèse, Julia, Carolina, qui ont été de bons modèles, merci à mes sœurs jumelles, Luz, Lynn, Soraya, à plusieurs on a plus de courage, merci à mes petites sœurs, Charlotte, Assia, à vous de jouer maintenant ! Merci à ceux qui maintenant sont grands : Éric, Frédérick, Joris, Nicolas, Sara, Stéphanie. Merci à ceux qui ont à finir : Adry, Anne-Marie, Cécile, Dominique, Edith, Katalin, Kiet, Robin, Sophie et Sophie, Stéphane, Valentin.

Je n'ai raté que peu de rencontres des Jeunes Chercheurs de l'ARDM durant ma thèse. Que ce soit pendant le séminaire national, ou pendant les WEJCH, c'était toujours un plaisir de discuter avec ceux que je voyais moins souvent. Merci à Christian, Laetitia, Marianne, Marie-Line, Mathias, Mélanie, Samuel, Simon, Stéphane, Valérie…

Merci aux membres du groupe Logique de l'IREM de Paris, qui m'ont permis de ne pas être complètement déconnectée des classes. Merci à François, Cathy, Géraldine : les entretiens que nous avons eu ne sont pas dans ma thèse, mais vous y êtes évidemment presque partout ! Merci à Françoise qui nous a rejoints sur le tard, mais qui a été là à des moments très importants de cette dernière année. Merci à Paul pour sa lecture du chapitre sur les raisonnements.

Merci aux membres de la Commission Inter IREM Lycée. Un jour j'espère, le groupe « Logique et raisonnement » produira un texte qui reflètera la qualité des discussions qui reviennent régulièrement dans ses réunions : merci à Christelle, Denise, Emmanuel, Emmanuelle, Geneviève, Hervé, Sophie.

Merci à tous les participants des stages « Initiation à la logique », particulièrement à ceux qui ont bien voulu m'accueillir dans leur classe, présenter une activité, ou répondre à des questionnaires.

Merci à tous les enseignants qui ont répondu au questionnaire du chapitre 7.

Merci à Cécile de Hosson, qui dirige le Laboratoire de Didactique André Revuz et sa chorale en conciliant attention à chacun et attention à l'harmonie collective.

Merci à tous les membres du LDAR, c'est une institution où je trouve qu'il fait bon travailler.

Merci à Jérôme, précieux bibliothécaire de l'IREM de Paris, qui m'a souvent dépannée en envoyant quelques auteurs faire un tour au fin fond de la Seine-et-Marne.

Merci à Evelyne, Martine, Nadine, Sandrine : avec elles, une formalité administrative est surtout l'occasion de se dire bonjour et de prendre des nouvelles !

Merci à Vincent pour les à peu près 137 réservations de la salle 836, et bonne paternité !

Il a fallu batailler un peu pour que les doctorants en didactique ne soient pas isolés dans un petit bureau dans le nouveau bâtiment Sophie Germain. Merci à Marc et Joseph de m'avoir accueillie à Chevaleret et de m'avoir donné envie que ce partage de bureaux avec des matheux se poursuive. Merci à Baptiste, Nicolas, Robert qui m'ont ensuite accueillie dans un bureau de doctorants de l'IMJ.

Merci à tous ceux qui n'étaient pas dans mon bureau mais pas loin : Julie, Louis-Hadrien, Luis, Mathieu, Pablo, Rémi, Saadek, Yann, merci à ceux qui passaient souvent par là : Daniel, Nicole.

Merci aux nombreux étudiants que j'ai croisés dans les cours et TD de LM1. Ils m'ont aidée à trouver les mots pour dire certaines bizarreries du langage mathématique.

Merci à Patrice et Agnès qui m'ont apporté un énorme soulagement pour la préparation de la soutenance : au moins, j'étais sûre que le pot serait réussi.

Merci à Sébastien, qui m'a toujours dit que j'étais capable de faire une thèse, merci à Maïder que ça a toujours enthousiasmé, et qui a même bien voulu relire un chapitre, merci à Rania sans qui mes textes en anglais ne seraient pas ce qu'ils sont, merci à Thomas et Sophie pour nos longues discussions mêlant travail, famille, société.

Merci aux enfants et adultes de l'École de la Neuville que j'ai croisés dans mes années là-bas, et qui m'ont donné l'envie de projets collectifs, portés par tous, chacun selon sa force et son envie.

Merci à Claire et Jean-Louis qui ont été de parfaits parents de thésarde en mode « dernière ligne droite » quand je les ai sollicités 3 jours en septembre 2014.

Merci à Manu qui a accepté de fréquenter la didactique et la logique, et de lire plus que la première ligne de l'introduction de ma thèse (c'est là que je m'étais pour ma part arrêtée dans la lecture de la sienne !).

Merci à Elio, à Jolan, à Ismaël : ça n'était pas toujours facile, mais c'était bien agréable qu'ils me rappellent parfois que j'avais autre chose à faire que de finir ma thèse.

Table des matières

Introduction

A l'origine de cette recherche il y a une question très large : à quoi sert la logique en mathématiques ?

Cette formulation (bien sûr reconstituée) de la question montre un point de vue de départ très naïf, qui ne situe le questionnement dans aucun champ ni philosophique, ni épistémologique, ni didactique. Par contre, dans cette formulation, un aspect important de la réflexion est déjà présent : il ne s'agit pas de s'intéresser à la logique elle-même, mais aux liens entre logique et mathématiques et plus particulièrement à la logique vue comme étant au service de l'activité mathématique.

Mais de quelle logique parle-t-on ici ? Pas uniquement de la logique mathématique en tout cas, puisque le logicien, pour définir les objets qu'il étudie et s'interroger sur les relations qui existent entre eux, a besoin, comme tout mathématicien, d'user d'une logique préalable à la théorie qu'il est en train de constituer. Ma question porte plutôt sur une logique qui présente une intersection non vide avec les mathématiques, sans qu'il y ait inclusion d'un de ces deux domaines dans l'autre. Cette configuration correspond à l'accord qui se fait généralement sur l'idée qu'il faut « être logique » pour faire des mathématiques.

Pour continuer dans la réflexion sur les liens entre logique et mathématiques, tournons nous vers le dictionnaire, afin d'y trouver des définitions communes, qui, à défaut d'avoir la rigueur de définitions scientifiques, pourront au moins jouer le rôle d'une référence par rapport à laquelle se situer. Le *Trésor de la Langue Française Informatisé* nous donne les définitions suivantes :

– à « logique » en tant que substantif féminin, nous trouvons :
  Science relative aux processus de la pensée rationnelle (induction, déduction, hypothèse p. ex.) et à la formulation discursive des vérités.
– à « mathématiques » en tant que substantif féminin, nous trouvons :
  Ensemble des disciplines qui procèdent selon la méthode déductive et qui étudient les propriétés des êtres abstraits comme les nombres, les figures géométriques ainsi que les relations qui existent entre eux.

La logique définie ici n'est pas seulement vue comme une science du raisonnement, mais aussi comme une science du langage. En croisant ces deux définitions, la logique servirait donc en mathématiques à étudier la « méthode déductive » dont procède cette discipline et la « formulation discursive des vérités » qui concernent « des êtres abstraits [...] ainsi que les relations qui existent entre eux. » C'est là un but important et on voit effectivement mal comment les mathématiques pourraient se passer de logique tant il y a une *logique à l'œuvre dans l'activité mathématique.*

Quelle logique est alors la plus à même d'être un outil efficace pour les mathématiques ? Nombre de logiciens se sont posé cette question (d'abord dans un contexte plus large que celui des mathématiques). Cette *logique à l'œuvre dans l'activité mathématique* reste un objet à préciser. Elle est l'objet d'étude de la logique mathématique qui est une branche récente des mathématiques. Une étude épistémologique semble à ce stade nécessaire pour en comprendre la genèse.

Les réflexions précédentes montrent qu'il est difficile de savoir ce que recouvre le mot « logique » quand les instructions du 19 juillet 1960 complémentaires au programme de mathématiques pour la classe de Seconde suggèrent une « initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique », ou que le programme de Mathématiques pour la classe de Seconde de Juillet 2009 suggère un « entraînement à la logique ». Les auteurs de ces instructions considèrent en tout cas qu'il y a un *savoir logique* nécessaire à l'activité mathématique et que le professeur de mathématiques doit mettre en place un enseignement qui permette que ses élèves acquièrent ce savoir.

Ce *savoir logique* se manifeste dans l'action des mathématiciens. Mais pour être enseignées, les connaissances à l'œuvre ne sont plus seulement un moyen d'action mais deviennent un objet de l'action du professeur : il doit les identifier, les formuler, voire les décontextualiser pour qu'elles puissent être réutilisables. À quoi va-t-il se référer pour cela ? L'absence de logique mathématique dans la formation initiale des enseignants (et d'ailleurs dans la plupart des cursus universitaires de mathématiques) montre qu'elle n'est en tout cas pas une référence qui fasse consensus. La constitution d'une référence est alors un premier pas indispensable pour mener une réflexion sur l'enseignement de ce savoir logique.

Une telle réflexion doit bien sûr prendre en compte la demande institutionnelle et diffère selon que la logique est explicitement ou non objet d'enseignement dans les programmes. Les programmes actuellement en vigueur au lycée en France fixent des objectifs concernant des notions de logique (connecteur, quantificateur, types de raisonnement). Leur étude permet de voir les choix de l'institution, quel(s) but(s) elle assigne à l'enseignement de la logique, comment elle apprête les notions afin de les rendre enseignables et comment elle se réfère ou non pour cela à la logique mathématique, comment elle gère les difficultés épistémologiques et didactiques liées aux notions de logique.

Cette rapide introduction suffit pour supposer une certaine complexité des liens entre logique et mathématiques et *a fortiori* de l'enseignement d'une logique pertinente pour l'apprentissage des mathématiques. Un objectif de cette thèse est de proposer différents points de vue pour mieux appréhender cette complexité. Par ailleurs, quel que soit le contexte institutionnel, la question de la formation des enseignants se pose : quel contenu proposer pour qu'ils aient à la fois les idées claires sur les notions de logique et des ressources didactiques pour l'enseignement ? Je souhaite apporter également une contribution utile à cette question.

Problématique et questions de recherche

Logique des mathématiques et logique mathématique

Dans cette recherche, je considère la logique et les mathématiques comme deux domaines dont l'intersection non vide délimite un champ que j'appellerai *la logique des mathématiques* et que je propose de définir ainsi :

> Ensemble des moyens, des procédés selon lesquels sont organisés le discours et le raisonnement en mathématiques, vus sous un double aspect de correction syntaxique d'une part (vérifier que les règles d'usage de la langue sont respectées) et de validité sémantique d'autre part (pouvoir s'assurer que les raisonnements aboutissent à des vérités).

La logique des mathématiques est ce que j'ai déjà appelé dans l'introduction *la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique*. La manière de rendre compte de cette logique des mathématiques, en lui fournissant notamment un vocabulaire et des notations, a beaucoup évolué. La logique mathématique peut alors être vue comme une approche récente et, en utilisant une terminologie moderne, on pourra dire que la logique mathématique est une modélisation de la logique des mathématiques, au sens de la construction d'un modèle mathématique qui rend compte d'une réalité existante. C'est ce qu'expliquent R. Cori et D. Lascar dans l'introduction de leur manuel *Logique mathématique* :

> [Le mathématicien cherche] à donner une représentation mathématique d'une situation (plus ou moins) « concrète », à répondre à un besoin exprimé à l'extérieur du monde mathématique, en fournissant un outil mathématique efficace (les espaces vectoriels, représentant, au départ, l'espace physique dans lequel nous vivons, sont l'illustration la plus banale de ce propos). La logique, elle, suit le même processus ; sa particularité est qu'elle tente de décrire, non une réalité extérieure au monde mathématique, mais cette réalité que sont les mathématiques.
>
> Cela ne doit pas être gênant, à condition que l'on sache précisément de quoi il va s'agir. Aucun étudiant ne fait de confusion entre son environnement physique et un espace vectoriel orienté de dimension 3, mais la connaissance de cet environnement aide à avoir une bonne intuition lorsqu'il faut démontrer une propriété de la structure mathématique en question. En logique, c'est la même chose : nous allons en quelque sorte faire une copie, une maquette, osons

dire un modèle réduit, de l'univers mathématique qui nous est (relativement) familier. (Cori & Lascar, 1993, pp. 4-5)

Un enseignement de logique au service de l'activité mathématique aurait ainsi pour but d'enseigner cette logique des mathématiques, c'est-à-dire cet ensemble de connaissances sur la façon de s'exprimer et de raisonner en mathématiques.

Étudier la transposition didactique de notions de logique au lycée

Une question de recherche en didactique relative à cet enseignement aurait alors pu être : « est-ce que les professeurs de lycée enseignent la logique des mathématiques ? Si oui comment ? Si non pourquoi ? »

Un changement dans les programmes de mathématiques pour le lycée est venu modifier le contexte institutionnel d'un tel enseignement et a influencé mon approche didactique. En effet, dans le nouveau programme pour la classe de Seconde publié en juillet 2009 (et dans ceux qui ont suivi en 2010 pour la classe de Première et en 2011 pour la classe de Terminale), des notions de logique sont explicitement citées (les connecteurs ET et OU, les quantificateurs universels et existentiels, les propositions conditionnelles, la négation, les types de raisonnement [1]), ce qui n'était pas le cas dans les programmes qui précédaient, et des objectifs y sont associés. Les professeurs de lycée ont ainsi actuellement à enseigner des notions de logique. Il y a une demande institutionnelle et ma recherche porte sur la mise en œuvre de cette demande.

Les mathématiciens partagent certains savoirs sur des notions de logique, nécessaires pour leur activité. Je suivrai dans cette thèse la démarche de la Théorie Anthropologique du Didactique en étudiant les nécessaires transformations de ces savoirs en vue de les enseigner, c'est-à-dire le processus de transposition didactique de ces notions au lycée, tel que défini par Y. Chevallard dans *La transposition didactique* :

> Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les *objets d'enseignement*. Le « travail » qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement est appelé *la transposition didactique*. (Chevallard, 1991, p. 39)

Ce processus de transposition didactique se fait en deux étapes :
– la transposition didactique externe, du *savoir savant* au *savoir à enseigner* ;
– la transposition didactique interne, du *savoir à enseigner* au *savoir enseigné*.
Dans cette thèse, je m'intéresse principalement à la première étape de la transposition didactique. Je cherche en effet à montrer, et à expliquer, la complexité du savoir à enseigner.

1. Je les liste par ordre d'apparition dans le programme.

Savoir savant, savoir de référence, première question de recherche

Dans *La transposition didactique en mathématiques*, G. Arsac distingue des *objets d'enseignement* « qui sont introduits explicitement par une définition, suivie de la liste de leurs propriétés » et des *objectifs d'enseignement* « du type : savoir raisonner, savoir argumenter (ce qui concerne d'autres disciplines que les mathématiques), savoir résoudre les problèmes » (Arsac, 1989, p. 17). La logique des mathématiques serait plutôt du côté des objectifs d'enseignement, mais en listant des notions de logique et en y associant des savoirs (même si ce sont plutôt des savoir-faire), les nouveaux programmes pour le lycée amorcent un déplacement de ces notions de logique vers des objets d'enseignement. Ils réservent cependant à ces notions un traitement différent d'autres notions au programme. Par exemple, la *notion d'échantillon*[2] est un « contenu »[3] du programme, associé à des « capacités attendues » – comme « exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage » – et accompagné du « commentaire » suivant : « un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience. » Les notions de logique par contre ne sont pas présentées comme des contenus et ne sont pas accompagnées d'un commentaire qui en donnerait ce qui pourrait être une définition au niveau du lycée. La notion d'échantillon est clairement repérée dans un savoir savant (la statistique), dont les concepteurs de programmes se saisissent et font un objet d'enseignement. Pour les notions de logique, ce statut ambivalent entre objectifs et objets d'enseignement m'amène à envisager différemment le processus de transposition didactique.

Nous avons vu que ce qui était visé était l'acquisition de la logique des mathématiques et non de connaissances en logique mathématique, que ce qui était partagé par la communauté mathématique était plutôt de l'ordre des « savoirs en acte » que d'un savoir décontextualisé, dépersonnalisé, formalisé. La logique des mathématique est visible dans les pratiques des mathématiciens plutôt que dans des traités. J'emprunte alors à J. Rogalski et R. Samurçay la notion de *savoir de référence*, qu'elles utilisent dans *Modélisation d'un « savoir de référence » et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau* :

> Dans le domaine étudié, on assiste au déroulement d'un processus de construction d'un corps de savoir de référence à partir d'un ensemble de « savoirs en acte » manifestés dans des pratiques. Ce processus consiste à identifier des catégories d'objets et de traitement communes à des pratiques efficaces, qui sont quant à elles spécifiques de situations, contextualisées et personnalisées. (J. Rogalski & Samurçay, 1994, p. 43)

2. La notion d'échantillon est un nouvel objet d'enseignement dans le programme de Seconde de 2009, même si cette notion était déjà présente comme thème d'étude possible dans le programme précédent.

3. Les termes « contenu », « capacités attendues » et « commentaires » font référence à la présentation classique des programmes en trois colonnes.

Elles précisent ensuite qu'il est nécessaire que ce savoir de référence puisse « s'exprimer avec ses concepts, ses méthodes, ses systèmes de représentations et son langage » (*ibid*, p. 46).

Mais pour ce qui est des notions de logique, un tel *savoir de référence* n'existe pas au sens d'un corpus qui présente les caractéristiques listées ci-dessus et nous sommes dans une situation que décrit V. Durand-Guerrier dans l'introduction de son habilitation à diriger des recherches *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*[4] :

> Pratiquement absente aujourd'hui des curricula français, la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique est également le plus souvent absente du discours du professeur. Pour autant, les objets dont s'occupe la logique, tels que les connecteurs, la quantité, les règles d'inférences, la vérité et la validité sont autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence. (Durand-Guerrier, 2005, p. 5),

Cette absence m'amène à m'écarter un peu du chemin classique de l'étude du processus de transposition didactique, en introduisant un intermédiaire entre le savoir savant (la logique mathématique, mais qui n'est pas un savoir partagé par tous les mathématiciens) et le savoir à enseigner (tel que dessiné par les programmes actuels). Ma première question de recherche porte sur des caractéristiques épistémologiques (puisqu'il s'agit de construire un savoir) et didactiques (puisque ce savoir est intégré dans un processus de transposition didactique) d'un tel intermédiaire :

Quel savoir de référence serait épistémologiquement et didactiquement pertinent pour l'enseignement de notions de logique au lycée ?

La constitution d'un savoir de référence est un processus collectif et long. À la suite d'une étude épistémologique et de travaux didactiques présentés dans une première partie de cette thèse, j'y apporterai ma contribution en proposant dans une deuxième partie une étude de différentes notions de logique. Je construis ainsi une référence qui m'est de toute façon nécessaire pour continuer l'étude du savoir à enseigner.

4. Titre intégral : Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.

Savoir à enseigner, deuxième question de recherche

Même sans référence clairement définie, il y a aujourd'hui un *savoir à enseigner*, qui se trouve notamment dans les textes des programmes. Je poursuivrai ma recherche par une étude de ce *texte du savoir*, pour la rédaction duquel des choix ont été faits, que précise Y. Chevallard :

> *La production d'un système didactique* à partir d'un *projet social d'enseignement* préalable suppose la production d'un *texte du savoir* et cette mise en textes du savoir engendre les effets énoncés précédemment (désyncrétisation [5], dépersonnalisation) tout en autorisant *un rapport spécifique au temps didactique* (programmabilité de l'acquisition du savoir). (Chevallard, 1985, p. 65)

Ma deuxième question de recherche concerne ce savoir à enseigner :

Quel est l'ensemble de conditions et de contraintes qui pèsent sur la transposition didactique des notions de logique au lycée ?

Là aussi il y a une spécificité des notions de logique : j'ai déjà souligné que leur mention explicite était une nouveauté des programmes actuels et nous verrons que cela vient après une vingtaine d'années pendant lesquelles elles avaient été bannies des programmes, période qui faisait elle-même suite à celle des mathématiques modernes pendant laquelle elles étaient étudiées dans un chapitre spécifique (en lien avec la théorie des ensembles). Ces allers-retours ont empêché que des habitudes se prennent, qu'un discours se fixe et il n'y a pas plus de savoir de référence pour la logique à l'intérieur du système scolaire qu'à l'extérieur. L'étude du savoir à enseigner, avec une perspective historique, est l'objet de la troisième partie de cette thèse.

La formation des enseignants, troisième question de recherche

Dans ce contexte particulier d'absence pour certains enseignants de connaissances en logique mathématique, d'absence de savoir de référence institué par la communauté, de manque de stabilité sur le long terme du savoir à enseigner, nous pouvons légitimement nous interroger sur l'enseignement des notions de logique que les enseignants vont pouvoir mettre en place.

La formation des enseignants est un élément essentiel de la partie interne du processus de transposition didactique : le passage du *savoir à enseigner* au *savoir enseigné.* J'ai orienté la suite de ma recherche vers ces questions de formation. Les études des premières parties de la thèse me permettent d'identifier des besoins de formation et je proposerai

5. Possibilité de délimiter des savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un discours autonome.

ensuite l'analyse d'une formation particulière : un stage d'initiation à la logique proposé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Paris depuis 2009, animé initialement par R. Cori. Ma troisième question de recherche porte sur cette formation mais reste dans la continuité de l'étude du processus de transposition didactique :

La formation permet-elle la constitution d'un savoir de référence utile aux enseignants pour appréhender la complexité des notions de logique et les intégrer efficacement dans leur enseignement ?

L'analyse du stage proposé en 2013 est l'objet de la quatrième partie de la thèse. Cette formation n'est pas une ingénierie que j'ai conçue : elle existait préalablement à ce travail. Cependant, son contenu se rapproche fortement de ce que j'aurais pu proposer comme scénario en m'appuyant sur les trois premières parties. Il est donc important de clarifier ma position pour l'analyse : d'une part je participe activement au stage en tant que formatrice, mais je prends une position distanciée pour l'analyser, d'autre part je regarde des choix de contenus qui ne sont pas les miens, mais auxquels j'adhère et que je cherche à argumenter par mes études épistémologique et didactique.

Choix méthodologiques

Je vais maintenant décrire l'itinéraire de ma recherche, qui suit les trois questions posées dans la problématique, en exposant la méthodologie adoptée pour y répondre. J'utilise le cadre d'analyse de la Théorie Anthropologique du Didactique pour décrire un processus de transposition didactique, mais je l'adapte aux spécificités de mon objet d'étude. Un tel processus s'inscrit dans le temps et son étude demande une prise en compte de la dimension historique, particulièrement importante ici puisque nous sommes dans un contexte de « réintroduction » de notions de logique dans les programmes de lycée.

Nous avons vu dans la définition donnée en introduction que la logique, souvent présentée comme la science du raisonnement, participait aussi des sciences du langage. Je parlerai alors de deux piliers de la logique : le langage et le raisonnement. Le pilier langage est cependant moins spontanément associé à la logique que le pilier raisonnement. C'est également un fil conducteur de ma thèse que de vouloir le réhabiliter. J'insisterai donc sur les questions de langage, au risque que ce soit au détriment du raisonnement. Dans cette optique, je considère que les notions de variable et de proposition sont essentielles. Malheureusement, le programme de 2009 n'en fait pas état. Ce que j'appelle par la suite *notions de logique* comprend aussi bien celle de variable ou de proposition que celles de connecteur, de quantificateur…

Première partie : approches épistémologique et didactique

Je rassemble dans une première partie une étude épistémologique et une étude de travaux didactiques car elles sont complémentaires dans la constitution d'une référence pour l'enseignement de notions de logique.

L'étude de *systèmes logiques* élaborés par différents philosophes ou mathématiciens, à différentes époques, depuis la logique de l'Antiquité Grecque jusqu'à la constitution récente de la logique mathématique, permet d'envisager différentes conceptions [6] de la logique. Comme le souligne J-L. Dorier dans son habilitation à diriger des recherches *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire, perspective théorique sur leurs interactions* :

> Le sens des concepts, les problèmes qui s'y rattachent, la position relative d'un élément de savoir dans un savoir plus large qui l'englobe, mais aussi la variabilité de ces données en fonction des périodes et des institutions, etc. sont autant de questions qui aident a mieux comprendre le fonctionnement d'un système didactique. (Dorier, 1997, p. 9)

En étudiant ces systèmes avec une perspective historique, nous verrons ainsi l'évolution des notions de logique, en s'attachant dans les changements à en expliquer les raisons, les manques qui ont conduit à des modifications, ou au contraire ce qui est opérant et reste en place. Je retiens pour cette recherche trois périodes avec à chaque fois deux protagonistes qui reflètent deux prises de position presque contemporaines :
– l'Antiquité grecque avec Aristote et les Stoïciens (IVe, IIIe siècles avant JC),
– l'époque moderne avec Descartes et Leibniz (XVIIe, XVIIIe siècles),
– la naissance de la logique mathématique au XIXe siècle avec Boole et Frege.
Je choisis de privilégier deux axes pour cette étude, articulés avec mes questions de recherche :
– Le travail sur le langage.
– Le niveau de formalisation du langage et des raisonnements.
Plusieurs travaux de didactique des mathématiques ont déjà montré la pertinence de la logique des prédicats comme référence pour questionner l'enseignement de la logique des mathématiques. Je citerai notamment dans cette partie les travaux de V. Durand-Guerrier, dans lesquels une explicitation des démarches des élèves dans la résolution de certaines tâches, basée sur la logique mathématique, réduit la distance entre ce qui est appelée « logique de sens commun » et logique mathématique (c'est un axe fort de ses travaux que j'illustrerai à travers l'exemple de la tâche du labyrinthe).

J'étudierai ensuite une deuxième série de travaux didactiques, en relation avec la place du langage dans l'activité mathématique. Selon S. Epp, il faut une attention particu-

6. Le mot « conception » est à prendre ici au sens courant du terme et ne réfère pas à une théorie didactique particulière.

lière pour que les étudiants acquièrent la maîtrise du langage suffisante pour l'activité mathématique :

> The ability to rephrase statements in alternate, equivalent ways, to recognize that other attractive-looking reformulations are not equivalent, and to have a feeling for truth and falsity of universal and existential statements are crucial mathematical problem-solving tools. Yet numerous studies show that students do not acquire these abilities spontaneously. [7] (Epp, 1999)

Je présenterai notamment la thèse de C. Laborde, *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, qui montre une spécificité du langage des mathématiciens. Mais ceux-ci ne se contentent pas d'utiliser deux codes, ils ont aussi pour une même proposition plusieurs formulations possibles, qu'ils utilisent selon les besoins de la situation. Je préciserai ensuite la notion de reformulation que je mettrai en lien avec la notion de registre de représentation sémiotique de R. Duval. Nous verrons enfin, à travers l'article *Unpacking the logic of mathematical statements* de A. Selden et J. Selden, l'importance de savoir mettre au jour la structure logique d'un énoncé pour organiser une démonstration ou contrôler sa validité.

Deuxième partie : proposition d'une référence pour l'enseignement de notions de logique

Les études épistémologique et didactique nourrissent alors la réflexion sur la constitution d'un *savoir de référence* concernant les notions de logique qui m'est nécessaire pour poursuivre l'étude.

Dans cette deuxième partie, je ferai une présentation de différentes notions de logique adaptée à l'étude didactique qui est la mienne. Notamment, puisque je ne m'intéresse pas à l'enseignement de la logique mathématique, mais à l'enseignement de la logique des mathématiques, je m'appuierai sur l'activité mathématique, et plus particulièrement sur le discours mathématique, pour aborder ces notions.

Pendant plusieurs années, D. Lacombe a proposé dans le DEA de didactique des disciplines de l'université Paris 7 un *Cours de logique élémentaire*, dont le premier chapitre s'intitule *Généralités sur le langage mathématique*. Je m'en inspirerai largement pour introduire les notions d'expression mathématique, de variable muette et de signe mutificateur, de variable parlante, d'expressions synonymes. Les connecteurs et les quantificateurs seront ensuite présentés sous deux angles : une approche à partir la logique mathématique (on trouvera en annexe page 445 une présentation formelle des notions de base de la logique

7. « La capacité à donner d'une proposition une formulation différente mais équivalente, à reconnaître que d'autres formulations ne sont pas équivalentes même si elles en ont l'air, et à avoir une intuition de la vérité ou de la fausseté de propositions universelles et existentielles, sont des outils essentiels dans la résolution de problèmes mathématiques. Pourtant, de nombreuses études montrent que les étudiants n'acquièrent pas ces capacités spontanément. »

mathématique, comme cela peut-être fait dans un cours à l'université) et l'étude de leur expression dans le discours mathématique. À travers ces deux approches, je cherche à éclairer les pratiques langagières [8] existantes, en les analysant à travers une grille de lecture fournie par la logique mathématique. Je les compléterai en donnant quelques résultats d'études didactiques. De la même manière, je m'appuierai sur la déduction naturelle pour étudier les différents types de raisonnement et expressions utilisées dans leur rédaction.

Troisième partie : étude du savoir à enseigner

Les deux premières parties de cette thèse disent finalement d'où je regarde l'enseignement de la logique des mathématiques. Je vais maintenant préciser où je le regarde.

D'une certaine façon, une « heureuse circonstance » a orienté mon choix. En effet, il y a eu récemment une modification dans les programmes de mathématiques pour le lycée concernant les notions de logique, visible à travers deux nouveautés : un tableau fixant des objectifs d'enseignement les concernant, des pages et des exercices qui leur sont consacrés dans les manuels. Il y a aujourd'hui une demande institutionnelle explicite, donnant une nouvelle dimension à l'étude de la transposition didactique. Il est ainsi possible de proposer l'étude d'un *savoir à enseigner* prenant en compte le programme et les manuels, qui sont une première mise en texte du savoir délimitant un espace de conditions et de contraintes pour l'enseignement.

L'analyse des programmes et des textes d'accompagnement avec une perspective historique permet de voir différentes approches possibles des notions de logique. Pour cela, je m'appuierai sur les outils de l'analyse écologique, au sens de M. Artaud (Artaud, 1997) dans son cours à la IXe École d'été de didactique des mathématiques, pour voir où vivent les notions de logique et quelle fonction leur est attribuée. Je distinguerai 4 périodes :

1. de 1960 à 1969 : en 1960, la logique fait son entrée dans les programmes. Et dans les années qui suivent, des expériences sont faites sur le terrain en même temps que sont débattues certaines pratiques d'enseignement, notamment en ce qui concerne l'emploi des symboles logiques.
2. de 1969 à 1981 : c'est la période des mathématiques modernes. La logique est alors objet explicite d'enseignement. Mais cette réforme est rapidement l'objet de vives critiques.
3. de 1981 à 1999 : c'est la période de la « contre-réforme ». La logique, que certains ont associée au formalisme excessif reproché aux mathématiques modernes, en est exclue.

8. L'expression « pratiques langagières » est prise au sens de M. Rebière : un ensemble de personnes qui sont réunies par une activité commune constituent une communauté, qui développe ses propres pratiques, notamment langagières (Rebière, 2013).

4. depuis 1999 : la logique réapparaît dans les programmes, d'abord timidement en Seconde en 1999, puis de façon un peu plus marquée en Première littéraire en 2004.

   Mais c'est surtout en 2009 que se situe le tournant : le programme pour la classe de Seconde de 2009 comporte le tableau d'objectifs concernant « notations et raisonnement mathématiques » ci-après.

Les manuels, quant à eux, donnent à voir des choix d'organisation d'enseignement de notions de logique, c'est-à-dire une interprétation possible des programmes à l'intérieur d'un système de contraintes qui leur est propre. Mais ils sont aussi une ressource pour les professeurs et participent, par leur manière de présenter les notions et par le choix et l'organisation des tâches qu'ils proposent, aux choix didactiques du professeur. Je présenterai d'abord une analyse des pages des manuels actuels dans lesquelles sont présentées les notions de logique, en comparant là encore avec des manuels de l'époque des mathématiques modernes, en situant les choix faits par rapport à la référence proposée dans la deuxième partie de la thèse. J'analyserai ensuite les exercices proposés pour travailler sur les notions de logique, en listant des types de tâche pour chaque notion.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

FIGURE 1 – Tableau des objectifs figurant dans le programme de Seconde de 2009

Quatrième partie : étude d'une formation d'initiation à la logique

Les premières parties de la thèse me permettent de dégager des besoins supposés de formation. J'ai d'abord voulu confronter ces besoins supposés à des besoins ressentis par les enseignants. Ces derniers peuvent notamment avoir le sentiment que la logique qu'ils savent mettre en œuvre dans leur propre activité mathématique est suffisante pour enseigner les notions de logique, surtout dans la mesure où le programme insiste sur l'aspect outil que doivent conserver ces notions au lycée. J'ai choisi d'élaborer un questionnaire, auquel 50 professeurs de Seconde ont bien voulu répondre. J'en présente les résultats en préalable à l'analyse de la formation, pour comparer le contenu de celle-ci et les besoins identifiés.

L'IREM de Paris propose chaque année depuis 2009 dans le cadre de la formation continue un stage *Initiation à la logique*. Depuis le début, le point de vue défendu dans ce stage est celui d'une approche de la logique mathématique à partir de l'étude du langage mathématique. Nous retrouvons ainsi le point de vue adopté dans la deuxième partie de cette thèse, ce qui n'est pas un hasard puisque R. Cori, co-directeur de ce travail et qui a élaboré le contenu de cette formation, a beaucoup travaillé avec D. Lacombe.

Je présenterai l'analyse de deux séquences d'étude du langage mathématique proposées par R. Cori. J'utilise la notion de situation didactique pour analyser ces séquences, comme modèle destiné à interpréter les actions du formateur et des stagiaires en rapport avec une connaissance visée. Je m'intéresse particulièrement à l'existence ou non d'un processus d'institutionnalisation des connaissances sur les notions de logique et à la façon dont cette éventuelle institutionnalisation est ancrée dans la pratique mathématique, permettant ainsi que se constitue un savoir de référence à l'échelle de la formation.

Je cherche également à évaluer la pertinence d'une formation à la logique prenant comme porte d'entrée l'analyse du langage mathématique. J'identifierai pour cela les leviers utilisés par les formateurs pour amener les stagiaires à prendre conscience des implicites et des ambiguïtés des pratiques langagières des mathématiciens et j'étudierai dans les réactions des stagiaires les points de résistance.

J'utiliserai ensuite deux recueils de données pour évaluer l'effet de la formation. Tout d'abord la présentation par certains stagiaires d'activités qu'ils ont proposées dans leurs classes entre les deux premiers jours du stage et le troisième. Ensuite, les réponses à un questionnaire bilan qui a été proposé aux stagiaires à la fin du stage.

Première partie

Approches épistémologique et didactique

L'enseignement de notions de logique auquel je m'intéresse dans cette thèse a pour but « l'acquisition d'un certain savoir-faire logique [plutôt que d'un] savoir logique en soi » (El Faqih, 1991, p. 165). Dans les termes de la TAD, je dirai qu'il ne s'agit pas de s'intéresser à la transposition didactique de la logique mathématique, savoir savant aujourd'hui bien identifié, mais à la transposition de la logique des mathématiques. C'est pourquoi je suggère d'introduire dans le schéma du processus de transposition didactique un *savoir de référence* entre le *savoir savant* et le *savoir à enseigner*. Ce savoir de référence s'élabore à partir de pratiques qui ont fait leurs preuves dans différentes situations. Un tel savoir de référence n'existe pas pour la logique des mathématiques, d'où ma première question de recherche : « Quel savoir de référence serait épistémologiquement et didactiquement pertinent pour l'enseignement de notions de logique au lycée ? »

Un tel savoir de référence doit donner à voir, plus explicitement que ne le fait la logique mathématique, un ancrage dans l'activité mathématique. Cependant, le but de la logique mathématique étant d'une certaine façon de rendre compte de la logique des mathématiques, elle est tout de même une candidate naturelle à être un des piliers de ce savoir. Finalement, c'est tout autant à partir de l'épistémologie de la logique mathématique que de ses concepts et méthodes en tant que théorie mathématique aboutie que ce savoir de référence pourra être constitué. D'où le premier chapitre de cette partie, dans lequel j'étudie différents systèmes logiques de l'Antiquité grecque à la logique mathématique du début du XX^e^ siècle.

Puisque ce savoir de référence est introduit à des fins d'enseignement, il doit comporter une dimension didactique qui n'est évidemment pas présente dans la logique mathématique. Cela signifie qu'il doit être un outil pour les enseignants pour penser l'enseignement de notions de logique dans leurs classes. Je complète alors l'étude épistémologique par une étude didactique dans le deuxième chapitre de cette partie. J'y présente une première sélection de travaux didactiques montrant comment la logique mathématique peut contribuer à l'analyse des raisonnements des élèves. Conformément à l'intention annoncée de réhabiliter le pilier langage de la logique, je choisis ensuite de me concentrer sur des travaux qui contribuent à la réflexion sur la nécessité et la possibilité d'un travail sur le langage dans la classe de mathématiques.

Chapitre 1

Étude de différents systèmes logiques

Sommaire

Dans cette partie je propose l'étude de différents systèmes [1] logiques à travers l'histoire, afin de mettre en évidence différentes conceptions de la logique en en faisant ressortir des invariants et des différences. Je cherche alors à déterminer quelles sont les finalités attribuées à la logique dans chacun de ces systèmes. Je fais notamment ressortir l'important travail sur le langage qui est à la base de chacun d'entre eux. Par ailleurs, puisque cette étude épistémologique est un préalable à la constitution d'une référence sur les notions de logique, je souligne dans ces systèmes les choix de mise en forme des éléments du système, ce que j'appelle le *niveau de formalisation* du langage et des raisonnements.

L'approche historique permet de se « déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle [la didactique] manipule au niveau des savoirs » (Artigue, 1990, p. 245) et c'est peut être particulièrement important pour les notions de logique dont nous avons vu qu'elles sont pour la plupart des professeurs de mathématiques des connaissances en acte bien plus qu'un savoir décontextualisé. Je relève alors également dans ces systèmes différents aspects des notions de variable, proposition, connecteur ET et OU, implication, quantificateur, type de raisonnement.

Je porte dans cette étude une attention particulière à la dialectique entre l'aspect syntaxique et l'aspect sémantique de ces systèmes logiques. La syntaxe concerne la forme des expressions, la sémantique s'occupe de la signification des signes qui y interviennent. On parle notamment de règles syntaxiques pour des règles de manipulation des expressions qui peuvent être utilisées indépendamment de la signification des signes, quand bien même elles ont été justifiées par des considérations sémantiques (c'est le cas par exemple des règles de transformation des expressions algébriques : on démontre dans le cas des entiers la règle de distributivité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$, on l'utilise ensuite sans se reporter à la signification numérique des lettres de variable). La syntaxe a ainsi un caractère formel qui peut être particulièrement opératoire, mais qui, seul, est vide de sens. La sémantique fait intervenir le domaine auquel appartiennent les objets sur lesquels portent les raisonnements que ces systèmes étudient.

Il n'est bien sûr pas question de couvrir l'ensemble de l'histoire de la logique et de ses acteurs. J'ai choisi pour cette étude des périodes cruciales, en présentant à chaque fois deux systèmes différents presque contemporains :

– Tout d'abord l'Antiquité grecque, avec d'un côté la logique d'Aristote, d'autre part celle des Stoïciens. Nous verrons que, vieilles de plus de deux mille ans, elles n'en portaient pas moins déjà beaucoup d'éléments jugés essentiels aujourd'hui. La logique d'Aristote a été étudiée notamment à travers la lecture des *Premiers Analytiques*. Il

1. « Système » est entendu ici comme un ensemble de propositions, de principes et de conclusions établis autour d'un sujet précis, ici le raisonnement. En logique mathématique, un système formel est constitué d'un vocabulaire, d'un ensemble d'axiomes et d'un ensemble de règles de déductions. Nous retrouvons tout ou partie de ces éléments dans les systèmes évoqués, mais ce ne sont pas des « systèmes formels » au sens logico-mathématique actuel.

ne reste malheureusement plus beaucoup de sources originales des œuvres logiques des Stoïciens.

– Ensuite, le XVII^{e} siècle, époque de grandes avancées dans le symbolisme mathématique. Dans cette période, Descartes et Leibniz illustrent deux manières de penser la logique. La position de Descartes sera étudiée à travers le traité connu sous le nom de *logique de Port-Royal* qui permet d'appréhender à la fois certains développements de la logique d'Aristote et des Stoïciens, mais aussi la mise en avant de la méthode prônée par Descartes. En ce qui concerne Leibniz, je me contenterai de présenter ses aspirations plutôt que ce qu'il a réellement mis en place, qui est très complexe et pas toujours abouti.
– Enfin, la constitution récente de la logique mathématique sera étudiée à travers deux œuvres importantes : *Les lois de la pensée* de G. Boole et de l'*Idéographie* de G. Frege. Le premier a « mathématisé » la logique, le deuxième a voulu « logiciser » les mathématiques.

D'autres lectures sur l'histoire de la logique ont servi pour un regard d'ensemble sur ces différentes périodes, notamment *La logique et son histoire d'Aristote à Russell* de R. Blanché.

Je propose une étude relativement détaillée de chaque système. Pour chaque période, les études des deux systèmes choisis seront suivies d'une synthèse intermédiaire qui rappelle les éléments importants des deux systèmes étudiés en les mettant en parallèle l'un avec l'autre. Une synthèse globale est proposée à la fin du chapitre.

1.1 L'Antiquité grecque : Aristote et les Stoïciens

L'Antiquité grecque peut être considérée la date de naissance de la logique en tant que science. Une étude des logiques d'Aristote et des Stoïciens nous montre quelles idées étaient déjà présentes dès ce tout jeune âge et sous quelles formes.

1.1.1 La logique d'Aristote

Des extraits des ouvrages mentionnés se trouvent en annexe B, page 455.

Aristote, philosophe grec du IV^{e} siècle avant JC (-384, -322), n'est bien sûr pas le premier à avoir réfléchi sur la logique. Mais ses œuvres logiques, qui nous sont parvenues sous la forme d'un recueil de traités, réunis sous le titre d'*Organon*, sont souvent citées comme les premières œuvres logiques aussi complètes.

Organon signifie « instrument » en grec. La logique que constitue Aristote est un outil au service de la science, une théorie de la déduction permettant notamment à la science la découverte de vérités. Il expose sa théorie du syllogisme, raisonnement déductif formé de trois propositions : deux prémisses et une conclusion. Dans *Premiers Analytiques*, il considère d'abord le syllogisme seulement du point de vue de sa validité formelle (voir en annexe page 457). Puis dans *Seconds Analytiques*, il traite des syllogismes démonstratifs (dont les prémisses sont nécessaires, la vérité de la conclusion étant alors établie par la validité du syllogisme appliqué à des prémisses vraies). Enfin, dans *Topiques*, il traite des syllogismes dialectiques (dont les prémisses sont simplement probables, la conclusion du syllogisme n'étant alors pas nécessairement vraie, même si celui-ci est valide). Cette distinction montre que co-existent chez Aristote deux conceptions de la logique, l'une comme théorie formelle de la validité des raisonnements, l'autre comme outil, méthode pour la recherche de vérités scientifiques, même si la première phrase des *Premiers Analytiques* semble donner plus d'importance à la deuxième conception : « Il faut d'abord établir quel est le sujet de notre enquête et de quelle discipline elle relève : son sujet, c'est la démonstration, et c'est la science démonstrative dont elle dépend » (Aristote, 2007, p. 15)

Le travail sur le langage

(a) Sur les propositions Les *Analytiques* sont précédés dans l'*Organon* de traités dans lesquels il est question des propositions. Dans le traité des *Catégories*, Aristote distingue dix façons de signifier et de désigner ce qui est (voir en annexe page 455), puis dans le traité *De l'Interprétation* (*Hermeneia*) il précise les besoins de formalisation du langage : « il faut d'abord établir la nature du nom et celle du verbe : ensuite celle de la négation et de l'affirmation, de la proposition et du discours. » (Aristote, 2008, p. 89). Nom, verbe, discours sont ainsi définis, pour aboutir à la proposition qui sera finalement l'objet d'étude : « tout discours n'est pas une proposition, mais seulement le discours dans lequel réside le vrai ou le faux » (Aristote, 2008, p. 95). Les propositions considérées dans la logique d'Aristote, de la forme sujet-copule-prédicat, sont d'abord distinguées en qualité, affirmative ou négative, puis en quantité, universelle ou particulière [2]. Ces distinctions donnent alors quatre types de propositions d'attribution pure [3] :
– Les affirmatives universelles : tout homme est blanc
– Les négatives universelles : aucun homme n'est blanc
– Les affirmatives particulières : quelque homme est blanc
– Les négatives particulières : quelque homme n'est pas blanc.

2. Aristote considère aussi des propositions indéfinies du type *l'homme est blanc* mais il met au jour les difficultés d'interprétation de tels énoncés, dont on ne sait pas s'il faut les comprendre comme des universelles ou des particulières.

3. Aristote considère également des propositions modales exprimant le nécessaire, le contingent, mais ce type de proposition est en dehors de ce qu'on appelle *la logique classique* à laquelle je m'intéresse dans cette recherche.

Aristote ne cherche pas à formaliser l'expression de ces propositions en utilisant toujours les mêmes signes [4], ce qui sera fait ultérieurement au Moyen-Âge. Ces propositions peuvent également être exprimées dans le langage des prédicats, ou dans le langage ensembliste. Les tableaux suivants donnent différentes expressions de ces quatre types de propositions [5] :

	Affirmatives universelles	Négatives universelles
Aristote	A est affirmé de tout B, A appartient à tout B	A n'est affirmé de nul B, A n'appartient à nul B
Moyen-Âge	Tout B est A	Nul B n'est A
Langage des prédicats	$\forall x\,(B[x] \Rightarrow A[x])$	$\forall x\,(B[x] \Rightarrow \text{NON}\,A[x])$
Langage ensembliste	$B \subset A$	$B \subset A^c$

FIGURE 1.1 – Différentes expressions des propositions universelles

	Affirmatives particulières	Négatives particulières
Aristote	A appartient à quelque B	A n'appartient pas à quelque B
Moyen-Âge	Quelque B est A	Quelque B n'est pas A
Langage des prédicats	$\exists x\,(B[x] \text{ ET } A[x])$	$\exists x\,(B[x] \text{ ET NON}\,A[x])$
Langage ensembliste	$B \cap A \neq \emptyset$	$B \cap A^c \neq \emptyset$

FIGURE 1.2 – Différentes expressions des propositions particulières

Par ailleurs, Aristote élabore deux théories sur ces propositions : une théorie de l'opposition et une théorie de la conversion. Ces théories établissent des relations entre des propositions, relations entre leurs formes et entre leurs valeurs de vérité. Elles sont donc à l'articulation syntaxe/sémantique.

La théorie de l'opposition est décrite dans *De l'Interprétation* (voir en annexe page 456). Aristote remarque qu'il existe deux relations d'opposition :

– d'une part la relation de contradiction entre des propositions qui s'opposent par la quantité et par la qualité, c'est-à-dire entre l'affirmative universelle (*Tout B est A*) et la négative particulière (*Quelque B n'est pas A*), ou entre la négative universelle (*Nul B n'est A*) et l'affirmative particulière (*Quelque B est A*), relation qui correspond à la notion de négation,
– d'autre part la relation de contrariété entre des propositions universelles qui s'opposent par la qualité, c'est-à-dire entre l'affirmative universelle (*Tout B est A*) et la négative universelle (*Nul B n'est A*).

4. Par signes, j'entends ici mots ou symboles.
5. Nous verrons quand nous aborderons la conversion des propositions page 35 que dans le cas des affirmatives universelles, les expressions proposées ne sont pas rigoureusement équivalentes.

Nous reviendrons sur ces relations qui seront complétées par les développements de la logique d'Aristote au Moyen-Âge pour donner le *carré des oppositions* (voir page 48).

La théorie de la conversion est décrite dans *Premiers Analytiques* (voir en annexe page 457). Aristote relève les conversions suivantes :

(1) Les négatives universelles sont convertibles : si nul A n'est B, alors nul B n'est A. Dans le langage des prédicats, il s'agit des deux propositions $\forall x\ (A[x] \Rightarrow \text{NON}\, B[x])$ et $\forall x\ (B[x] \Rightarrow \text{NON}\, A[x])$, dont nous savons qu'elles sont équivalentes, l'une étant la contraposée de l'autre. En termes ensemblistes, l'universelle négative se traduit par $A \cap B = \emptyset$, expression dans laquelle on voit bien la symétrie des rôles joués par A et B.

(2) Les affirmatives universelles se convertissent en affirmatives particulières : si tout A est B, alors quelque B est A. Pour comprendre la validité de cette conversion, il faut savoir que chez Aristote, l'attribution universelle contient une clause d'existence pour le sujet, c'est-à-dire qu'affirmer *Tout A est B* pré-suppose l'existence d'un A. Dans le langage des prédicats, les deux propositions dont il est ici question sont : $\forall x\,(A[x] \Rightarrow B[x])$ et $\exists x\ (A[x]\ \text{ET}\ B[x])$. Or, en prenant un prédicat A qui est faux pour toute valeur que peut prendre la variable x, on obtiendra une première proposition vraie (par exemple, « $\forall n \in \mathbb{N}\ (n^2 = 3 \Rightarrow n = 0)$ » est vraie puisque la prémisse est toujours fausse[6]), et une seconde proposition fausse (dans l'exemple, « $\exists n \in \mathbb{N}\ (n^2 = 3\ \text{ET}\ n = 0)$ » est fausse). Pour exprimer cette règle de conversion dans le langage des prédicats, il faut rajouter cette clause d'existence :

$$\text{Si les propositions } \forall x\ (A[x] \Rightarrow B[x]) \text{ et } \exists x\ A[x] \text{ sont vraies,}$$
$$\text{alors la proposition } \exists x\ (A[x]\ \text{ET}\ B[x]) \text{ est vraie.}$$

En termes ensemblistes, il est facile de voir qu'on ne peut déduire $A \cap B \neq \emptyset$ de $A \subset B$ qu'à condition d'avoir l'hypothèse supplémentaire $A \neq \emptyset$.

(3) Les affirmatives particulières sont convertibles : si quelque A est B, alors quelque B est A. Dans le langage des prédicats, cette règle repose uniquement sur la propriété de commutativité du connecteur ET puisque les deux propositions sont $\exists x\ (B[x]\ \text{ET}\ A[x])$ et $\exists x\ (A[x]\ \text{ET}\ B[x])$ qui sont équivalentes. En termes ensemblistes, les deux propositions se traduisent par $A \cap B \neq \emptyset$.

Aristote souligne aussi que les négatives particulières ne sont pas convertibles. En faisant cela, il donne un caractère d'exhaustivité à son étude. Notons également qu'Aristote ne distingue pas les cas de conversions où il y a équivalence (règle 1 et 3) de celui où il n'y a pas équivalence (règle 2).

Ainsi, Aristote propose une logique qui est souvent qualifiée de première logique formelle, notamment dans la mesure où, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, il utilise des variables pour faire ressortir la forme des propositions qui seule importe pour la validité des syllogismes. Mais comme le souligne R. Blanché, la formalisation n'est pas

6. Se reporter à la table de vérité de l'implication en annexe page 127.

recherchée pour elle-même :

> Il n'est pas sans intérêt de noter que cette variabilité de formulation [des propositions, voir le tableau page 34], non seulement dans le passage de l'expression concrète à l'expression symbolique, mais à l'intérieur même de cette dernière, révèle assez clairement que la logique d'Aristote ne pousse pas le souci formel jusqu'au formalisme. L'essence du formalisme c'est de calculer sur des signes, indépendamment de leur sens. (Blanché, 1970, p. 48)

(b) Sur les variables Aristote utilise des variables littérales pour marquer la place des termes dans les propositions. R. Blanché l'illustre avec un passage des *Seconds Analytiques* :

> *Admettons que perdre ses feuilles soit représenté par A, avoir de larges feuilles par B, et vigne par C. Si A appartient à B (car toute plante à feuilles larges perd ses feuilles) et si B appartient à C (car toute vigne est une plante à feuilles larges), alors A appartient à C, autrement dit toute vigne perd ses feuilles.*
>
> La première différence qui saute aux yeux, c'est la substitution de variables littérales A, B, C, aux constantes vigne, perdant ses feuilles, ayant des feuilles larges. Loin d'être un détail négligeable, ce procédé a une portée considérable. Au point que certains logiciens seraient aujourd'hui portés à dire que c'est là, pour la logique, la découverte la plus importante d'Aristote. C'est bien en effet avec elle et par elle que commence une logique qui soit proprement formelle, c'est-à-dire dans les énoncés de laquelle toute allusion au contenu des termes a disparu. (Blanché, 1970, p. 47)

Les variables utilisées ici ne sont pas des noms d'objets mathématiques [7], mais seulement des marque-places permettant de ne considérer que la forme de la proposition pour la validité du syllogisme.

L'un des successeurs d'Aristote, Théophraste, introduit un sujet indéterminé prédiqué de deux attributs, mais ne franchit pas le pas de donner un nom de variable à cet indéterminé :

> L'idée , il est vrai, n'était pas absolument nouvelle, puisqu'on la trouve déjà chez Aristote, en un passage sans doute tardif des *Premiers Analytiques*, mais celui-ci ne l'avait pas exploitée. La proposition A est prédiqué universellement de B peut en effet s'exprimer de façon plus explicite de la façon suivante : ce de quoi B est prédiqué universellement, de cela A est aussi prédiqué universellement... Le sujet, c'est un troisième terme, qu'il faut « prendre en surplus », et qui est ce quelque chose, qui demeure indéterminé, de quoi A

7. D'une part parce que les variables n'ont pas encore ce statut de nom d'objet, mais aussi parce que les propositions elles-mêmes ne sont pas encore des objets mathématiques.

> et B sont prédiqués. Seulement, ce terme indéterminé, Théophraste n'a pas eu l'idée de l'exprimer par une variable ; ce qui invite à penser que non seulement chez Aristote, mais aussi bien chez ceux qui raffinent sur son enseignement, le rôle des variables n'était pas encore pleinement perçu, et que la substitution de lettre aux termes concrets ne devait guère remplacer une fonction d'abréviation. (Blanché, 1970, p. 84)

(c) Sur les connecteurs logiques Aristote n'utilise pas à proprement parler de connecteur logique, dans le sens d'un opérateur sur l'ensemble des propositions [8]. Sa logique n'est pas une logique propositionnelle, nous avons vu que pour la décrire en termes modernes nous avions besoin du langage des prédicats (et nous retrouvons la forme très courante en mathématiques $\forall x\,(A[x] \Rightarrow B[x])$). Les connecteurs ET et OU ne sont donc pas étudiés par Aristote. La négation apparaît dans la théorie de l'opposition décrite à la section précédente, mais en tant que relation entre deux propositions, pas en tant que connecteur. L'implication est indirectement présente à travers la forme « Tout A est B », mais là non plus pas en tant que connecteur.

La syllogistique

Le mot « syllogisme » apparaît, comme terme technique, dans les *Topiques*. Le syllogisme y est présenté comme l'une des deux manières possibles de raisonner, l'autre étant l'induction. Les syllogismes sont tous organisés de la même manière : une conclusion est déduite de deux prémisses. Ils sont présentés sous forme de lois logiques : « si $P_1[A,B]$ et $P_2[B,\Gamma]$ alors $C[A,\Gamma]$ », où P_1, P_2, C sont des propositions faisant intervenir les termes A, B et Γ. Les syllogismes sont organisés en trois figures selon la place du terme qui intervient dans les deux prémisses (moyen terme). Ces lois logiques ne disent rien de la vérité des propositions qui les composent, mais donnent une relation entre ces valeurs de vérité et garantissent ainsi la validité de certaines inférences [9]. Par exemple, dans la première figure on peut trouver le syllogisme suivant : « Si A est affirmé de tout B, et B de tout Γ, nécessairement A est affirmé de tout Γ. » (Aristote, 2007, p. 28), qui permet de garantir que l'inférence suivante est valide : « tous les carrés sont des rectangles et tous les rectangles sont des parallélogrammes, donc tous les carrés sont des parallélogrammes. » Aristote a conscience de la différence entre (voir Durand-Guerrier, 2005, p. 13) :
– la vérité d'une proposition,
– la validité d'une loi logique (c'est-à-dire qu'elle est vraie quelle que soit l'interprétation des lettres qui y interviennent),
– la validité d'un raisonnement que l'on contrôle en s'assurant que la loi logique est valide et que les prémisses sont vraies.

8. Faire opérer un connecteur binaire α sur deux propositions P et Q donne la proposition $P\alpha Q$.
9. Une inférence est une opération qui consiste à admettre une proposition en raison de son lien avec une proposition préalable tenue pour vraie.

Dans la première figure le moyen terme est sujet dans la première prémisse et prédicat dans la deuxième (l'intégralité de la description des syllogismes de la première figure se trouve en annexe page 457). La validité de ces syllogismes n'est pas démontrée, elle est admise. Pour les syllogismes non concluants de cette figure, Aristote donne des contre-exemples, c'est-à-dire des « instanciations » de variables (des choix des sujets et prédicats) avec les deux mêmes types de prémisses et des conclusions différentes vraies à chaque fois (ainsi, les deux exemples *Quelque cheval est blanc, nul cygne n'est cheval, tout cygne est blanc* et *Quelque cheval est blanc, nul corbeau n'est cheval, nul corbeau n'est blanc* montrent qu'aucune conclusion nécessaire ne peut venir à la suite des prémisses *Quelque* B *est* A et *nul* Γ *n'est* B).

Les syllogismes concluants de la deuxième figure (moyen terme prédicat dans les deux prémisses, par exemple « Nul A n'est B, Tout Γ est B, Nul Γ n'est A ») et de la troisième figure (moyen terme sujet dans les deux prémisses, par exemple « Tout B est A, Tout B est Γ, Quelque Γ est A ») sont démontrés en utilisant les deux traitements des propositions : soit la conversion d'une des prémisses pour se ramener à un syllogisme concluant de la première figure (voir un exemple en annexe page 460), soit la négation de la conclusion pour utiliser une réduction à l'absurde[10] (voir en annexe page 461). Si la possibilité de tels traitements pour les propositions a été établie en s'appuyant sur des arguments sémantiques, leur utilisation ensuite dans les démonstrations de la validité des syllogismes relève plutôt d'une démarche syntaxique.

Le *modus ponens* (raisonnement direct, « (si A alors B) et A, donc B ») et le *modus tollens* (raisonnement par contraposition, « (si A alors B) et NON B, donc NON A ») sont connus d'Aristote, il les décrit ainsi dans *Topiques* :

> Quand on veut établir une thèse, il faut rechercher de quelle chose donnée la chose en question suivra (car si on a prouvé l'existence de la première, on aura par là même prouvé l'existence du sujet en question) ; par contre quand on veut réfuter une thèse, il faut rechercher quelle chose est si le sujet proposé est donné, car quand nous aurons montré que le conséquent du sujet proposé n'existe pas, nous aurons par là même ruiné la chose en question. (Aristote, 2012, pp. 77-78)

10. Aristote pratique le raisonnement par l'absurde sous la forme suivante :
- d'abord nier la conclusion d'un syllogisme dont on suppose les prémisses vraies,
- prendre alors la négation de la conclusion et la substituer à l'une des prémisses,
- obtenir alors une nouvelle conclusion contradictoire à cette même prémisse.

Par exemple, supposons que nous voulions montrer la validité du syllogisme suivant :

Tout B est A, Tout B est Γ, Quelque Γ est A

Considérons alors la négation de la conclusion : Nul Γ n'est A. Formons alors le syllogisme :

Nul Γ n'est A, Tout B est Γ, Nul B n'est A

Sa conclusion est en contradiction avec la prémisse Tout B est A.

1.1.2 La logique des Stoïciens

L'expression « logique des Stoïciens » désigne une logique développée aux IVe et IIIe siècles avant JC. Nous avons beaucoup moins de sources pour connaître cette logique que pour celle d'Aristote. Elle a été jusqu'à une époque récente à la fois mal comprise et peu appréciée. Ce sont les développements de la logique au XXe siècle qui ont peut-être permis que celle-ci soit réhabilitée, notamment grâce à un article de Lukasiewicz en 1934 qui a définitivement fait admettre que la logique des Stoïciens était la forme ancienne du moderne calcul des propositions. En cela elle diffère profondément de la logique d'Aristote puisque la formulation de celle-ci en termes modernes fait intervenir des prédicats monadiques (à une seule variable). Selon R. Blanché, les Stoïciens sont aussi plus formalistes dans le sens où ils s'attachent à utiliser dans leur description des raisonnements des mots toujours identiques :

> Ils [les Stoïciens] font choix, pour leurs schémas de raisonnement, de formes canoniques, auxquels ils se tiennent scrupuleusement. Et ils étaient parvenus, autant que nous pouvons en juger, à ramener leurs raisonnements à un calcul sur des signes verbaux, sans rien sous-entendre comme allant de soi, veillant au contraire à expliciter toutes les présuppositions nécessaires aux opérations logiques. (Blanché, 1970, p. 96)

Le principal auteur de cette logique stoïcienne est Chrysippe, qui vécut au IIIe siècle avant JC. Ce que nous connaissons de ses œuvres se trouve essentiellement dans ce qu'en ont rapporté Sextus Empiricus et Diogène Laërce au IIIe siècle après JC. Ce dernier rapporte par exemple les fins attribuées à la logique par les Stoïciens : « Ils disent que l'étude des syllogismes est très utile, en effet le syllogisme a un pouvoir démonstratif, il contribue beaucoup à la droite compréhension des propositions, il met de l'ordre dans la compréhension des sciences et soutient notre mémoire. » (Brun, 1957, p. 28)

Les propositions et les connecteurs logiques.

La dialectique [11] des Stoïciens est scindée en deux parties, l'une concernant les signifiants et traitant de tout ce qui touche à la langue, l'autre se concentrant sur le signifié. Dans leur volonté de formaliser de manière univoque les structures du langage, les Stoïciens sont soucieux de « maintenir les structures logiques en accord aussi complet que possible avec les structures grammaticales. » (Blanché, 1970, p. 107)

Il est à peu près impossible de traduire le terme grec employé par les Stoïciens pour désigner le signifié, R. Blanché se contente d'une transcription et le nomme le *lecton* :

> Le *lecton* n'est une pensée qu'au sens d'une pensée pensée, non en celui d'une pensée pensante. [...] Le *lecton*, c'est donc proprement cette chose in-

11. La logique stoïcienne se divisait en deux parties : la rhétorique qui s'occupe du bien parler et la dialectique.

corporelle et extra-mondaine qu'est le sens d'une expression. (Blanché, 1970, p. 107)

C'est à certains de ces *lecta* que peuvent s'appliquer les qualificatifs de vrai ou de faux, ceux qui sont des propositions. Les propositions se divisent en simples et non-simples ou composées. Par exemple, l'affirmation *il est jour* est une proposition simple. La forme négative *il n'est pas jour* est aussi considérée comme une forme simple. Les Stoïciens insistent sur l'obligation de placer la particule négative en tête de phrase et non dans le corps, ce qui est possible en grec [12]. Sextus Empiricus et Diogène Laërce donnent chacun une liste différente de types de propositions simples, aucune ne recouvrant la catégorisation d'Aristote, et il est difficile de savoir ce qu'il en était exactement dans la logique des Stoïciens.

Ces propositions simples sont ensuite utilisées pour former différents types de propositions composées : la proposition hypothétique ou conditionnelle (*s'il est jour il fait clair*), la proposition consécutive ou inférentielle (*puisqu'il est jour il fait clair*), la proposition conjonctive (*il est jour et il fait clair*), la proposition disjonctive (*ou il est jour ou il fait clair*), la proposition causale (*parce qu'il est jour il fait clair*), la proposition comparative (*il est plus/moins jour que nuit*). Dans cette liste, nous pouvons distinguer des types de propositions dont la vérité dépend de la vérité des propositions simples qui les composent (c'est le cas des propositions hypothétiques, conjonctives et disjonctives) et d'autres pour lesquelles ça n'est pas le cas (pour les propositions consécutives, causales et comparatives), qui étaient laissées de côté dans les travaux proprement logiques des Stoïciens. Dans cette catégorisation, nous retrouvons « un exemple manifeste d'une contamination entre le point de vue de la logique formelle et celui de l'analyse du langage. » (Blanché, 1970, p. 109)

Il y a ainsi des connecteurs qui ont un rôle syntaxique dans cette logique : ils permettent, à partir de deux (ou une pour la négation) propositions d'en construire une nouvelle. Le choix pour la forme négative de la particule placée en tête de phrase donne à voir cet aspect pour la négation, la particule agissant comme un connecteur NON. Sont présents également le connecteur ET et le connecteur OU EXCLUSIF [13]. Les propositions hypothétiques font bien sûr penser au connecteur IMPLIQUE, mais la sémantique associée n'est pas exactement celle du connecteur moderne.

Ces propositions hypothétiques sont l'objet d'un désaccord entre les mégariques [14] Diodore de Cronos et son élève Philon. Ce dernier avait une conception de l'implication en tant que connecteur et une conception de la proposition hypothétique comme ayant une valeur de vérité déterminée par la table de vérité que nous connaissons, c'est-à-dire qu'elle « est

12. La langue grecque dispose de deux particules pour exprimer la négation, l'une se plaçant en tête de phrase, l'autre dans le corps de la phrase.

13. Il semble que les Stoïciens connaissent aussi la disjonction inclusive qui pose seulement que l'une des composantes est vraie.

14. L'école mégarique est une école de philosophie grecque fondée entre les Vᵉ et IVᵉ siècles avant JC, dont s'inspirent les Stoïciens.

vraie lorsqu'elle ne commence pas avec le vrai pour finir avec le faux ; de sorte qu'il y a pour cette proposition hypothétique trois façons d'être vraie, et une d'être fausse. » (Blanché, 1970, p. 99) Diodore s'oppose à la thèse philonienne, en en montrant des aspects paradoxaux sur des propositions telles que *s'il est jour je discute*. De telles propositions se retrouvent effectivement alors vraies à certains moments (par exemple lorsqu'il fait jour et que je discute, ou lorsqu'il fait nuit), fausses à d'autres (par exemple lorsqu'il fait jour et que je me tais). Diodore propose alors de dire qu'une proposition hypothétique est vraie lorsqu'elle *n'a pas pu ou ne peut pas* commencer par le vrai pour finir par le faux. En fait, dans l'exemple donné par Diodore, il y a une variable « temps » qui entre en jeu. Elle se modéliserait dans notre logique moderne par la proposition « à tout instant, s'il est jour je discute », c'est-à-dire par une implication universellement quantifiée, qui est bien soit vraie soit fausse.

Chrysippe a une troisième conception des propositions conditionnelles [15], rapportée par Diogène Laërce :

> En outre, les propositions peuvent s'opposer les unes aux autres selon la vérité ou l'erreur si l'une contredit l'autre, par exemple : « Il fait jour et il ne fait pas jour ». Donc la proposition conditionnelle est vraie quand le contraire de la proposition finale s'oppose à la proposition initiale par exemple, « S'il fait jour il fait clair ». [...] La proposition conditionnelle est fausse quand le contraire de la proposition finale ne s'oppose pas à la proposition initiale, par exemple « s'il fait jour Dion se promène ». (Brun, 1957, p. 35)

Le dernier exemple de cette citation est encore une implication entre propositions dépendantes d'une variable « temps ».

Les raisonnements et les variables

Une fois établie la théorie des propositions, la logique des Stoïciens s'occupe de la validité des raisonnements, qui sont ainsi définis :

> Certaines combinaisons de propositions forment des raisonnements. Un raisonnement est un système de propositions dont les unes, appelées prémisses, ont pour fonction d'en prouver une autre , qui est la conclusion .[...] Les Stoïciens faisaient, en la marquant par le langage, une distinction qui était demeurée implicite chez Aristote et qui est essentielle pour une logique formelle : celle du raisonnement en termes concrets et du schéma formel qu'on obtient en remplaçant ces termes concrets par des variables. (Blanché, 1970, p. 113)

15. Pour plus de détails sur ces distinctions, on pourra se reporter à la thèse de V. Durand-Guerrier, (Durand-Guerrier, 1996).

Dans la logique de Chrysippe, il y a 5 schémas de raisonnement (*modes* ou *tropes*) non démontrés :

– **Trope 1 :** Si le premier alors le second ; or le premier ; donc le second.
– **Trope 2 :** Si le premier alors le second ; or pas le second ; donc pas le premier.
– **Trope 3 :** Pas à la fois le premier et le second ; or le second ; donc pas le premier.
– **Trope 4 :** Ou le premier ou le second ; or le premier ; donc pas le second.
– **Trope 5 :** Ou le premier ou le second ; or pas le second ; donc le premier.

Dans ces tropes, les variables, symbolisées par des nombres ordinaux, représentent des propositions. Le fait que Chrysippe n'ait pas cédé à la tentation de dédoubler les tropes [16] 3, 4 et 5 montre, selon R. Blanché, que :

> 1°) il savait distinguer entre le cas des connecteurs symétriques et celui du connecteur asymétrique. 2°) il savait pratiquer la substitution des variables, et donc traiter celles-ci autrement que comme de simples abréviations de langage. (Blanché, 1970, p. 116)

Ces schémas de raisonnement ne sont pas exprimés sous forme de lois logiques comme chez Aristote, mais sous forme de schémas d'inférences. Ici, La vérité des prémisses n'est pas hypothétique mais posée. Une loi logique sous-jacente par exemple au premier trope s'exprimerait avec deux implications : « Si (si le premier alors le second et le premier), alors le second. »

Les cinq tropes donnés ci-dessus sont des indémontrés. De ceux-là sont déduits d'autres schémas :

> De cinq indémontrés on tirait, nous dit Cicéron, des conclusions innombrables, c'est-à-dire qu'on démontrait par eux un grand nombre de raisonnements, en réduisant ceux-ci à l'aide d'un petit nombre de règles, appelées des thèmes. Nous savons que les Stoïciens ramenaient ces règles à quatre, dont nous ne connaissons que deux, la première et la troisième. La première est une règle de réduction à l'impossible. L'autre revient à dire que lorsque de deux propositions en résulte une troisième, et que l'une des deux premières peut elle-même être conclue d'une autre paire de prémisses, on a le droit de conclure la troisième proposition de cette seconde paire de prémisses et de la prémisse qui reste de la première paire. (Blanché, 1970, p. 117)

Seul un tout petit nombre des ces innombrables conclusions a été conservé, mais celles que nous connaissons nous renseignent sur la conception de la logique qu'avait Chrysippe. Par exemple, une de ces conclusions est *Si le premier le premier*[17] *; or le premier ; donc le premier.* Il peut être étonnant de considérer cela comme un théorème logique et non comme une évidence. Cela nous montre que Chrysippe pensait que la formalisation permettait de ne rien sous-entendre, ce qui était la garantie d'un système logique rigoureux, ou en

16. Par exemple de doubler le trope 3 par « Pas à la fois le premier et le second ; or le premier ; donc pas le second ».
17. Principe d'identité, postulat fondamental dans la logique stoïcienne.

d'autres termes « qu'il donne pour objet à la démonstration non pas d'établir des choses non-évidentes, mais d'organiser un ensemble de propositions jusque là isolées, de les unifier en un système déductif. » (Blanché, 1970, p. 118)

Comme chez Aristote, nous pouvons trouver dans la logique stoïcienne les principes du raisonnement direct (trope 1) et du raisonnement par contraposée (trope 2), ainsi que celui du raisonnement par l'absurde.

1.1.3 Synthèse pour la période de l'Antiquité grecque

Nous avons eu un aperçu de deux systèmes logiques de l'Antiquité grecque : celui d'Aristote et celui de Stoïciens. J'en rappelle les principaux éléments en relation avec mon étude :

1. ils contiennent tous deux un travail important sur le langage, travail qui consiste à préciser de quel type de discours s'occupe la logique, puis à décrire les formes de ce discours, pour pouvoir élaborer un système logique formel.
   – La proposition, qui affirme des faits et porte le vrai ou le faux, est un élément de base de ces systèmes logiques. Dans la logique d'Aristote, la proposition est décomposée en sujet, copule, prédicat. La copule peut-être affirmative ou négative, le sujet peut être prédiqué universellement ou particulièrement, ce qui donne 4 types de propositions. Cette logique est qualifiée de « logique des termes [18] » et nécessite pour la modéliser dans la logique mathématique actuelle d'utiliser le langage des prédicats. Dans la logique des Stoïciens, les propositions simples permettent de fabriquer des propositions composées et l'on retrouve certains connecteurs de notre calcul propositionnel moderne : la négation, la conjonction, la disjonction exclusive. L'implication était sujet de débat : Philon de Mégare en avait une conception conforme au connecteur propositionnel moderne, mais s'opposait ainsi à la conception de son maître Diodore de Cronos. Et Chrysippe en avait encore une autre conception (les discussions s'expliquent notamment par le fait qu'ils ne distinguaient pas entre l'implication entre propositions et l'implication universellement quantifiée).
   – Des variables sont utilisées pour remplacer, dans les schémas de raisonnement, les termes chez Aristote ou les propositions chez les Stoïciens. Elles ne sont que des simples marque-place chez Aristote, ces lettres de variables n'ont vocation qu'à être instanciées par des termes. Chez les Stoïciens, les variables utilisées sont des ordinaux, celles-ci étant également vouées à être remplacées par des propositions. Mais les Stoïciens pratiquaient également la substitution de variable, c'est-à-dire le remplacement d'une variable non plus par une valeur, mais par une autre variable.

18. Les termes sont ce qui peut être sujet ou prédicat.

2. Ces logiques s'occupent de la validité des raisonnements, garantie par la forme et non le contenu des propositions qui y interviennent. En cela, ces deux logiques peuvent être qualifiées de formelles. Notons cependant deux différences :
   – les Stoïciens montraient une attention particulière au langage utilisé à l'intérieur même de la proposition, c'est-à-dire qu'ils rigidifiaient l'utilisation de certains mots de la langue courante, donnant alors à ces mots un rôle de constante logique. Ce souci était moins présent chez Aristote. Nous pouvons ainsi dire que les Stoïciens étaient plus formalistes qu'Aristote.
   – Aristote exprimait les schémas de raisonnement sous forme de lois logiques (si P_1 et P_2 alors C). La validité de ces lois logiques, qui garantissait la vérité de la conclusion sous réserve de la vérité des prémisses, était distinguée de la validité d'un raisonnement, qui était établie lorsque l'on appliquait une loi logique valide à des prémisses vraies. Les Stoïciens exprimaient leurs schémas de raisonnement sous forme de règles d'inférence (P_1 et P_2 donc C), dans lesquelles les prémisses sont posées comme vraies et donc aussi la conclusion.

Dans ces deux systèmes cohabitent les aspects syntaxique (les schémas formels de raisonnement) et sémantique (les raisonnements, instanciations de ces schémas). De plus, les règles de conversion des propositions chez Aristote ou les thèmes chez les Stoïciens (règles permettant de ramener des schémas de raisonnement aux cinq tropes indémontrés) sont posés en se référant aux valeurs de vérité, c'est-à-dire avec des considérations sémantiques, mais sont ensuite utilisées de façon syntaxique dans le sens d'une manipulation de signes indépendamment de leur sens.

Il est important de souligner que ces deux systèmes logiques n'ont pas particulièrement vocation à être utilisés en mathématiques. Ils sont des théories du raisonnement dans un cadre général. Les démonstrations d'Euclide, par exemple, ne sont pas du tout rédigées sous forme de syllogismes. Ces deux systèmes sont en effet bien insuffisants pour rendre compte des raisonnements mathématiques, ce que nous voyons bien quand nous les « traduisons » dans les termes de la logique mathématique moderne : la logique des Stoïciens reste une logique propositionnelle et dans la logique d'Aristote n'interviennent que des prédicats monadiques, une proposition telle que « $\forall x \, \exists y \quad x < y$ » n'y est pas exprimable.

La logique d'Aristote a continué d'être développée, notamment par des philosophes du Moyen-Âge en Europe. C'est de cette époque par exemple que date le classement des syllogismes à l'aide de noms mnémotechniques (*Barbara, Baroco* ...). Cette logique est parfois qualifiée de scolastique, car elle était enseignée dans les écoles à l'aide de volumineux traités. Nous allons maintenant voir les positions de deux philosophes et mathématiciens du XVII^{e} siècle par rapport à cette logique : celle de Descartes et celle de Leibniz.

1.2 L'époque moderne : Descartes et Leibniz

L'esprit humaniste de la Renaissance, que l'on retrouve dans les propos de Descartes (philosophe et mathématicien français, 1596-1650), rejette l'aspect trop formel de cette logique scolastique. Descartes n'a pas écrit de logique, mais on retrouve ses idées dans *La logique ou l'art de penser*, traité écrit en 1662, connu sous le nom de *logique de Port-Royal* car on la doit à Antoine Arnauld et Pierre Nicole, membres de cette abbaye. Leibniz (philosophe et mathématicien allemand, 1646-1716) s'oppose presque à cette position. Pour lui l'aspect formel de la logique est la garantie de la validité des raisonnements, l'assimilation d'une démonstration à un calcul l'assurance de la nécessité des conclusions.

Le contexte mathématique dans lequel ces deux positions co-existent presque est très important : depuis Viète, les mathématiques sont en train de vivre une époque de symbolisation féconde, à laquelle Descartes et Leibniz ont grandement contribué. Pour l'un comme pour l'autre la démonstration mathématique est un modèle de pensée pour qui recherche des vérités, mais ils n'ont pas la même conception de la démonstration mathématique, comme le suggère J. Bouveresse :

Pour Descartes :

> La correction du raisonnement ne peut être garantie, justement, que par une attention suffisante et constante au contenu lui-même, et certainement pas par la séparation rigoureuse de la forme d'avec le contenu et le respect de règles formelles de quelque nature que ce soit. (Bouveresse, 2006, p. 18)

Au contraire :

> Leibniz soutient que la démonstration est valide en vertu de sa forme et non de son contenu. Elle est constituée d'une suite de propositions qui commence par des identités explicites totales ou partielles, c'est-à-dire des propositions de la forme « A est A », « AB est A », etc., et dont chaque proposition est tirée d'une des précédentes par une application du principe de substituabilité des termes identiques *salva veritate*. (Bouveresse, 2006, p. 20)

1.2.1 Descartes, la logique de Port-Royal

La méthode cartésienne

Descartes est l'un des meilleurs représentants de l'attitude critique vis-à-vis de la logique scolastique. Il lui reproche d'être trop formelle et de peu d'utilité dans la recherche de la vérité :

> On sait que des sources de connaissance certaines qu'il admet, l'intuition et la déduction, il fait reposer la seconde sur la première. [...] Dans ces conditions il ne saurait y avoir de raisonnement purement formel qui tienne : ou bien

> le départ de la déduction consiste en idées claires et distinctes, et alors la déduction n'est pas seulement valable formellement, elle est matériellement vraie ; ou bien les idées initiales sont obscures et confuses, et alors nous n'avons plus de certitude, même logique, quant aux conséquences que nous essayons d'en tirer. On ne saurait raisonner à vide. Ce que Descartes recherche pour la science, ce n'est pas essentiellement la cohérence, c'est la vérité. Ce qu'il demande à la méthode, ce n'est pas d'endormir l'esprit sous la fausse sécurité des règles, c'est au contraire de le rendre vigilant, d'« accroître la lumière naturelle de la raison ». (Blanché, 1970, p. 178)

Le syllogisme n'est plus le modèle pour raisonner, il lui préfère une méthode inspirée des raisonnements par analyse et synthèse des mathématiques. Descartes la résume dans les quatre règles données dans le *Discours de la méthode, Pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* :

> [...] ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.
>
> Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.
>
> Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.
>
> Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.
>
> Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.
>
> Ces longues chaînes de raison toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent de la même façon, et que pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on en découvre. (Descartes, 1991, pp. 90-91)

Nous retrouvons ici une description de la méthode déductive dans laquelle est affirmé un attachement à la connaissance des objets, c'est-à-dire une préoccupation constante du contenu et le refus d'un raisonnement se détachant du sens.

La logique de Port-Royal

Des extraits de la logique de Port-Royal se trouvent en annexe C, page 463.

Ces positions de Descartes sont reprises dans *La logique ou l'art de penser*, rédigée par Antoine Arnauld et Pierre Nicole. Cet ouvrage a eu un grand succès et a servi pendant près de deux siècles à l'initiation à la logique de beaucoup de jeunes gens. Sa rédaction marque une rupture avec les gros traités de l'époque scolastique, la volonté des auteurs étant explicitement de proposer quelque chose de court, aisé à retenir et utile (voir extraits du premier discours en annexe page 463). Cette importance accordée à l'aspect pratique de la logique se voit dans l'utilisation de nombreux exemples plutôt que de schémas syllogistiques utilisant des variables.

Par ailleurs, la logique est conçue comme étant un outil d'analyse du langage et du raisonnement plutôt qu'un outil pour s'exprimer et raisonner (voir intégralité du préambule intitulé « Logique » en annexe page 465) :

> La logique est l'art de bien conduire sa raison dans la connaissance des choses, tant pour s'instruire soi-même que pour en instruire les autres.
>
> Cet art consiste dans les réflexions que les hommes ont faites sur les quatre principales opérations de leur esprit, *concevoir, juger, raisonner* et *ordonner.*
>
> [...]
>
> Tout cela se fait naturellement, et quelquefois mieux par ceux qui n'ont appris aucune règle de la logique que par ceux qui les ont apprises.
>
> Ainsi, cet art ne consiste pas à trouver le moyen de faire ces opérations, puisque la nature seule nous les fournit en nous donnant la raison ; mais à faire des réflexions sur ce que la nature nous fait faire. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 30)

La logique de Port-Royal est divisée en quatre parties, les trois premières reprennent les développements de la logique d'Aristote, la quatrième traite de la méthode cartésienne. C'est l'association de ces deux approches qui est une véritable nouveauté, même si elles sont plus juxtaposées qu'articulées.

(a) Sur les propositions On retrouve la classification des propositions selon la quantité et la qualité et les quatre types de propositions assorties des lettres qu'on leur associe désormais (voir en annexe page 468). Les relations entre les valeurs de vérité de chaque type de proposition sont maintenant établies de manière exhaustive (voir en annexe page 468) et représentées selon le schéma suivant appelé *carré des oppositions*[19] :

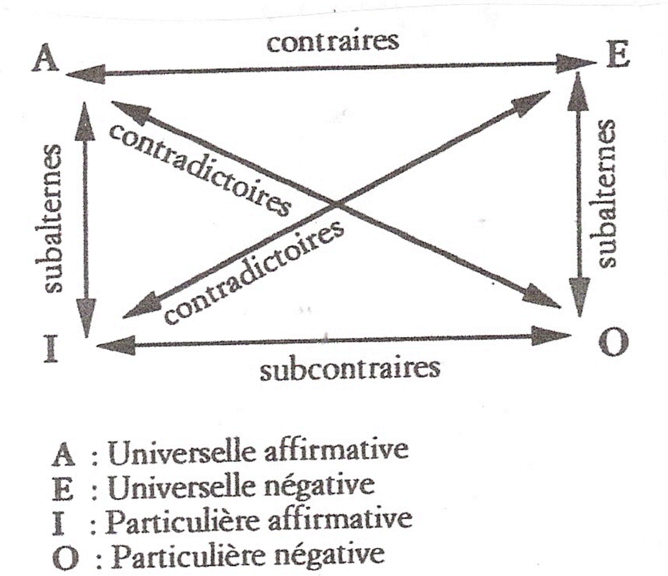


FIGURE 1.3 – Carré des oppositions

Sont ensuite présentés différents types de propositions composées. Il est précisé que pour trouver les contradictoires de ces propositions composées, on le fait en latin en mettant une négation en tête ou en français en utilisant *il n'est pas vrai que*. Ce syntagme fonctionne ainsi comme le connecteur logique propositionnel NON. Il y a six sortes de propositions composées (voir en annexe page 471) :

– les **copulatives**, qui s'expriment avec un *et* (propositions de la forme P ET Q), ou un *ni* (propositions de la forme NON P ET NON Q).
– les **disjonctives**, qui s'expriment avec un *ou* qui est exclusif.
  Pour ces deux types de propositions, il est précisé que la valeur de vérité de la proposition composée dépend des valeurs de vérité des deux parties.
– les **conditionnelles**, qui s'expriment avec un *si*. Deux types de conséquence sont distinguées : les conséquences médiates, quand il n'y a aucun terme commun entre les deux parties de la conditionnelle, et les conséquences immédiates quand il y a un terme commun. Ainsi, en considérant des propositions telles que « si la terre est immobile, le soleil tourne », les auteurs semblent s'orienter vers une conception des conditionnelles comme implication entre propositions. Cependant, quand il s'agit d'établir à quelles conditions les conditionnelles sont vraies, ils ne considèrent qu'un exemple, « Si la volonté de la créature est capable d'empêcher que la volonté absolue de Dieu ne s'accomplisse, Dieu n'est pas tout puissant », qui est une conditionnelle immédiate, et qui est vraie car

19. Le diagramme présenté ici est dû à Boèce, philosophe latin (470-524). Il a été largement utilisé par les logiciens médiévaux.

« quoique l'une et l'autre partie fussent fausses, néanmoins la conséquence de l'une à l'autre est bonne » (Arnauld & Nicole, 1992, p. 126). Cette définition de la vérité des conditionnelles ne correspond pas à celle donnée par la table de vérité de l'implication, mais plutôt à la notion de conséquence logique (voir en annexe page 453 pour une définition de cette notion).
- les **causales**.
- les **relatives** qui renferment une comparaison.
- les **discrétives** où l'on marque une différence de jugement par *mais* ou *néanmoins*.

Des propositions avec « mais » sont souvent utilisées en mathématiques, par exemple quand on donne un contre-exemple. Ainsi, pour infirmer « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 1$ », on pourra arguer que « $(-2)^2 \geqslant 1$ mais $-2 < 1$ », l'utilisation du terme « mais » venant renforcer la différence entre la satisfaction de la prémisse et la non-satisfaction de la conclusion. Si nous cherchions à modéliser les propositions discrétives à l'aide des connecteurs du calcul propositionnel, le plus proche serait de dire que « A mais B » est équivalent à « A ET B. » Mais dans cette modélisation, cette « différence de jugement » serait perdue. Nous pouvons voir dans cette distinction entre copulatives et discrétives l'attention des auteurs de la logique de Port-Royal à l'analyse du langage ordinaire.

Pour ces discrétives, il est proposé plusieurs contradictoires possibles :

> Il peut y avoir plusieurs contradictoires d'une proposition de cette sorte, comme si on disait :
>
> *Ce n'est pas des richesses, mais de la science que dépend le bonheur.*
>
> On peut contredire cette proposition en toutes ces manières :
>
> *Le bonheur dépend des richesses, et non de la science.*
>
> *Le bonheur ne dépend ni des richesses, ni de la science.*
>
> *Le bonheur dépend des richesses et de la science.*
>
> (Arnauld & Nicole, 1992, p. 128)

Ainsi, pour contredire « A mais B », il faut affirmer « NON A ET B » ou bien affirmer « NON A ET NON B » ou bien affirmer « A ET NON B ». Au lieu de donner une seule contradictoire qui serait une proposition disjonctive [20], les auteurs proposent trois contradictoires correspondant chacune à une des composante de la disjonction. Ceci appuie le caractère pratique de la logique de Port-Royal : la contradictoire n'est pas obtenue formellement, elle a un aspect pratique : est contradictoire ce qui permet l'acte de contredire.

20. En réunissant les trois possibilités dans une seule affirmation, on obtient la proposition « (NON A ET B) OU BIEN (NON A ET NON B) OU BIEN (A ET NON B) », qui est l'expression sous forme d'une disjonction exclusive de la négation de « A ET B », négation que l'on présente généralement sous la forme d'une disjonction inclusive « NON A OU NON B ».

Puis sont présentées des propositions composées au niveau du sens, c'est-à-dire des propositions qui renferment deux jugements (voir en annexe page 473) :

- les exclusives, « qui marquent qu'un attribut convient à un sujet, et qu'il ne convient qu'à ce seul sujet. »
- les exceptives, « où l'on affirme une chose de tout un sujet, à l'exception de quelqu'un des inférieurs à ce sujet. »
- les comparatives.
- les inceptives ou désitives, « lorsqu'on dit qu'une chose a commencé ou cesse d'être telle. » (Arnauld & Nicole, 1992, pp. 129 à 135)

Pour ces propositions composées au niveau du sens, il est également proposé plusieurs manières de les contredire puisqu'elles correspondent chacune à des propositions qui s'écriraient comme des conjonctions. Nous retrouvons de telles propositions dans le discours mathématique, comme par exemple quand nous affirmons :

- « la solution de l'équation $f(x) = 1$ est -3 » (exclusive),
- « tous les nombres premiers excepté 2 sont impairs » (exceptive),
- « la suite u est croissante à partir du rang 6 » (inceptive).

Même si nous n'utilisons pas des conjonctions pour exprimer ces propositions, nous savons bien que pour les démontrer il y a à chaque fois deux choses à faire :

- montrer que -3 est solution et que c'est la seule,
- montrer que 2 est un nombre premier non impair et que tous les autres nombres premiers sont impairs,
- montrer que la suite u est croissante à partir du rang 6 et pas avant. [21]

La logique de Port-Royal propose ainsi une analyse très fine du langage dont le but est de découvrir les structures fondamentales qui sont dissimulées sous la variété des formes de l'expression. Nous voyons qu'une telle analyse, bien qu'insuffisante pour décrire le langage mathématique, permet un premier niveau de lecture des propositions mathématiques, quand elles sont exprimées dans des formulations proches du langage courant. Dans les exemples donnés ci-dessus, souligner le fait que ces propositions « composées au niveau du sens » sont des conjonctions permet de voir qu'il y aura deux étapes dans leur démonstration.

(b) Sur les raisonnements La troisième partie de la logique de Port-Royal traite des raisonnements. Les auteurs avertissent le lecteur :

> Cette partie que nous avons maintenant à traiter, qui comprend les règles du raisonnement, est estimée la plus importante de la logique, et c'est presque l'unique qu'on y traite avec quelque soin ; mais il y a sujet de douter si elle est aussi utile qu'on se l'imagine. La plupart des erreurs des hommes, comme nous avons déjà dit ailleurs, viennent bien plus de ce qu'ils raisonnent sur de

21. Même si dans ce cas on accepte généralement un sens plus large qui est « croissante au moins à partir du rang 6 », qui n'est pas une conjonction.

faux principes, que non pas de ce qu'ils raisonnent mal suivant leurs principes. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 167)

Les syllogismes y sont présentés selon le traitement développé au Moyen-Âge, dans la lignée d'Aristote. Les syllogismes, qui comportent deux prémisses et une conclusion, sont classés en quatre *figures* selon la place (sujet ou attribut) du moyen terme [22]. Puisqu'il y a quatre types de propositions, il y a dans chaque figure soixante-quatre (4^3) *modes* correspondant chacun à un choix pour chacune des trois propositions. Le but est de savoir dans chaque figure quels sont les modes qui correspondent à des syllogismes concluants. Des règles générales sont données pour les quatre figures qui permettent de réduire à dix le nombre de modes possiblement concluants dans chaque figure (voir en annexe page 476). Ensuite, le même schéma est suivi pour chaque figure (voir en annexe page 477) :
– donner d'autres règles spécifiques à la figure en question,
– en déduire les syllogismes concluants : ceux qui ne sont pas éliminés par les règles,
– donner les noms de ces modes, associés chacun à un exemple,
– donner finalement des principes de cette figure, sortes de maximes résumant les syllogismes concluants.

Notons alors deux caractéristiques de cette présentation : il y a une justification de chacune des règles, mais il n'est pas démontré que les syllogismes restants sont bien concluants. Il n'y a aucun schéma syllogistique donné avec des variables, mais seulement des exemples pour présenter chaque mode concluant, chaque exemple étant présenté sous la forme d'une inférence *Prémisse 1, Prémisse 2, donc Conclusion.*

À côté de ces modes concluants des quatre figures sont présentées d'autres formes de syllogismes, dont notamment :
– les syllogismes conjonctifs dont la majeure est composée et qui sont de trois genres, dans lesquels nous retrouvons les cinq tropes des Stoïciens (voir en annexe page 479) :

  (1) les syllogismes conditionnels qui correspondent au *modus ponens* et au *modus tollens*, caractérisés chacun par une règle : *en posant l'antécédent, on pose le conséquent*, et *ôtant le conséquent, on ôte l'antécédent.* Les auteurs précisent explicitement qu'il n'est pas valide d'inférer l'antécédent du conséquent, ou la négation du conséquent de la négation de l'antécédent.

  (2) Les syllogismes disjonctifs sont ceux contenant une prémisse qui est une proposition disjonctive. Puisqu'il s'agit d'un ou exclusif, il y a là aussi deux sortes de tels syllogismes concluants : quand on nie l'une des deux parties de la disjonction, on peut alors en déduire l'autre, ou quand on affirme une des deux parties, on peut alors en déduire la négation de l'autre.

22. Le petit terme est le sujet de la conclusion, le grand terme l'attribut de la conclusion, le moyen terme est le troisième terme, relié à chacun des deux autres dans chacune des prémisses, qui va permettre de les mettre en relation. Par exemple, dans le syllogisme « Tout B est A, Tout C est B, Tout C est A », le petit terme est C, le grand terme est A, le moyen terme B est sujet dans la première prémisse (la majeure) et attribut dans la deuxième (la mineure), c'est un syllogisme de la première figure.

(3) Les syllogismes copulatifs sont des syllogismes contenant une proposition copulative niante dans l'une des prémisses (NON(A ET B)), quand on affirme ensuite l'une des parties, on peut en déduire la négation de l'autre.

– Les syllogismes dont la conclusion est conditionnelle (voir en annexe page 480). En fait, les auteurs remarquent qu'un syllogisme tel que :
Tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux :
Or, la lune réfléchit la lumière de toutes parts :
Donc la lune est un corps raboteux.
peut être exprimé avec seulement deux propositions :
Tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux :
Donc si la lune réfléchit la lumière de toutes parts, c'est un corps raboteux.
Et même avec une seule :
Si tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux, et que la lune réfléchisse la lumière de toutes parts, il faut avouer que ce n'est point un corps poli, mais raboteux.
Cependant, même si ces diverses formulations sont associées, les auteurs les distinguent bien par rapport à ce qu'elles posent pour vrai ou non :

> Toute la différence qu'il y a entre les syllogismes absolus et ceux dont la conclusion est enfermée avec l'une des prémisses dans une proposition conditionnelle, est que les premiers ne peuvent être accordés tout entiers, que nous ne demeurions d'accord de ce qu'on aurait voulu nous persuader ; au lieu que dans les derniers, on peut accorder tout, sans que celui qui les fait ait encore rien gagné, parce qu'il lui reste à prouver que la condition d'où dépend la conséquence qu'on lui a accordée est véritable. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 208)

Ainsi, quand bien même *si ... alors* et *donc* sont associés, ils sont clairement différenciés.

(c) Sur la méthode À côté de la présentation des syllogismes, la méthode vient donner les principes de la démonstration (voir les règles inspirées de la méthode des géomètres en annexe page 481) :

> Il nous reste à expliquer la dernière partie de la logique, qui regarde la méthode, laquelle est sans doute l'une des plus utiles et des plus importantes. Nous avons cru devoir y joindre ce qui regarde la démonstration, parce qu'elle ne consiste pas d'ordinaire en un seul argument, mais dans une suite de plusieurs raisonnements, par lesquels on prouve invinciblement quelque vérité ; et que même il sert de peu pour bien démontrer, de savoir les règles des syllogismes, ce à quoi l'on manque très-peu souvent ; mais que le tout est de bien arranger ses pensées, en se servant de celles qui sont claires et évidentes, pour pénétrer dans ce qui paraissait plus caché. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 273)

Les auteurs affirment ici clairement que les schémas de raisonnement ne peuvent pas seuls amener à démontrer des vérités. Cette intégration de la méthode à la logique en fait un art de diriger la pensée et s'écarte de la conception de la logique comme science formelle. Nous retrouvons là toute la problématique des relations entre la logique mathématique (même si à l'époque rien de tel n'est encore constitué) et la logique des mathématiques, à l'œuvre dans l'activité mathématique (bien qu'ici il ne s'agisse pas seulement de la logique des mathématiques, mais de la logique de la science, ou même plus largement de la logique dont nous devons user dans nos réflexions quotidiennes).

1.2.2 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz est considéré comme un grand pionnier dans l'histoire de la logique, à l'origine de la lignée des logiciens modernes. Signalons tout de suite que si l'on peut effectivement trouver dans les idées de Leibniz des éléments qui seront développés à la fin du XIX^e^ siècle, ces développements auront lieu indépendamment des travaux de Leibniz qui seront plutôt redécouverts et réinterprétés à la lueur des nouveautés de la logique mathématique.

Pour ce qui est de la logique classique, Leibniz se situe dans la continuité des auteurs qui l'ont précédé. Il apporte quelques développements à la syllogistique aristotélicienne et essaie d'imaginer des représentations diagrammatiques pour les figures du syllogisme.

Mais ses réflexions portent aussi sur les inférences qui échappent aux schémas syllogistiques, telles que celles que Jungius (1587-1657) avait listées dans son *Logica hamburgernsis*, par exemple l'inversion des relations (de *Pierre est le père de Paul*, je peux déduire que *Paul est le fils de Pierre*), les conséquences *a compositis ad divisa* (de *Platon est un philosophe éloquent*, je peux déduire que *Platon est éloquent*)... À la manière de Jungius, Leibniz tente d'exprimer de telles inférences de manière à les réduire à des formes classiques.

Leibniz est attaché au développement d'un système logique en tant que système cohérent permettant la description de tous les raisonnements, attachement qui contraste avec la position des auteurs de la logique de Port-Royal qui ne s'occupent pas de développer un système, mais seulement de donner des indications pour guider les raisonnements. Notons aussi qu'avec ces réflexions, Leibniz s'engage dans la voie d'une logique des relations, mais un attachement exclusif à la forme attributive de la proposition (Sujet *est* Prédicat) l'empêche d'aller plus avant dans cette élaboration.

Pour Leibniz, le but de la logique est d'assurer l'infaillibilité du raisonnement en le réduisant à sa forme et c'est surtout en cela qu'il est novateur. Pour parvenir à un tel but, il lui faut élaborer une caractéristique universelle (*Lingua characteristica universalis*) permettant que les raisonnements soient réduits à un calcul (*Calculus ratiocinator*), ce qu'il décrit dans *Fondements du calcul rationnel* :

> Quant aux langues ordinaires, même si elles servent beaucoup le raisonnement, elles sont cependant sujettes à d'innombrables équivoques et ne peuvent faire l'office d'un calcul, à savoir nous permettre de déceler des erreurs de raisonnement à partir de la seule formation et construction des mots, à la façon de solécismes [23] et de barbarismes [24]. Tel est en revanche l'avantage admirable de l'arithmétique et de l'algèbre, où tout raisonnement consiste dans l'usage de caractères et où l'erreur de l'esprit coïncide avec celle du calcul.
>
> Lorsque j'ai creusé plus profondément ce sujet, m'est apparu aussitôt de façon manifeste que toutes les pensées humaines peuvent tout à fait se résoudre en un petit nombre d'entre elles considérées comme primitives, et qu'en assignant des caractères à celles-ci, il est alors possible de former les caractères des notions dérivées, desquels on peut toujours extraire la totalité de leurs réquisits, les notions primitives qui y interviennent, en un mot leur définition, c'est-à-dire leur valeur, et donc aussi les affections que l'on peut démontrer à partir des définitions. Une fois pourvu de cette seule réalisation, quiconque se servirait de caractères de ce genre en écrivant et en raisonnant ne faillirait jamais, ou alors pourrait lui-même, non moins que d'autres, surprendre ses propres fautes par les plus faciles examens. De plus, il trouverait les vérités, dans la mesure où les données dont il dispose le permettent, et lorsque les données ne suffisent pas pour trouver ce qui est demandé, il verrait aussitôt de quelles expériences et de quelles connaissances on peut bien encore avoir besoin pour accéder à la vérité, dans la mesure où c'est possible à partir des données, que ce soit par l'approximation ou par la détermination du plus grand degré de probabilité. Quant aux sophismes et aux paralogismes, ils ne seraient pas différents ici des erreurs de calcul qu'on fait en arithmétique et des solécismes et barbarismes dans les langues. (Leibniz, 1998, pp. 167-168)

Cette longue citation montre la conviction de Leibniz qu'un tel but est atteignable et qu'il serait d'un grand secours pour le raisonnement. L'œuvre logique de Leibniz est extrêmement riche et complexe. Je me contenterai ici de donner un extrait de *Suppléments à l'échantillon de calcul universel*, écrit entre 1679 et 1686, qui illustre bien selon moi le but et la méthode de Leibniz. Ici, les lettres minuscules représentent des termes, c'est-à-dire non pas des noms mais ce qui est signifié par les noms, à savoir les concepts. Elles jouent le même rôle que les lettres dans le calcul algébrique symbolique qui se développe depuis un siècle : elles ont vocation à être remplacées par des termes concrets.

> POSTULAT : qu'il soit permis de supposer qu'une lettre est équivalente à une seule lettre ou à plusieurs lettres conjointes ; ainsi d est équivalent à a et elles peuvent être substituées l'une à l'autre, ou bien c est équivalent au terme

23. Erreur de langage qui enfreint les règles de la syntaxe.
24. Erreur de langage qui enfreint les règles de la morphologie.

ab (par exemple *homme* est identique à *animal rationnel*). Ce postulat s'entend sous réserve qu'aucune supposition contraire n'ait été faite antérieurement.

PROPOSITIONS VRAIES PAR SOI :

(1) *a est a . L'animal est animal.*

(2) *ab est a. L'animal rationnel est animal.*

(3) *a n'est pas non-a. L'animal n'est pas non-animal.*

(4) *non-a n'est pas a. Le non-animal n'est pas animal.*

(5) *Celui qui n'est pas a est non-a. Celui qui n'est pas animal est non-animal.*

(6) *Celui qui n'est pas non-a est a. Celui qui n'est pas non-animal est animal.*

Ces propositions permettent d'en déduire plusieurs autres.

INFÉRENCES VRAIES PAR SOI :

a est b et b est c donc a est c. Dieu est sage, le sage est juste donc *Dieu est juste.* On peut continuer cette chaîne davantage, par ex. : *Dieu est sage, le sage est juste, le juste est sévère,* donc *Dieu est sévère.*

PRINCIPES DU CALCUL :

(1) Tout ce qui a été conclu au moyen de lettres quelconques indéfinies doit pouvoir être conclu au moyen de n'importe quelles autres lettres respectant les même conditions.[...]

(2) La transposition des lettres dans un même terme ne change rien [...]

(3) La répétition de la même lettre dans un même terme est inutile [...]

(4) À partir d'un nombre quelconque de propositions on peut en former une seule en additionnant tous les sujets en un seul sujet et tous les prédicats en un seul prédicat ; *a est b, c est d* et *e est f* donne *ace* est *bdf* [...]

(5) À partir de n'importe quelle proposition dont le prédicat est composé de plusieurs termes on peut former plusieurs propositions qui ont toutes le même sujet que la proposition de départ mais qui ne conservent qu'une partie du prédicat ; *a est bcd* donc *a est b, a est c* et *a est d* [...]

Si *a est b* et *b est a*, alors *a* et *b* sont dits identiques [...]

On démontre facilement à partir de cette proposition que deux identiques peuvent partout se substituer l'un à l'autre *salva veritate* (Leibniz, 1998, pp. 96-97)

1.2.3 Synthèse pour le XVII^e^ siècle

Nous avons étudié deux systèmes logiques du XVII^e^ siècle, tous deux dans la continuité des développements au Moyen-Âge de la logique aristotélicienne. Nous y retrouvons deux positions courantes par rapport au formalisme : pour Descartes et les auteurs de la logique de Port-Royal, il ne sert à rien dans la découverte des vérités et en attachant trop d'importance à la forme, on se coupe du sens ; pour Leibniz il permet d'atteindre des vérités en permettant à l'esprit de se reposer sur la sécurité du calcul et d'être en prise directe avec les pensées sans l'intermédiaire des mots parfois ambigus. Ces deux positions se retrouvent en tension l'une par rapport à l'autre dans l'enseignement, par exemple dans l'enseignement de l'algèbre. D'une part la compétence algébrique ne se limite pas à savoir manipuler formellement les expressions, mais suppose également de savoir mettre en œuvre ces manipulations dans la résolution d'un problème. Mais d'autre part, une aisance dans la manipulation formelle des expressions nous amène à percevoir son intérêt lors d'une telle résolution.

Je rappelle les principaux traits de ces systèmes à retenir pour mon étude :

1. en ce qui concerne le travail sur le langage, en plus de ce qui était déjà présent dans les systèmes de l'Antiquité grecque :
   – la logique de Port-Royal propose une analyse très fine de diverses formulations du langage courant. On y retrouve les quatre types de propositions d'Aristote, mais aussi la notion de propositions composées des Stoïciens, et la notion de propositions « composées au niveau du sens », qui disent en fait deux choses (par exemple, « excepté le sage, tous les hommes sont vraiment fous » dit d'une part que le sage n'est pas fou, d'autre part que tous les hommes qui ne sont pas le sage sont fous). La logique est alors un outil pour dégager les structures fondamentales des diverses formes du discours.
   – Pour Leibniz, les ambiguïtés du langage ordinaire empêchent d'être sûr de la validité des raisonnements exprimés dans ce langage. Suivant l'exemple du symbolisme algébrique qui permet de raisonner sur les nombres à l'aide de calculs sur des signes, il voudrait établir un système de signes directement reliés aux pensées sans passer par les mots, et des règles de manipulation de ces signes permettant de réduire le raisonnement à un calcul. Il ébauche alors un processus d'« algébrisation » des propositions. Il désigne les concepts par des lettres minuscules, qui peuvent éventuellement être concaténées pour signifier l'attribution d'un qualificatif à un concept (si a désigne *homme*, b désigne *rationnel*, ab désigne *homme rationnel*). Cependant, un attachement à la forme attributive de la proposition (*Sujet* est *Prédicat*) l'empêche de mener à bout cette mathématisation, ce que fera G. Boole quelques siècles plus tard. Les lettres qu'il utilise ont vocation à être remplacées par des concepts ou par une autre lettre. Il donne par ailleurs des règles syntaxiques de manipulations de ces lettres (par exemple, la répétition de la même lettre dans un même terme est inutile).

2. Sur le niveau de formalisation du langage et des raisonnements :
   – les auteurs de la logique de Port-Royal n'utilisent des lettres que pour désigner les quatre types de propositions. Aucun schéma de raisonnement n'est donné,

tous les syllogismes sont illustrés par des exemples dans lesquels interviennent des propositions concrètes. Ils affirment ainsi leur position anti-formaliste.
– Pour Leibniz au contraire la formalisation est la seule possibilité pour pouvoir garantir l'infaillibilité du raisonnement. Son œuvre est importante plus par la possibilité qu'il a entrevue d'une telle formalisation que par sa réalisation qui n'est pas vraiment aboutie.

Les idées et les tentatives de Leibniz ne sont pas vraiment reprises ni développées dans les années qui suivent. Quant à la logique aristotélicienne, la logique de Port-Royal en représente presque un aboutissement. Deux directions vont ensuite être prises : continuer à chercher une manière de présenter la logique classique qui permette un traitement de plus en plus mathématique, c'est notamment la voie que va suivre G. Boole, et continuer à chercher un système de signes permettant l'expression des propositions et des raisonnements, avec un nombre de règles de traitement de ces signes limité permettant d'assurer le contrôle de la validité, ce que va faire G. Frege.

1.3 La naissance de la logique mathématique : Boole et Frege

Dans la lignée des idées des algébristes anglais de son époque (réunis autour de C. Babbage et G. Peacock), George Boole (philosophe et mathématicien britannique, 1815-1864) veut mettre en place une algèbre nouvelle dans le cadre de la logique, c'est-à-dire exprimer la logique classique avec le symbolisme algébrique. Ses travaux se situent en cela dans la continuité des essais de Leibniz.

Gottlob Frege (philosophe et mathématicien allemand, 1848-1925) est traditionnellement considéré comme le père de la logique mathématique actuelle avec son œuvre *Begriffsschrift* (Idéographie). D'autres logiciens (B. Russell, G. Peano, K. Gödel, E. Zermelo, A. Fraenkel, A. Turing...) joueront bien sûr un rôle important dans le développement de cette nouvelle discipline qui traite le langage et les raisonnements comme des objets mathématiques.

Le but de l'œuvre logique de Frege est différent de ce que nous avons déjà pu rencontrer. En effet, ce sont essentiellement les besoins des mathématiques qui l'amènent à développer son système, qu'il n'érige pas en théorie générale du raisonnement. Il veut, en mathématiques, assurer la sécurité du raisonnement et estime que les ambiguïtés du langage ordinaire le rendent inadéquat pour ce but, car il ne peut empêcher que quoi que ce soit d'intuitif ne s'insère de manière inaperçue. Il faut alors constituer un système de signes pour le raisonnement mathématique dont « le premier objectif est donc de nous fournir le critère le plus sûr de la validité d'une chaîne d'inférences et de nous permettre de remonter jusqu'à la source de tout ce qui y restait implicite » (G. Frege, cité dans Blanché, 1970,

p. 311). Ici le formalisme garantit la rigueur et la rigueur en mathématiques doit être absolue. Il n'est plus seulement question dans son système logique de décrire le langage mais bien de fournir un langage.

Boole et de Frege ne visent pas le même but lorsqu'ils élaborent leurs systèmes respectifs. Frege s'en explique dans *Sur le but de l'idéographie* :

> Mais le reproche qui m'est adressé ignore que mon but fut autre que celui de Boole. Je n'ai pas voulu donner en formules une logique abstraite, mais donner l'expression d'un contenu au moyen de signes écrits, et d'une manière plus précise et plus claire au regard que cela n'est possible au moyen des mots. (Frege, 1971, pp. 70-71)

1.3.1 *Les lois de la pensée* de George Boole

Des extraits de Les lois de la pensée se trouvent en annexe D, page 487.

G. Boole expose pour la première fois en 1847 son approche algébrique de la logique dans un petit essai intitulé *Analyse mathématique de la logique.* Mais cet ouvrage suit encore l'ordre traditionnel d'exposition de la logique classique, aristotélicienne. Puis dans *Les lois de la pensée*, publié en 1854, il inverse l'ordre de présentation en établissant « d'emblée une "théorie générale du raisonnement déductif" sur des principes fondamentaux, mathématiques dans leur forme, et dont Boole estime qu'ils constituent les lois mêmes du langage et de l'entendement humains. » (Souleymane Bachir Diane, dans l'introduction à Boole, 1992, p. 14), et en montrant ensuite la puissance de ce système en procédant à un examen de la logique classique à la lumière de celui-ci.

De même que Leibniz développe son système au moment où l'apparition des symboles fait faire de grands progrès à l'algèbre, Boole développe le sien en même temps que ses contemporains algébristes anglais fondent l'« algèbre symbolique », où l'on se contente de calculer sur les signes, sans tenir compte de leur signification qui peut varier dans diverses interprétations. Leur démarche s'appuie sur une relation forte entre travail heuristique et explicitation formelle en algèbre, qu'illustre par exemple le « principe des formes équivalentes » de Peacock :

> (A) : N'importe quelle forme qui est algébriquement équivalente à une autre lorsqu'elle est exprimée en symboles généraux continue à être équivalente quel que soit ce que ces symboles désignent.
>
> (B) : Proposition réciproque : Toute forme équivalente qui est mise en évidence dans l'algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente lorsque les symboles sont généraux dans leur nature ainsi que dans leur forme. (Peacock, *A report*

on a recent progress and actual state of certain branches of analysis, 1833, p. 194, cité dans Le Mignot, 2011, pp. 3-4)

Le propos de Peacock montre que l'articulation entre la syntaxe et la sémantique reste au coeur du travail mathématique. Mais le but de Boole dépasse le cadre des mathématiques, ainsi qu'il l'expose dès le début de *Les lois de la pensée* (d'autres extraits du premier chapitre *Nature et but de l'ouvrage* se trouvent en annexe page 489) :

> Le but de ce traité est d'étudier les lois fondamentales de l'esprit par lesquelles s'effectue le raisonnement ; de les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode ; de faire de cette méthode elle-même la base d'une méthode générale que l'on puisse appliquer à la théorie mathématique des Probabilités ; et enfin, de dégager des différents éléments de vérité qui seront apparus au cours de ces enquêtes, des conjectures probables concernant la nature et la constitution de l'esprit humain. (Boole, 1992, p. 21)

Ainsi, G. Boole constitue une logique qui s'applique à un domaine plus large que les mathématiques. En cela il est dans la continuité de la logique aristotélicienne, et revendique fortement le caractère mathématique de son approche. Il propose une entreprise nouvelle que nous pourrions qualifier de « mathématisation de la logique », qu'il base sur la proposition suivante :

> Proposition I
>
> Toutes les opérations du langage en tant qu'instrument du raisonnement se peuvent conduire dans un système de signes composé des éléments suivants :
>
> (1) Des symboles littéraux tels que x, y, etc. représentant les choses en tant qu'objets de nos conceptions.
>
> (2) Des signes d'opération tels que $+, -$, $\times$, qui traduisent les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou séparées de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments.
>
> (3) Le signe d'identité $=$.
>
> et ces symboles logiques voient leur usage soumis à des lois déterminées, qui en partie s'accordent et en partie ne s'accordent pas avec les lois des symboles correspondants dans la science de l'algèbre. (Boole, 1992, p. 45)

(a) Sur les propositions Dans le système de Boole, le remplacement de la copule « est » par le signe d'égalité est une nouveauté qui induit une symétrie entre sujet et prédicat [25]. Ainsi, plutôt que d'opérer sur les concepts comme le faisait Leibniz, Boole

25. Quelques années avant Boole, certains logiciens avaient introduit la quantification du prédicat, classant alors les propositions en huit catégories et non plus quatre, ce qui avait eu pour effet d'introduire plus de symétrie entre sujet et prédicat et de ramener la proposition à une équation. Cela simplifie les règles de conversion, mais complique la syllogistique.

opère sur les classes qui sont les extensions de ces concepts : la proposition « tous les hommes sont mortels » n'est plus vue comme l'attribution du concept *mortel* au concept *homme* pris universellement, mais comme l'inclusion de la classe *homme* dans la classe *mortel*, ou plutôt l'égalité entre la classe *homme* et une partie de la classe *mortel*.

Dans le langage courant, les *choses* évoquées dans la proposition I (voir ci-dessus), les opérations mentales sur ces choses, les relations entre ces choses sont exprimées par des mots. Boole propose d'y substituer des signes algébriques répondant à certaines lois correspondant à des caractéristiques évidentes de ce que représentent ces mots. Ainsi (voir également en annexe page 490) :

– les lettres de l'alphabet représentent des classes d'individus. Par exemple x représente la classe des moutons, y représente la classe des choses blanches ;
– la concaténation, ou le symbole de multiplication, représente le fait d'appliquer plusieurs caractérisations, par exemple xy représente la classe des moutons blancs et on a bien sûr $xy = yx$. Une autre loi fondamentale est $x^2 = x$ (on retrouve une règle leibnitzienne : la répétition d'une même lettre est inutile. En comparant les deux formulations de ce même principe, on voit le pas franchi par Boole : introduire de véritables opérations sur les lettres).
– l'addition est interprétée par la réunion d'éléments disjoints, la soustraction comme la différence ensembliste et on a, entre autres, les lois $x + y = y + x$, $z(x + y) = zx + zy$.

Boole associe les deux conjonctions « et », « ou » du langage courant au signe $+$, ayant noté qu'elles sont employées l'une et l'autre pour signifier la réunion : le « et » est employé quand il s'agit de réunir les éléments d'une classe, le « ou » est employé quand il s'agit de réunir les caractérisations (dualité que nous voyons quand nous disons d'une part que dans $A \cup B$ il y a les éléments de A et les éléments de B, d'autre part qu'appartenir à $A \cup B$ est équivalent à appartenir à A ou à B). Il fait pour ce signe $+$ le choix du « ou » exclusif, ou plutôt de ne donner du sens à l'expression $x + y$ que quand les classes x et y sont disjointes. Il donne cependant plus loin l'expression du « ou » inclusif :

> A mon avis, prises dans leur sens le plus rigoureux, les conjonctions « et » et « ou » ont réellement le pouvoir de séparation ou d'exclusion en question ; l'expression « Tous les x's sont ou y's ou z's », rigoureusement interprétée, signifie « Tous les x's sont soit y's mais pas z's, soit z's mais pas y's ». Mais on doit, en même temps, admettre que le *jus et norma loquendi* semble plutôt pencher en faveur de l'interprétation contraire. L'expression « y's ou z's » est généralement comprise comme incluant les choses qui sont y's et z's en même temps, ainsi que celles qui ont l'une des propriétés mais pas l'autre. Si l'on se souvient cependant que le symbole $+$ possède véritablement le pouvoir de séparation dont nous avons discuté, on devra diviser tout énoncé disjonctif qui pourrait se représenter en des parties réellement séparées dans l'esprit, puis réunir leurs expressions respectives par le symbole $+$.

> Ainsi, conformément à la signification supposée, l'expression « les choses qui sont ou des x's ou des y's » aura deux équivalents symboliques. Si nous voulons dire « les choses qui sont des x's mais pas des y's, ou des y's mais pas des x's », nous aurons l'expression
>
> $$x(1-y)+y(1-x)\,;$$
>
> le symbole x représentant les x's et y les y's. Si, en revanche, nous voulons dire « les choses qui sont, soit des x's, soit, sinon, des y's », nous aurons l'expression
>
> $$x+y(1-x).$$
>
> Cette expression suppose que puisse être admise l'existence de choses qui sont des x's et des y's en même temps. On pourrait la traduire plus complètement sous la forme
>
> $$xy+x(1-y)+y(1-x)\,;$$
>
> mais cette expression, une fois additionnés ses deux premiers termes, ne fait que reproduire la précédente. (Boole, 1992, pp. 70-71)

Une autre innovation importante de Boole est l'introduction de la classe vide et de la classe universelle. Les seuls symboles numériques qui satisfont l'équation $x^2 = x$ sont 0 et 1. Boole cherche alors la signification logique de ces symboles et pour que soient respectées les lois formelles $0y = 0$ et $1y = y$, il les interprète respectivement par la classe « Rien » et « l'Univers ». S'en suit la proposition suivante :

Proposition III

> *Si x représente une classe quelconque de choses, alors $1-x$ représente la classe contraire ou complémentaire, c'est-à-dire la classe qui contient toutes les choses qui ne sont pas contenues dans la classe x.* (Boole, 1992, p. 64)

Une fois établi ce nouveau système de signes, avec lesquels on a pu exprimer les propositions « élémentaires » de la logique classique, Boole montre comment utiliser son système pour exprimer les propositions complexes et pour en dégager une « méthode générale d'analyse déductive ». Il divise pour cela les propositions en deux catégories : les « Propositions Primaires » ou « Concrètes », qui expriment une relation entre des *choses*, et les « Propositions Secondaires » ou « Abstraites », qui expriment une relation entre *propositions*.

Il donne la règle suivante pour l'expression des propositions primaires :

RÈGLE GÉNÉRALE POUR L'EXPRESSION SYMBOLIQUE DES PROPOSITIONS PRIMAIRES

1°) Si la proposition est affirmative, former l'expression du sujet et du prédicat. Si l'un d'eux est particulier, lui préfixer le symbole indéfini v, et égaler les expressions ainsi obtenues.

2°) Si la proposition est négative, exprimer d'abord sa signification véritable en préfixant la particule de négation au prédicat, puis procéder comme dans le cas précédent.

Un ou deux exemples supplémentaires constitueront une illustration suffisante.

EX : « Aucun homme n'est dans une situation élevée sans être l'objet de regards envieux ».

Soit y qui représente « hommes », x « être dans une situation élevée », z « ne pas être l'objet de regards envieux ». L'expression de la classe définie comme « être dans une situation élevée » et « ne pas être l'objet de regards envieux » est xz [26]. Donc la classe contraire, c'est-à-dire celle qui ne correspond pas à cette description, sera représentée par $1 - xz$ [27], et c'est à cette classe que tous les hommes sont rapportés. Nous avons donc [28]

$$y = v(1 - xz)$$

Si la proposition ainsi traduite avait été mise sous la forme équivalente « les hommes dans une situation élevée sont l'objet de regards envieux », son expression eût été la suivante :

$$yx = v(1 - z)$$

L'on verra plus tard que cette expression est réellement équivalente à la précédente, avec l'hypothèse particulière que v est un symbole de classe indéfinie. (Boole, 1992, pp. 77-78)

Dans une perspective didactique, il y a une différence essentielle entre les deux exemples de « traduction » donnés par Boole. En effet, dans le premier cas, la formulation du langage courant est une formulation complexe, dont la structure logique n'est pas congruente avec la formulation symbolique, le travail de formalisation ne peut ainsi pas se faire en appliquant des procédures mécaniques. Dans le deuxième cas, il y a congruence. Par ailleurs, Boole suggère que la vérification de l'équivalence entre ces deux formulations se fera facilement par un calcul sur les expressions symboliques, la symbolisation apportant alors un éclaircissement de ce qui se passe dans le langage courant. Mais l'on peut supposer que celui qui est capable de produire l'expression symbolique correspondant au premier

26. xz représente alors « être dans une situation élevée sans être l'objet de regards envieux ».
27. Boole applique ici la deuxième règle, puisque nous sommes dans le cas d'une proposition négative.
28. Boole applique ensuite la première règle, ici le prédicat est particulier, « aucun x n'est y » étant entendu comme « tous les x sont quelques non$y$ ».

énoncé, qui est particulièrement complexe, est également capable de voir qu'il est équivalent au deuxième énoncé, sans passer par la symbolisation. C'est la délicate question de la participation de la formalisation à la compréhension qui est posée ici.

(b) Sur les raisonnements Boole continue ensuite en exposant les manipulations symboliques possibles à l'intérieur de son système formel. Ce sont ces manipulations qui tiennent lieu de raisonnement et Boole rappelle à quelles conditions ces manipulations peuvent correspondre à un raisonnement valide :

> Les conditions d'un raisonnement valide, mené au moyen de symboles, sont les suivantes :
>
> 1°) Qu'une interprétation fixée soit assignée aux symboles employés pour exprimer les données ; et que les lois de combinaison de ces symboles soient correctement déterminées à partir de cette interprétation.
>
> 2°) Que les procédures formelles de résolution ou de démonstration soient constamment menées en conformité avec les lois ainsi déterminées, sans tenir compte de la question de l'interprétabilité des résultats partiels obtenus.
>
> 3°) Que le résultat final soit formellement interprétable et qu'il soit effectivement interprété conformément au système d'interprétation employé dans l'expression des données. (Boole, 1992, p. 82)

Dans une conférence au Collège de France, *Ainsi naissent et meurent les langages formels*, A. Moktefi représente l'application du système de Boole par le schéma suivant :

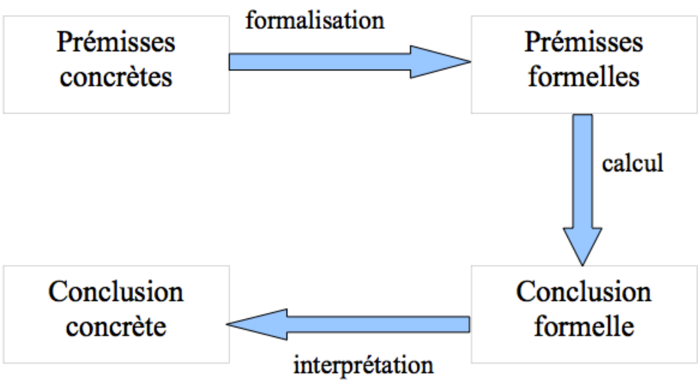


FIGURE 1.4 – Fonctionnement du système logique de G. Boole

Nous retrouvons ici l'importance de la dialectique entre syntaxe et sémantique, entre le travail dans le système formel et l'interprétation des signes. Le formalisme sert à garantir la validité, à « alléger » le raisonnement en le réduisant à un calcul, mais les règles sont bien fondées sur le sens de certaines procédures mentales effectives de raisonnement. Ainsi il n'y a pas de supériorité de l'intuition sur le formalisme, comme pouvaient le défendre

Descartes ou les auteurs de la logique de Port-Royal, ni du formalisme sur l'intuition, mais un formalisme fécond élaboré à partir de l'intuition.

Ce parti pris sur le formalisme sera aussi celui de G. Frege, mais celui-ci se distingue nettement de Boole en dégageant la logique de ses préoccupations métaphysiques. Boole voulait montrer que les lois de la pensée pouvaient être exprimées dans un langage utilisant des symboles algébriques, rendant possible un traitement mathématique des raisonnements, Frege veut fournir un langage symbolique aux mathématiques.

1.3.2 Gottlob Frege et la logistique

Des extraits de l'Idéographie se trouvent en annexe E, page 501.

Dans l'algébrisation de la logique, telle que la présente notamment Boole, la mathématique est l'auxiliaire de la logique. À l'inverse, dans la logistique qui naît à la fin du XIX^e, la logique est l'auxiliaire indispensable au problème de fondement des mathématiques. Il faut pour cela une logique plus adaptée aux mathématiques que la logique des classes, aussi élaborée que soit celle de Boole. Il faut une logique des relations, qui commence à être développée dans les travaux de C. Peirce, ainsi que l'explique L. Couturat dans la conclusion de son ouvrage *L'Algèbre de la Logique* dans lequel il présente la logique booléenne :

> La Logique doit étudier bien d'autres espèces de concepts que les concepts génériques (concepts de classes) et bien d'autres relations que la relation d'inclusion (de subsomption) entre de tels concepts. Elle doit, en un mot, se développer en une logique des relations, que Leibniz a prévue, que Peirce et Schröder ont fondée, et que MM. Peano et Russell paraissent avoir établie sur des bases définitives. Or, tandis que la Logique classique et l'Algèbre de la Logique ne sont presque d'aucune utilité aux Mathématiques, celles-ci trouvent au contraire dans la logique des relations leurs concepts et leurs principes fondamentaux [...] On peut donc dire que l'Algèbre de la Logique est une Logique *mathématique*, par sa forme et par sa méthode ; mais il ne faut pas la prendre pour la Logique *des Mathématiques*. (Couturat, 1905, p. 95)

Ce commentaire est très intéressant à lire d'un point de vue didactique : les sytèmes logiques d'Aristote, des Stoïciens, de Port-Royal, de Leibniz et de Boole peuvent être étudiés dans le cours de mathématiques en tant que systèmes, pour pratiquer le raisonnement et s'astreindre à le formuler dans un certain langage (pour le système d'Aristote par exemple, on peut utiliser les formulations en langage courant « Tous les A sont B », ou le langage ensembliste, « $A \subset B$ », ou le langage des prédicats unaires, « $\forall x \quad A[x] \Rightarrow B[x]$ »), mais ils ne nous sont que de peu d'utilité pour comprendre ce qui se passe dans l'activité mathématique telle qu'elle se pratique, et notamment s'exprime, aujourd'hui.

G. Frege va proposer une nouvelle logique dans le but d'assurer une parfaite rigueur en mathématiques. Il expose ainsi ses motivations dans l'introduction de l'*Idéographie* (*Begriffsschrift*), publiée en 1879, ouvrage capital dans l'histoire de la logique :

> Ainsi, nous divisons toutes les vérités ayant besoin d'une justification en deux sortes selon que la preuve, pour les unes, peut avancer par la logique pure ou, pour les autres, doit s'appuyer sur des faits d'expérience. [...] Alors que je me demandais à laquelle de ces deux sortes de vérités les jugements arithmétiques appartenaient, je devais d'abord chercher jusqu'où l'on pourrait aller dans l'arithmétique grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toutes les particularités. À partir de là, ma démarche était de chercher d'abord à réduire le concept de succession dans une suite à la conséquence *logique*, puis à progresser vers le concept de nombre. Pour que, ce faisant, quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire de façon inaperçue, tout devait dépendre de l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Tandis que je visais à satisfaire cette exigence le plus rigoureusement, je trouvais un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa attendre l'exactitude que mon but exigeait. De ce besoin résultat l'idée de l'idéographie dont il est question ici. Elle doit ainsi d'abord servir à examiner de la manière la plus sûre la force concluante d'une chaîne de déductions et à dénoncer chaque hypothèse qui veut s'insinuer de façon inaperçue, afin que finalement sa provenance puisse en être recherchée. (Frege, 1999, p. 6)

Frege n'est pas cité dans le commentaire de Couturat car ses travaux n'ont pas eu, à l'époque de leur publication, l'accueil qu'il espérait. Pour J. Largeault, « à la fin du XIXe siècle l'indifférence des mathématiciens à l'égard de l'invention d'une idéographie s'explique donc par le fait qu'on ne ressentait pas d'urgence à remplacer partout l'intuition par le calcul », et « plus tard, lorsque la formalisation c'est-à-dire l'utilisation d'une idéographie sera reconnue comme la base de toute discussion ou comme une condition nécessaire dans tout travail sur les fondements, on disposera d'un traité plus commode et plus complet que les *Grundgesetze*, grâce à Whitehead et à Russel . » (Largeault, 1970, p. 4)

Frege est tout de même aujourd'hui reconnu comme précurseur de la logique mathématique contemporaine et nous allons voir maintenant quels ont été ses apports majeurs dans ce domaine. Il a notamment fourni les éléments de base du langage des prédicats moderne.

(a) Sur les propositions

Contenu et jugement Frege distingue entre le contenu conceptuel d'une proposition et le jugement de ce contenu (Frege, 1971, pp. 74-75) :

Devant l'expression d'un contenu de jugement, tel $2 + 3 = 5$, je place un trait horizontal, le signe de contenu, qui se distingue du signe moins par sa plus grande longueur :

$$—\!\!— \; 2 + 3 = 5$$

Ce trait indique que je conçois le contenu qui lui fait suite comme une unité, en sorte qu'on puisse l'associer à d'autres signes. En écrivant

$$—\!\!— \; 2 + 3 = 5$$

on ne porte aucun jugement; aussi peut-on, sans atteinte à la vérité, écrire

$$—\!\!— \; 4 + 2 = 7.$$

Si je veux affirmer la justesse d'un contenu, je place à l'extrémité gauche du trait de contenu le trait de jugement :

$$\vdash\!\!— \; 2 + 3 = 5.$$

FIGURE 1.5 – Signes du contenu et du jugement dans l'Idéographie

De la même manière, il distingue entre la négation d'une proposition et le jugement de la fausseté de cette proposition, qui consiste à affirmer sa négation.

Pour exprimer la négation d'un contenu, j'ajoute au trait de contenu le trait de négation. Par exemple :

$$—\!\!\top\!\!— \; 4 + 2 = 7.$$

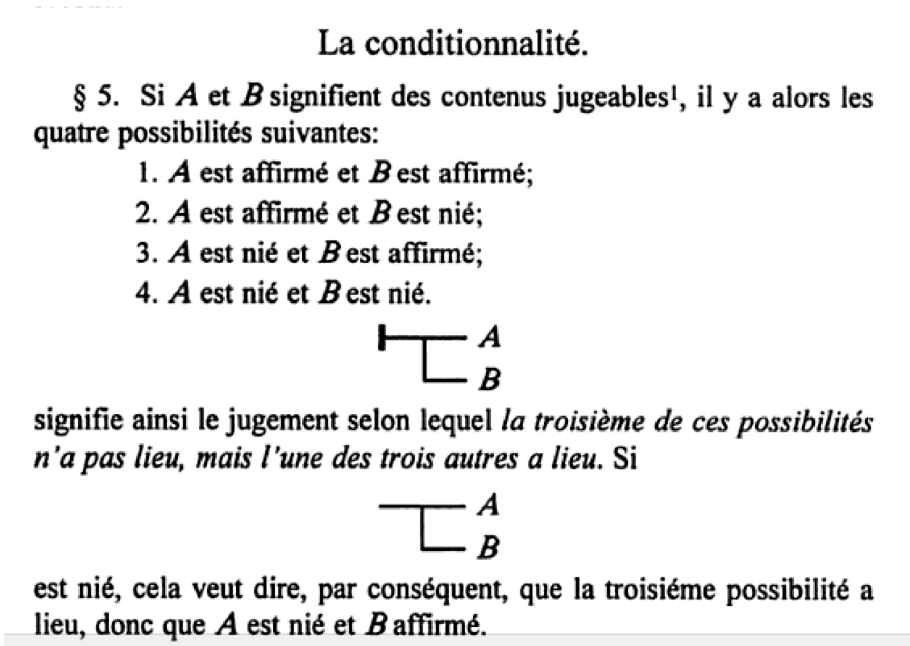
Ce n'est pas encore affirmer que cette équation est fausse. On a simplement représenté un nouveau contenu de jugement qui, après l'adjonction du trait de jugement

$$\vdash\!\!\top\!\!— \; 4 + 2 + = 7,$$

devient le jugement « 4 + 2 n'est pas égal à 7 ».

FIGURE 1.6 – Signe de la négation dans l'Idéographie

L'implication au coeur de la logique propositionnelle Frege introduit ensuite un signe de relation fondamentale entre deux propositions et définit ainsi la proposition $B \Rightarrow A$ (Frege, 1999, p. 19) :



La conditionnalité.

§ 5. Si *A* et *B* signifient des contenus jugeables[1], il y a alors les quatre possibilités suivantes:

1. *A* est affirmé et *B* est affirmé;
2. *A* est affirmé et *B* est nié;
3. *A* est nié et *B* est affirmé;
4. *A* est nié et *B* est nié.

A
B

signifie ainsi le jugement selon lequel *la troisième de ces possibilités n'a pas lieu, mais l'une des trois autres a lieu.* Si

A
B

est nié, cela veut dire, par conséquent, que la troisiéme possibilité a lieu, donc que *A* est nié et *B* affirmé.

FIGURE 1.7 – Signe pour l'implication dans l'Idéographie

Il justifie le choix de ce signe comme signe central : ainsi, dans le cas où A est la proposition $x^2 = 4$ et B la proposition $x + 2 = 4$:

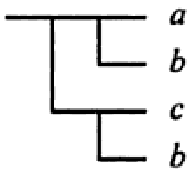
> on peut le traduire : si $x + 2 = 4$ alors $x^2 = 4$. Cette traduction fait voir l'importance de la relation contenue dans notre signe. Car le jugement hypothétique est la forme commune à toutes les lois de la nature, la forme de tous les rapports de causalité. (Frege, 1971, p. 75)

Mais il précise bien que ce signe ne correspond pas toujours à la relation traduite par l'expression « si ... alors ... » : ainsi, dans le cas où A est la proposition $2^2 = 4$ et B la proposition $2 + 2 = 4$:

> à vrai dire, la langue commune ne permet pas qu'on traduise ce signe dans tous les cas par « si ». Elle l'admet dans le seul cas où une partie du contenu, ici x, est indéterminée et donne à l'ensemble un caractère de généralité. Si on substitue 2 à x, [ce jugement] ne peut être traduit de manière satisfaisante par « si 2+2=4 alors $2^2 = 4$. » (Frege, 1971, p. 76)

Frege refuse ici d'utiliser « si ... alors ... » pour exprimer le connecteur IMPLIQUE entre deux propositions qui ne comportent pas de variables. Il distingue ainsi, sans utiliser cette terminologie, entre l'implication entre des propositions closes, qui est soit vraie, soit fausse, selon les valeurs de vérités de la prémisse et de la conclusion et l'implication entre des propositions qui contiennent des variables libres, dont on peut se demander si elle est vraie pour toutes les valeurs d'un certain domaine (c'est-à-dire qu'on peut se poser la question de la vérité d'une implication universellement quantifiée). Je reviendrai sur cette distinction dans la deuxième partie de la thèse (voir page 126).

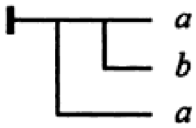
En associant le trait d'implication et le trait de négation, Frege exprime les connecteurs ET et OU. Ainsi, les contenus exprimés par Frege sont effectivement l'analogue des formules [29] du calcul propositionnel moderne, par exemple :



s'écrit dans le langage propositionnel actuel

$$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Et les premiers jugements que liste Frege correspondent à des tautologies [30], par exemple :



signifie que la formule $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ est une tautologie.

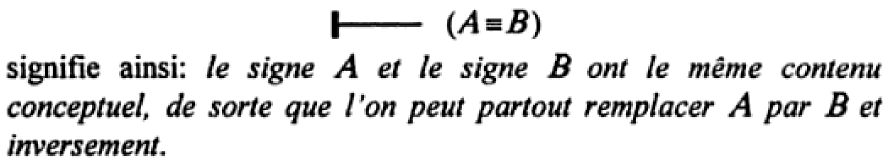
Frege lit ce graphisme de la manière suivante :

> le cas où a est nié, b est affirmé et a est affirmé est exclu.

qu'il justifie ainsi : « cela est évident, puisque a ne peut être à la fois nié et affirmé. » (Frege, 1999, p. 41)

Une nouveauté essentielle : fonction et argument Frege introduit également un signe d'identité de contenu, qu'il justifie ainsi :

> La nécessité d'un signe d'identité de contenu repose donc sur ceci : le même contenu peut être complètement déterminé de manières différentes ; mais le fait que, dans un cas particulier, la *même chose* soit effectivement donnée par *deux manières de détermination* est le contenu d'un *jugement.* [(Frege, 1999), p. 29]



$\vdash\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!$ —— $(A \equiv B)$

signifie ainsi: ***le signe A et le signe B ont le même contenu conceptuel, de sorte que l'on peut partout remplacer A par B et inversement.***

Figure 1.8 – Marque de l'identité dans l'Idéographie

Puis Frege rentre à l'intérieur de la proposition et substitue à la décomposition classique en sujet et prédicat une nouvelle décomposition en fonction et argument. Cet élargissement de la notion de fonction est une nouveauté importante tant du point de vue de l'analyse

29. On pourra trouver une définition du terme « formule » en annexe page 446
30. Propositions toujours vraies, quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui y sont présentes.

logique de la proposition que du point de vue du sens mathématique de la notion de fonction.

Les fonctions de Frege correspondent aux prédicats du langage des prédicats moderne et il les définit ainsi :

> Si, dans une expression dont le contenu n'a pas besoin d'être jugeable, un signe simple, ou composé, apparaît à une ou plusieurs places, et si nous pensons que ce signe est remplaçable à toutes ou à quelques-unes de ces places par autre chose, mais partout par la même chose, alors nous appelons la partie de l'expression se présentant invariablement, fonction et la partie remplaçable, son argument. (Frege, 1999, pp. 30-31)

Le signe de jugement marque alors l'affirmation qu'un argument possède une certaine propriété, ou que plusieurs arguments sont en relation :

On peut lire $\vdash\!\!\!-\!\!-\; \Phi(A)$
comme: «A a la propriété Φ».

$\vdash\!\!\!-\!\!-\; \Psi(A,\ B)$

peut être traduit par «B se trouve dans la relation Ψ à A» ou «B est le résultat de l'application de la procédure Ψ à l'objet A».

FIGURE 1.9 – Marques pour fonction et argument dans l'Idéographie

Le quantificateur universel Cette expression du contenu en termes de fonction et d'argument permet l'introduction d'un autre élément essentiel du langage mathématique : les quantificateurs. En fait, Frege n'en utilise qu'un, le quantificateur universel :

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\; \Phi(\mathfrak{a})$$

FIGURE 1.10 – Marque du quantificateur universel dans l'Idéographie

Mais à l'aide du signe de négation, il exprime le quantificateur existentiel et donne ainsi, dans son idéographie, le carré des oppositions issu de la logique d'Aristote (voir page 48) [31] :

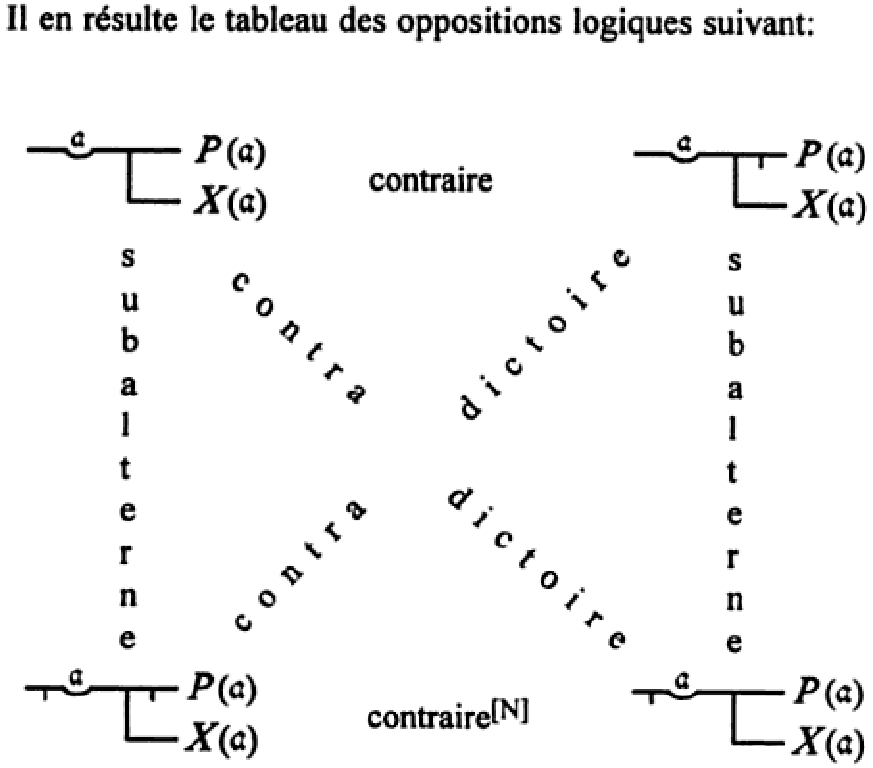


FIGURE 1.11 – Carré des oppositions dans l'Idéographie

Les variables Frege s'abstient d'employer le mot « variable », en raison de l'idée de variation qui lui est fortement associée. Aristote déjà avait bien employé des variables en logique, c'est-à-dire des lettres permettant de montrer que ce qu'on dit est vrai indépendamment des objets particuliers que l'on peut leur substituer. Frege poursuit cette utilisation, mais se refuse à en donner une définition comme tentera de le faire Russell. J. Largeault résume ainsi cette critique de Frege sur la notion de variable :

> (1˚) D'abord une conclusion négative : qu'en mathématiques comme en logique une variable n'a pas pour rôle d'être ou de désigner une quantité qui varie.
>
> (2˚) Du point de vue de la syntaxe les variables sont simplement des lettres à l'emploi desquelles président certaines règles.
>
> Il en résulte qu'on ne devrait pas dire « la lettre x *désigne* une variable », mais « la lettre x *est* une variable ». Une variable est une lettre et non pas une entité hors d'atteinte qui se cacherait derrière cette lettre. Le

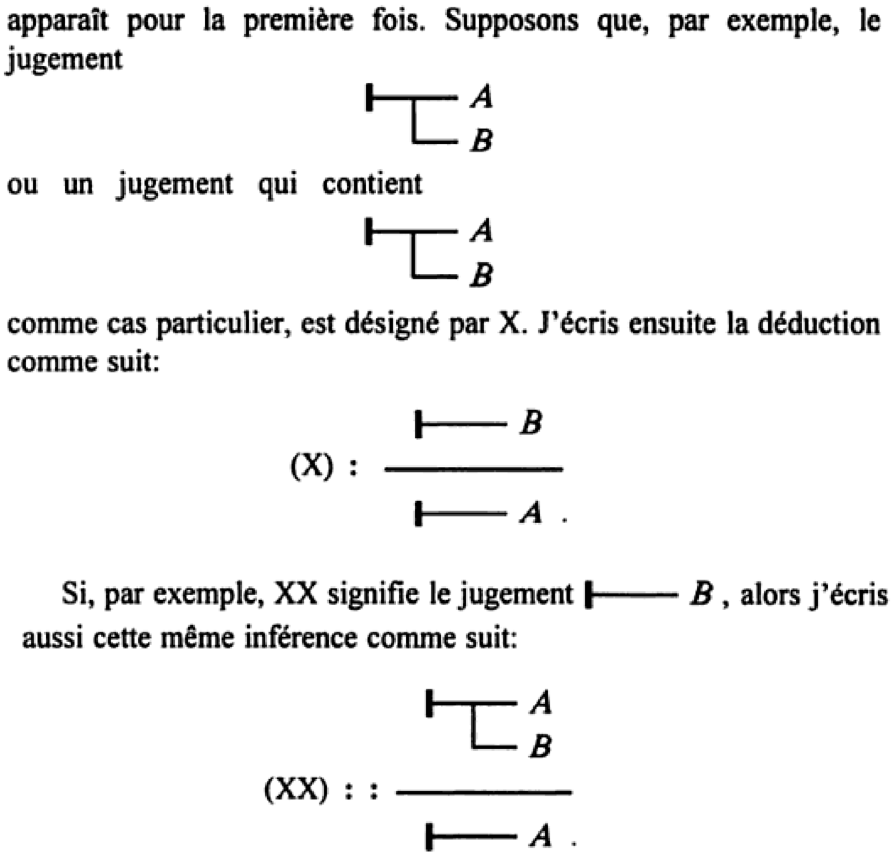
31. Je propose page 141 une version de ce carré où les formules sont exprimées dans le langage des prédicats actuel.

fait que lorsqu'on transforme une formule en opérant selon les règles, ces transformations portent sur les signes et sur les lettres elles-mêmes, suffirait déjà à le montrer.

(3°) C'est du point de vue sémantique qu'on peut dire qu'une variable « prend des valeurs ». Ces valeurs seront des entités extraites du domaine du modèle qui correspond à la catégorie de cette variable, selon qu'elle est une variable d'individu, de prédicat I-aire, de relation, etc. Alors la variable, selon qu'elle est libre ou liée, est remplacée par un nom (une constante) qui dénote une entité particulière d'un domaine, ou bien parcourt des valeurs prises dans un domaine. Il semblerait absurde de prétendre que Frege a établi le sens mathématique et logique de la notion de variable puisqu'il s'est toujours refusé à se servir de ce mot. Procédant en quelque sorte *a contrario* en montrant ce qu'une variable n'est pas, il a pourtant dégagé clairement le sens qu'il faut donner à ce terme pour que son emploi soit admissible en logique et en mathématiques. (Largeault, 1970, pp. 109-110)

Ainsi, s'il ne définit pas la notion de variable, Frege en use comme nous le faisons actuellement en logique et en mathématiques. Il utilise des lettres majuscules pour les contenus jugeables (les propositions), des lettres majuscules ou minuscules pour les arguments des fonctions, et des lettres gothiques quand les variables sont quantifiées.

(b) Sur les raisonnements Nous avons vu qu'il y avait déjà dans l'idéographie de Frege tous les éléments pour l'expression des formules du calcul des prédicats. Voyons maintenant comment il exprime les déductions. En fait, Frege présente ses démonstrations comme des successions de jugements déduits les uns des autres en appliquant la substitution et la règle du *modus ponens* (B se déduit de A et de $A \Rightarrow B$). Pour pouvoir présenter ses démonstrations comme un enchaînement vertical de propositions, il utilise deux symboles pour noter une inférence associée à cette règle, selon que l'on part de la prémisse ou de l'implication (figure ci-après).



apparaît pour la première fois. Supposons que, par exemple, le jugement

ou un jugement qui contient

comme cas particulier, est désigné par X. J'écris ensuite la déduction comme suit:

$$(X) : \frac{\vdash B}{\vdash A} .$$

Si, par exemple, XX signifie le jugement $\vdash B$, alors j'écris aussi cette même inférence comme suit:

(XX) : :

Figure 1.12 – Marques pour les déductions dans l'Idéographie

Frege s'applique ensuite à présenter sous forme d'un système déductif 133 lois logiques qui entrent en jeu dans la déduction mathématique. Neuf d'entre elles forment un noyau à partir duquel toutes les autres peuvent être dérivées (elles sont données en annexe page 507). Ce travail fastidieux a pour but essentiel selon Frege d'expliciter les relations d'inférence entre ces différentes lois et de dégager un noyau de lois primitives dont toutes les autres peuvent être dérivées :

> Dans cette partie, quelques jugements de la pensée pure, ceux pour lesquels cela est possible, vont être représentés en signes. Il est aisé de dériver les plus composés de ces jugements à partir des plus simples, non pas pour les rendre plus certains, ce qui serait pour la plupart inutile, mais pour mettre en évidence les relations des jugements entre eux. Ce n'est manifestement pas la même chose que de connaître simplement les lois ou de savoir aussi comment les unes sont données par les autres. De cette manière, on parvient à un petit nombre de lois dans lesquelles, si l'on ajoute celles qui sont contenues dans les règles, le contenu de toutes, bien que latent, est inclus. Et c'est aussi un avantage du mode de représentations par dérivation qu'il enseigne à connaître ce noyau-là. (Frege, 1999, p. 40)

1.3.3 Synthèse pour la période de la naissance de la logique mathématique

Le XIXe siècle voit se renforcer les liens entre logique et mathématiques. D'abord avec le développement de l'Algèbre de la Logique de G. Boole, qui est une approche mathématique de la logique, puis avec le développement, initié par G. Frege, de la logique en vue de répondre aux problèmes de fondements des mathématiques.

Pour ce qui est de mon étude, je rappelle les éléments suivants de ces deux systèmes étudiés, qui concernent essentiellement le langage :

– Boole propose une algébrisation de la logique. Il n'introduit pas un nouveau langage, mais traduit les propositions en utilisant des symboles algébriques existant (lettres minuscules, signes d'addition et de multiplication, 0 et 1, signe d'égalité) et s'appuie sur le raisonnement usuel pour établir des lois concernant ces symboles. Il franchit un pas important en substituant à la description de la proposition en termes de sujet et prédicat une description en termes d'égalité de classes.
– Frege au contraire propose un nouveau système de signes, une *Idéographie* spécialement conçue pour exprimer les propositions et les raisonnements mathématiques. Il introduit ainsi les éléments de la logique mathématique actuelle. Sa description de la proposition en termes de fonction et argument est un pas essentiel qui permet enfin que soient formalisées des propositions faisant intervenir des prédicats à plus d'une place. La quantification est alors un procédé qui opère sur les arguments, mais qui n'est pas nécessaire à la construction d'un contenu de jugement, ce qui permet que le système modélise aussi bien la proposition $x < y$ dans laquelle les variables x et y ne sont pas quantifiées, que la proposition $\forall y \quad x < y$ et la proposition $\exists x \, \forall y \quad x < y$, et donc que soit possible la distinction fondamentale entre proposition « ouverte » (les deux premières) et proposition « close » (la troisième, dans laquelle toutes les variables sont quantifiées) sur laquelle nous reviendrons.

À la suite de Frege, Bertrand Russell (philosophe et mathématicien britannique, 1872-1970) a beaucoup contribué à accréditer cette nouvelle logique en publiant entre 1910 et 1913, avec son collègue Alfred Whitehead, les *Principia Mathematica*. De nombreuses notions de cet ouvrage sont communes avec l'œuvre de Frege, dont Russell avait eu connaissance et dans laquelle il avait découvert une contradiction, et c'est plutôt les notations de Russell, inspirées du *Formulaire de mathématiques* de G. Peano [32], qui seront ensuite utilisées.

David Hilbert (mathématicien allemand, 1862-1943) expose au congrès international des mathématiciens de 1900 une nouvelle discipline mathématique, la théorie de la démons-

32. Le *Formulaire de mathématiques* est une œuvre dirigée par G. Peano qui vise à exprimer de façon organisée les principales théories mathématiques dans la langue symbolique introduite par Peano (le premier chapitre est intitulé « Logique Mathématique »). La publication du formulaire connut cinq éditions différentes de 1895 à 1908.

tration, avec comme but de démontrer la cohérence des mathématiques. La présentation axiomatique des mathématiques se développe et les théories mathématiques deviennent elles-mêmes objet d'étude. En 1931, avec le théorème d'incomplétude, Kurt Gödel (mathématicien autrichien, naturalisé américain, 1906-1978) montre qu'un système suffisant pour exprimer l'arithmétique ne peut pas montrer sa propre consistance, c'est-à-dire qu'il n'est pas contradictoire (on trouvera une version plus rigoureuse du théorème d'incomplétude en annexe page 453). Ceci porte un coup dur à l'idée de fonder les mathématiques sur la logique, mais n'empêche pas la logique mathématique de continuer à se développer indépendamment de prétentions fondatrices.

1.4 Synthèse de l'étude épistémologique

Nous avons pu voir dans ce chapitre l'évolution qui a mené à la constitution récente de la logique mathématique. Nous y avons rencontré différentes conceptions de ce qu'est la logique, de ses buts, de ses moyens. La logique d'Aristote, et parallèlement celle des Stoïciens, est une *théorie de l'inférence valide* (Quine, cité dans Durand-Guerrier, 2005, p. 12). À partir de certains raisonnements de base considérés comme évidents, ces auteurs donnent des méthodes permettant de justifier la validité d'autres raisonnements. Du point de vue du langage, la logique d'Aristote est traditionnellement décrite comme une logique des termes : la proposition est décomposée en sujet-copule-prédicat [33] et il distingue quatre formes de propositions, selon un critère de qualité (positive ou négative) et un critère de quantité (universelle ou particulière). De leur côté, les Stoïciens développent une logique des propositions, c'est-à-dire qu'ils décrivent les mécanismes de construction de propositions *composées* à partir de propositions *simples* à l'aide de connecteurs logiques.

Ces deux systèmes logiques continuent d'être développés dans la tradition scolastique du Moyen-âge et leur exposition est l'objet de volumineux traités. Puis la Renaissance est une période de mise en sommeil pour la logique, celle-ci étant délaissée au profit de la recherche d'une méthode. Au XVIIe siècle, Descartes critique ce traitement formel des raisonnements qui n'en assure que la cohérence et pas la vérité. C'est également dans cette période qu'est rédigée la logique de Port-Royal (1662) dans laquelle l'utilisation de nombreux exemples servant à exercer la perception est préférée à l'utilisation de schémas formels pour décrire les raisonnements. Le formalisme de la tradition scolastique est vu comme une entrave au fonctionnement de l'intuition.

À la même époque, de façon isolée, Leibniz propose un système logique dans lequel plusieurs logiciens d'aujourd'hui s'accordent à retrouver les enjeux de la logique moderne. Contrairement à Descartes, Leibniz voit dans la formalisation de la logique un moyen d'atteindre des vérités de manière indiscutablement valide. Dans le sillage de Viète et de Descartes, il apporte sa contribution aux progrès en algèbre, notamment en matière de

33. Les termes sont ce qui peut être sujet ou prédicat.

symbolisation, et a l'ambition de constituer une algèbre de la pensée. Ceci signifie une mathématisation de la logique, par la constitution d'un langage universel, *Lingua characteristica universalis*, permettant un *Calculus ratiocinator*, c'est-à-dire le remplacement des raisonnements par un calcul.

Un siècle plus tard, G. Boole propose une construction formelle qui a pour but de permettre un traitement algébrique de la pensée. En cela, il peut être vu comme l'initiateur du développement de la logique comme discipline mathématique, mais ici ce sont les mathématiques, et plus particulièrement l'algèbre, qui viennent prêter leurs méthodes à la logique. Ainsi, si la logique booléenne est bien une logique mathématique, elle n'est pas adaptée à la pratique des mathématiques, ce qui n'était d'ailleurs pas son but.

C'est par contre celui de G. Frege, qui est aujourd'hui considéré comme le père de la logique mathématique contemporaine. A travers un important travail de formalisation et de symbolisation, il propose un langage pour les mathématiques, une *Idéographie*, dont le but est de garantir l'infaillibilité des raisonnements. Les éléments constitutifs de la proposition élémentaire ne sont plus sujet-copule-prédicat mais fonction et argument. La notion de fonction correspond aux prédicats dans l'expression *Logique des prédicats* : c'est une propriété des objets de l'univers du discours. Ces prédicats peuvent comporter plusieurs arguments et c'est là une différence avec la logique d'Aristote [34] et une avancée essentielle. Frege utilise ensuite deux connecteurs : la négation et l'implication. Autre grande avancée de la logique de Frege, les arguments d'une fonction peuvent être des variables et ces variables peuvent être quantifiées. La quantification se fait à l'aide d'un quantificateur (Frege n'utilise que le quantificateur universel), qui devient, au côté des connecteurs, un autre élément permettant la construction des propositions. Muni d'un tel langage dont il montre la pertinence pour faire des mathématiques, Frege envisage de fonder les mathématiques sur la logique. Il voit dans ce travail non pas une fin mais un moyen, nécessaire pour atteindre son but d'une parfaite rigueur. Ce but est également celui poursuivi par le courant logiciste dont fait partie B. Russell, mais la découverte de paradoxes rend la tâche difficile au point de provoquer ce qu'on a appelé la « crise des fondements ». Ce début du XX^e^ siècle est aussi l'époque du courant axiomatique et du rêve de D. Hilbert d'un système axiomatique formel « universel » permettant pour tout énoncé de le démontrer ou de démontrer sa négation. Cet espoir est ruiné par le théorème d'incomplétude de K. Gödel, ce qui n'empêche pas la logique mathématique de continuer ses recherches, dégagée de cette question des fondements, comme une branche des mathématiques parmi d'autres.

Ce développement de la logique mathématique a grandement contribué à la réflexion sur le langage et le raisonnement mathématique et à la clarification de leurs principes. Cependant, les mathématiques aujourd'hui ne se pratiquent pas dans un langage symbolique, pas

34. En effet, modélisée dans la logique des prédicats moderne, la logique aristotélicienne ne fait intervenir que des prédicats à une place, ce qui est largement insuffisant pour décrire les propositions mathématiques.

plus celles des logiciens, qui ne confondent pas leur objet d'étude et la manière de l'étudier, que celles des autres mathématiciens d'ailleurs. Par contre, la logique développée depuis la fin du XIX[e] siècle se propose d'étudier la logique des mathématiques, c'est-à-dire qu'elle propose une approche mathématique, une modélisation, du métamathématique, c'est-à-dire de ce que nous faisons quand nous faisons des mathématiques. En cela, elle est une référence pour la logique dont use le mathématicien. Nous allons voir dans le chapitre suivant comment elle est également une référence pour des questions sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Chapitre 2

Étude didactique

Sommaire

Je cherche dans cette première partie de thèse à dégager des caractéristiques d'une référence pour l'enseignement de notions de logique. Dans le premier chapitre, j'ai cherché des caractéristiques épistémologiques. Mais puisque cette référence est à destination de l'enseignement, je présente dans ce deuxième chapitre une approche didactique complémentaire de l'approche épistémologique.

Les premiers travaux didactiques mentionnés défendent la thèse selon laquelle la logique de référence pour l'analyse didactique est la logique des prédicats et pas seulement la logique propositionnelle. Cette position est soutenue par l'étude épistémologique, puisque nous avons vu qu'il a fallu attendre la logique de Frege, qui est à l'origine de la logique des prédicats actuelle, pour avoir un système logique adéquat pour décrire le langage et le raisonnement mathématiques. Du côté didactique, cette position est défendue depuis longtemps, comme en témoigne le titre d'un article de J. Adda [1] publié en 1975 dans la revue Nico du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique : *L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques* (Adda, 1975). Elle est plus récemment reprise notamment par V. Durand-Guerrier depuis sa thèse *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Je présenterai la tâche du labyrinthe issue de ses travaux, qui illustre la grande importance des questions de quantification dans l'analyse des raisonnements des élèves.

J'ai ensuite choisi de sélectionner des travaux qui s'intéressent au langage dans la classe de mathématiques. L'étude épistémologique a montré que l'élaboration d'un système logique commençait par une étude du langage, voire la constitution d'un langage. Il me paraît alors important de regarder comment la logique mathématique peut contribuer à l'étude du langage dans la classe de mathématiques. C. Laborde décrit une dualité du discours mathématique dans sa thèse *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Ces deux codes interviennent à des degrés divers dans différentes formulations équivalentes d'une proposition. Le mathématicien passe ainsi beaucoup de temps à reformuler ses propos, en choisissant un degré de formalisation adapté au contexte dans lequel il parle. Pour décrire cette activité de reformulation, je me suis servie des registres de représentation sémiotique de R. Duval. Pour lui, la capacité à coordonner différents registres de représentation sémiotique est nécessaire pour une bonne pratique des mathématiques. Le parallèle entre différentes formulations et différents registres de représentation sémiotique me permet d'élargir cette idée à la capacité à reformuler une proposition. J'évoquerai enfin un article de A. Selden et J. Selden, *Unpacking the logic of mathematical statements*, qui met en lien la capacité à reformuler une proposition en mettant au jour sa structure logique et la capacité à vérifier la validité d'une preuve.

1. Josette Adda, alors maître assistante à l'Université Paris 7, est notamment l'auteure d'une thèse *Travaux sur les difficultés inhérentes aux mathématiques et sur les phénomènes d'incompréhension, causes et manifestations*, dirigée par D. Lacombe.

2.1 Pertinence de la logique des prédicats pour l'étude didactique

Dans les thèses de V. Durand-Guerrier sur l'implication, de F. Chellougui sur les quantificateurs [2] et d'I. Ben Kilani sur la négation [3], une enquête épistémologique sur la notion logique étudiée met au jour la complexité de cette notion. Ces enquêtes, centrées sur une notion, complètent l'étude épistémologique présentée dans le chapitre précédent dans laquelle j'ai choisi un point de vue plus global. Elles montrent pour chaque notion la diversité des points de vue à travers l'histoire, les difficultés auxquelles se sont heurtées les différentes approches. Les choix récents de la logique mathématique, que les auteurs exposent finalement, prennent ainsi du relief. Ils utilisent ensuite la logique des prédicats comme théorie de référence pour l'analyse de certains phénomènes didactiques.

Par exemple, I. Ben Kilani met en relation une erreur fréquente des élèves, donner comme négation d'une phrase commençant pas « tous » une phrase commençant par « aucun », avec la distinction entre *contraire* et *négation*. Il rappelle que la logique d'Aristote distinguait déjà deux types de relations d'opposition entre les propositions : la relation de contradiction (qui correspond à la notion de négation) et la relation de contrariété (qui correspond à l'idée de contraire) (voir page 34). I. Ben Kilani souligne que le langage développé par Frege « est un système ostensif qui, bien que compliqué, permet de distinguer sans équivoque, entre autres, entre la négation logique et la négation radicale (opposition par contrariété chez Aristote), en donnant littéralement *à voir* cette distinction, alors qu'elle n'est pas manifeste dans certaines langues naturelles » (Ben Kilani, 2005, p. 77). Effectivement, dans le langage des prédicats actuel, qui reprend la structure de celui proposé par Frege, on a la formalisation suivante :

1. *Tous les x sont P* correspond à la proposition $\forall x\ P[x]$;
2. *Aucun x n'est P* correspond à la proposition $\forall x$ NON $P[x]$;
3. *Quelques x ne sont pas P* correspond à la proposition $\exists x$ NON $P[x]$;

Cette formalisation donne bien à voir ce qui caractérise la relation de contrariété (entre 1 et 2) : le remplacement du prédicat $P[x]$ par sa négation, le prédicat NON $P[x]$, alors que dans la relation de contradiction (entre 1 et 3), il y a de plus le remplacement du quantificateur universel par le quantificateur existentiel.

De son côté, F. Chellougui cite notamment une étude de E. Dubinsky et O. Yiparaki, *On student understanding of AE and EA quantification* (Dubinsky & Yiparaki, 2000), dans laquelle ils ont demandé à des étudiants d'université scientifique de se pro-

2. *L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.*

3. *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.*

noncer sur la vérité ou non de onze énoncés, en justifiant brièvement leurs réponses [4]. Ces énoncés sont catégorisés par les auteurs en énoncés EA (pour les énoncés de la forme « il existe… pour tout… ») ou AE (pour les énoncés de la forme « pour tout… il existe… »). Ils constatent qu'un nombre important d'étudiants favorisent une interprétation AE. Notons que dans l'étude d'I. Ben Kilani, la formalisation des propositions à la manière d'Aristote [5] suffisait à montrer la différence entre négation et contraire. Dans l'étude de E. Dubinsky et O. Yiparaki au contraire, seule la formalisation dans le langage des prédicats permet de montrer ce phénomène d'inversion des quantificateurs entre les deux interprétations.

L'implication est sans doute le connecteur le plus visiblement au cœur de l'activité mathématique. Il est présent dans la formulation en *si…, alors…* de nombreux théorèmes et associé à un pas très courant dans le raisonnement déductif « si A alors B, or A, donc B ». C'est de ce fait la notion de logique la plus étudiée en didactique. Je signale ici quelques études françaises : les thèses de L. Radford [6], de V. Durand-Guerrier, de V. Deloustal-Jorrand [7], un article de J. Rogalski et M. Rogalski [8]. J'exposerai ultérieurement les résultats de ces travaux, et me contente ici de signaler que pour tous ces auteurs la distinction entre l'implication $A \Rightarrow B$ entre propositions et l'implication universellement quantifiée « $\forall x\ (A[x] \Rightarrow B[x])$ » est importante. Là encore, c'est la formalisation dans le moderne langage des prédicats qui permet de faire cette distinction (nous avons vu que les Stoïciens, qui n'avaient pas les outils pour la faire, n'arrivaient pas à se mettre d'accord sur une définition des propositions conditionnelles, voir page 40). Cette distinction permet d'éclairer certains raisonnements d'élèves comme nous allons le voir maintenant avec l'analyse de la tâche du labyrinthe.

La tâche ci-dessous apparaît dans une évaluation proposée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public à des enseignants volontaires en fin de Seconde. Elle est analysée par V. Durand-Guerrier dans sa thèse, ainsi que dans l'article *L'élève, le professeur et le labyrinthe* publié dans la revue *Petit'x* (Durand-Guerrier, 1999).

4. 9 de ces 11 énoncés sont des énoncés « de la vie courante » (par exemple (1) : everyone hates somebody, (4) : there is a mother for all children), et les deux derniers sont mathématiques ((10) : for every positive number a there exists a positive number b such that $b < a$, (11) : There exists a positive number b such that for every positive number a, $b < a$).

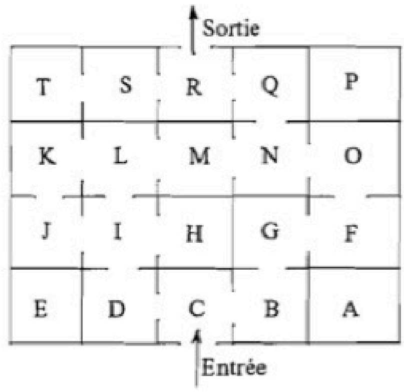
5. En quatre catégories : universelles affirmatives, universelles négatives, existentielles affirmatives, existentielles négatives,

6. *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitements logiques, contributions à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée.*

7. *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique.*

8. *Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques.*

Exercice 1
Voici un labyrinthe
Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée la sortie, *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.
Les pièces sont nommées A, B, C... comme il est indiqué sur la figure.



Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE.
En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n°1 : « X est passé par P »
Phrase n°2 : « X est passé par N »
Phrase n°3 : « X est passé par M »
Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »
Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »
Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

Figure 2.1 – Activité *Le labyrinthe*

Les réponses considérées comme exactes par les auteurs sont :

Phrase n° 1 : FAUSSE, Phrase n° 2 : VRAIE, Phrase n° 3 : ON NE PEUT PAS SAVOIR, Phrase n° 4 : VRAIE, Phrase n° 5 : VRAIE, Phrase n° 6 : FAUSSE.

Ceux-ci s'étonnent que la réponse majoritaire chez les élèves pour la question n° 6 soit ON NE PEUT PAS SAVOIR. V. Durand-Guerrier propose une formalisation logique de la situation dans laquelle cette réponse est cohérente. Celle que je propose ci-dessous (de façon simplifiée) en est largement inspirée.

V. Durand-Guerrier utilise une variable de type « trajet ». Considérons les trois trajets CBGFONQR (T_1), CDILMNQR (T_2), CDIJKLMNQR (T_3) qui permettent de traverser le labyrinthe sans passer deux fois par la même pièce, une variable t qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{T_1, T_2, T_3\}$, et vingt prédicats $A[t]$, $B[t]$,..., $T[t]$ signifiant par exemple « la pièce A est sur le trajet t » [9].

9. Dans son habilitation à diriger des recherches, V. Durand-Guerrier propose une formalisation dans laquelle elle ne se limite pas à ces seuls trois trajets, car « l'expérience montre que faire la liste des trajets possibles n'est pas le seul mode de raisonnement utilisé, de nombreuses personnes se plaçant dans un cadre plus général » (Durand-Guerrier, 2005, p. 87).

Dans l'exercice, on suppose qu'une personne X a traversé le labyrinthe en empruntant un trajet t, et l'on s'interroge sur la valeur de vérité des phrases portant sur ce trajet. Les phrases sont alors des propositions ouvertes dans lesquelles la variable t est libre [10] : ce sont des phrases qui parlent d'un trajet t sur lequel la seule chose que nous savons est que c'est un élément de l'ensemble $\{T_1, T_2, T_3\}$. Nous pouvons dire que les phrases n° 2, n° 4 et n° 5 sont vraies car elles sont de toute façon vraies pour T_1, pour T_2 et pour T_3, c'est-à-dire que les propositions closes $\forall t\ N[t]$, $\forall t\ (O[t] \Rightarrow F[t])$ et $\forall t\ (K[t] \Rightarrow L[t])$ sont vraies. De la même façon, nous pouvons dire que la phrase n° 1 est fausse puisqu'elle l'est à la fois pour T_1, pour T_2 et pour T_3. Par contre, la phrase n° 3 est fausse pour T_1 et vraie pour T_2 et pour T_3, la phrase n° 6 est vraie pour T_1 (car $L[T_1]$, qui est la prémisse de l'implication, est fausse), fausse pour T_2 (car $L[T_2]$ est vraie et $K[T_2]$ est fausse) et vraie pour T_3 (car $L[T_3]$ et $K[T_3]$ sont vraies). Sans plus d'informations sur la variable t, il n'est pas possible de conclure sur la vérité de ces deux phrases. Cette modélisation, pour laquelle nous avons eu recours au langage des prédicats, montre un raisonnement cohérent du point de vue de la logique mathématique qui amène à répondre ON NE PEUT PAS SAVOIR pour les phrases n° 3 et n° 6.

Dans les réponses attendues par les auteurs, ils basculent de cette interprétation pour la phrase n° 3 (lue comme une proposition ouverte) à une deuxième interprétation pour la phrase n° 6 qu'ils lisent – conformément à la pratique des mathématiciens pour les propositions en *si. . ., alors. . .* – comme étant universellement quantifiée. Cette expérimentation montre que cette pratique n'est pas forcément partagée par les élèves (et peut-être d'autant moins que le contexte de la situation n'est pas mathématique), ce qui peut amener de tels malentendus.

Je vais maintenant présenter d'autres travaux didactiques qui posent la question des éventuelles spécificités du langage des mathématiciens, et de son impact sur l'activité mathématique des élèves. J'oriente ainsi mon choix dans les nombreux travaux de didactiques sur le langage dans la classe de mathématiques (c'est un champ de recherche dynamique, tant au niveau national – c'était l'un des deux thèmes de la 16e école d'été de didactique des mathématiques, qui a eu lieu en 2011 – qu'international).

2.2 Le langage dans la classe de mathématiques

2.2.1 Logique et langage

Dans *Logique et linguistique*, O. Ducrot explique que la logique intervient vis-à-vis du langage là où on peut identifier des d'énoncés dont la seule forme ouvre la possibilité

10. Les notions de *proposition ouverte, proposition close, variable libre, variable liée* sont présentées dans la partie suivante, voir page 114 et page 113.

d'une inférence :

> Il existe, entre certains énoncés du langage ordinaire, des relations d'inférence telles que, si l'on admet les uns, on est forcé d'admettre les autres. Ainsi on ne peut tenir pour vrai « Quelques hommes sont méchants », sans admettre aussi « Quelques êtres méchants sont hommes », ou encore affirmer « Le baromètre a baissé », sans accepter la conclusion « Il y a de bonnes chances qu'il pleuve ». Parmi ces relations, d'autre part, il en est un bon nombre - celles qui intéressent le logicien - qui sont parfaitement indépendantes du monde extérieur. Ainsi la première que nous avons citée s'impose, que les concepts d'« homme » et de « méchanceté » correspondent ou non à des données effectives, qu'il y ait en fait des hommes méchants ou non : aucun bouleversement de la réalité empirique ne saurait donc lui retirer sa validité. Nous parlerons, dans ce cas, de relations d'inférence logique, ou, par abréviation, de relations d'inférence. (Ducrot, 1966, p. 3)

Il fait cependant remarquer qu'un grand nombre d'inférences ne sont pas en corrélation avec des phénomènes linguistiques repérables indépendamment d'elles [11]. D'où la nécessité de « restreindre » le langage dont s'occupe la logique.

Dans l'étude épistémologique, nous avons vu comment une formalisation du langage était à la base de la constitution de différents systèmes logiques. Dans la logique de Port-Royal, dans la lignée de la logique d'Aristote, les éléments de la langue naturelle sont catégorisés, puis la logique du système est décrite à partir de ces catégories (comment sont formées des propositions composées à partir de propositions simples, comment sont niées les propositions de telle catégorie, quels raisonnements formés à partir de telles catégories de propositions sont valides…). Savoir si les constructions grammaticales des langues naturelles peuvent être totalement décrites est une question débattue au sein de la linguistique, qui est hors de mon propos ici.

La position de Frege est qu'en tout cas, la langue naturelle a trop d'imperfections pour les mathématiques, celles-ci nécessitant un langage qui permet d'assurer l'infaillibilité du raisonnement (voir citation page 65). Avec ses travaux, et les développements de la logique mathématique au début du XX^e^ siècle, les mathématiciens disposent désormais d'outils qui leur donnent la possibilité de formaliser complètement l'expression des propositions et des démonstrations. Cette possibilité n'est pratiquement jamais utilisée : dire ainsi les mathématiques serait beaucoup trop long et difficilement compréhensible. Il est impossible en pratique de se passer de la langue naturelle et du langage courant [12] pour s'exprimer

11. Il donne l'exemple des énoncés « Pierre est frère de Paul », dont on peut conclure que « Paul est frère de Pierre », inférence que l'on peut également faire à partir de l'énoncé « Pierre est différent de Paul », mais pas à partir de l'énoncé « Pierre est inconnu de Paul ».

12. La langue est un système de signes, le langage est le produit d'une activité, je reviendrai sur cette distinction page 109.

en mathématiques[13], mais on y utilise également diverses formulations plus ou moins formalisées.

En effet, les mathématiciens s'expriment, selon les moments de leur activité, et selon leurs éventuels auditeurs, avec différents degrés de formalisation. Ainsi, les énoncés suivants pourront être utilisés à différents moments par une même personne :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

(présent par exemple dans l'énoncé d'un exercice)

u_n peut être aussi proche de 0 qu'on veut pourvu que l'on prenne n assez grand

(dit par exemple oralement pour reformuler ce que l'on veut montrer)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_0,\ |u_n| < \varepsilon$$

(écrit par exemple au début de la résolution de l'exercice en rappel de définition)

Le dernier énoncé est exprimé dans un formalisme directement inspiré de la logique mathématique, tant pour sa « mise en forme » (quantifications explicites en tête d'énoncé) que par les symboles logiques utilisés. La possibilité de recourir à ce formalisme est un atout essentiel pour le mathématicien, et est souvent utilisée pour préciser, contrôler, vérifier un raisonnement.

2.2.2 Le langage des mathématiciens dans la classe de mathématiques

Dans une perspective didactique, on est amené à se demander dans quelle mesure l'usage de ces différentes expressions participe à la conceptualisation[14] des notions mathématiques. Le langage en général est essentiel dans l'activité mathématique dans la mesure où il est en relation avec la pensée dans un processus dynamique qui en fait un élément de la conceptualisation. Selon Vygotski, langage (naturel) et pensée ne peuvent être mis en concordance :

> La structure du langage n'est pas le simple reflet, comme dans un miroir, de celle de la pensée. Aussi le langage ne peut-il revêtir la pensée comme une robe de confection. Il ne sert pas d'expression à une pensée toute prête.

13. Mais la possibilité de pouvoir le faire est importante. Par exemple, la possibilité de pouvoir faire vérifier une démonstration par un ordinateur, comme cela a été récemment fait pour le théorème de Feit-Thomson, est considérée comme une grande avancée pour les mathématiques.

14. « Conceptualisation » est employé ici au sens de G. Vergnaud, comme processus d'élaboration d'un concept, celui-ci étant déterminé par un triplet : « l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence), l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes [organisations invariantes de la conduite] (le signifié), l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) », (Vergnaud, 1990), p. 145

> En se transformant en langage, la pensée se réorganise et se modifie. Elle ne s'exprime pas mais se réalise dans le mot. (Vygotski, 1997, p. 431)

G. Vergnaud précise comment s'effectue cette réorganisation :

> Le langage a cette vertu exceptionnelle, par rapport à la perception et à l'action, de permettre de faire référence à des objets absents ou imaginaires, de faciliter l'analyse des situations et des configurations en termes de prédicats et d'objets, de permettre la distinction entre énoncés universels et énoncés particuliers. (Vergnaud, 2001, p. 12),

Ces citations me semblent appuyer l'hypothèse que fait C. Hache, dans *Langage mathématique à la transition primaire/collège*, d'une dialectique fructueuse entre formalisme mathématique et langue naturelle dans le langage des mathématiciens, qui en serait une caractéristique importante :

> On peut penser que le mathématicien parle, pense en langue naturelle. Qu'il a l'intuition qu'il saurait parfaitement formaliser tout ce qu'il dit (quitte à devoir y passer du temps, à y travailler), son langage donne d'ailleurs des gages de cette capacité : il est en partie formalisé (plus la notion exprimée est « sensible », au cœur de son propos, plus il formalise). Pour pouvoir être compris, pour pouvoir penser, il ne peut cependant formaliser tout ce qu'il dit.
>
> On aurait une dialectique entre intuition, pensées et capacité de formaliser l'intuition. La dialectique serait fructueuse, productive, féconde (l'intuition nourrissant le contenu formel, et la formalisation permettant de contrôler l'intuition et d'asseoir la réflexion à venir). (Hache, 2013, p. 459)

C. Hache souligne ici une dualité du langage des mathématiciens, entre formalisme et langue naturelle, que je vais maintenant préciser en m'appuyant sur la thèse de C. Laborde.

2.2.3 Dualité du langage des mathématiciens : deux codes en interaction

Dans sa thèse *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.*, C. Laborde s'intéresse « aux problèmes langagiers dans l'enseignement mathématique non pour eux-mêmes mais pour l'incidence qu'ils ont dans l'acquisition des connaissances mathématiques dans le cadre d'un apprentissage scolaire » (Laborde, 1982, p. 406). Elle étudie l'activité de formulation en mathématique à l'intérieur d'un cadre théorique issu du domaine de la psycho-linguistique, auquel elle « rajoute une hypothèse concernant le modèle langagier en vigueur : les énoncés produits en mathématiques ne sont pas la simple juxtaposition de formulations en langue naturelle et d'expressions symboliques mais le résultat d'une véritable interaction entre ces deux

codes [15]. » (*ibid*, p. 407) Elle distingue alors quatre catégories d'énoncés dans les textes mathématiques selon le ou les codes utilisé(s) :
– des expressions symboliques ;
– des formulations relevant de la langue courante ;
– des formulations relevant d'une langue (notée $\mathbb{LM}$ pour Langue Mathématique) distincte de la langue courante par la présence dans ses énoncés d'éléments d'écriture symbolique, de termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques ou de tournures syntaxiques privilégiées [16]. Un énoncé relève de $\mathbb{LM}$ s'il possède au moins l'une des trois propriétés citées.[...]
– des transcriptions écrites du prononcé oral des écritures symboliques isolées, c'est-à-dire non insérées dans une phrase de $\mathbb{LM}$. (Laborde, 1982, pp. 19-20)

C. Laborde cherche à préciser en quoi consiste cette interaction dans le discours mathématique. Elle met en évidence « des modifications au niveau de la syntaxe ou des systèmes de renvoi, produites par la mise en contact des deux codes » (*ibid*, p. 407). Cette grille d'analyse me semble particulièrement intéressante pour étudier les pratiques langagières qui concernent l'utilisation des variables. La proposition « n est pair », dans laquelle la variable n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, relève, ainsi formulée, de $\mathbb{LM}$. Elle mélange un élément symbolique, n, le verbe « être » pris dans son sens de la langue naturelle, et l'adjectif « pair » pris dans un sens spécifique aux mathématiques. Sa structure grammaticale est congruente à une structure du langage courant, mais la lettre n y est utilisée comme syntagme nominal (c'est le nom d'un objet dont la seule chose que nous savons est qu'il appartient à $\mathbb{N}$), ce qui n'arrive que très rarement dans le langage courant. Insérons maintenant cette proposition dans une proposition plus complexe : « quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si n est divisible par 4 alors n est pair ». Notons que « $n \in \mathbb{N}$ », qui suit la locution prépositionnelle « quel que soit », ne doit pas être lu ici comme la proposition « n appartient à $\mathbb{N}$, mais doit être lu avec le participe présent « n appartenant à $\mathbb{N}$. Il y a donc une déformation d'un élément de l'écriture symbolique due à son insertion dans un ensemble plus complexe. Par ailleurs, le renvoi à l'élément n dans la deuxième partie de la phrase (après « quel que soit $n \in \mathbb{N}$ ») se fait par la reprise de l'élément lui-même, et nous pouvons parler d'une *tournure syntaxique privilégiée* sur laquelle nous reviendrons (nous ne dirions pas « quel que soit ton choix, je respecterai ton choix »).

15. « Code » est entendu en tant que « système structuré de signes permettant à un émetteur de transmettre un message à un récepteur. Un code est caractérisé par un répertoire de signes et par des règles d'agencement entre signes ».

16. Elle donne comme exemple de *tournures syntaxiques privilégiées* la construction *une et une seule*, utilisée dans « La relation est telle que de chaque point représentant un élément de E part une flèche et une seule [...] », qui est « non utilisée couramment [et] qui peut être considéré d'un point de vue transformationnel comme le résultat de transformation de coordination et d'effacement à partir des deux phrases "une flèche part" et "une seule flèche part" » (*ibid*, p. 20). L'appellation *tournure syntaxique privilégiée*, renvoie ainsi à un critère de fréquence d'utilisation dans le langage courant, et non à un critère de correction grammaticale (la phrase « à l'issue des élections il y aura une et une seule présidente » est tout à fait correcte).

C. Laborde conduit une étude de manuels qui montre que « la possibilité de jouer sur les deux codes est utilisée de fait à des fins d'enseignement pour introduire de nouveaux termes mathématiques (en langue naturelle). L'écriture symbolique sert de relais, comme le dessin le fait dans des procédés de monstration. » (*ibid*, p. 407). Et en proposant une activité de formulation à des élèves au début du collège, elle montre que ceux-ci n'utilisent pas spontanément le code symbolique, et qu'il est nécessaire de réfléchir à des situations permettant l'évolution des formulations des élèves et l'usage de l'écriture symbolique. Elle insiste sur deux critères que doivent respecter de telles situations : s'inscrire dans la durée, et contenir des interactions entre élèves, pour éviter le biais de l'enseignant qui comprend au delà de ce qui est effectivement dit par l'élève.

Les résultats de la thèse de C. Laborde illustrent la nécessité d'un travail sur l'expression dans l'enseignement des mathématiques. Formulé ainsi, cela pourrait passer pour une lapalissade : bien sûr les enseignants de mathématiques sont attentifs à la façon dont s'expriment leurs élèves, et passent un temps non négligeable à reprendre certaines de leurs formulations ! Mais C. Laborde montre très bien qu'il y a un usage particulier de la langue en mathématiques, dû à l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle, et je fais l'hypothèse que les enseignants n'ont pas forcément conscience de cette particularité (le fait que les concepteurs de la tâche du labyrinthe ne sachent pas expliquer les réponses « je ne sais pas » pour la phrase n° 6 – voir page 82 – montre par exemple qu'ils n'ont pas conscience de la pratique de quantification universelle implicite des implications).

Nous nous sommes pour l'instant intéressés à l'interaction de deux codes à l'intérieur d'un seul énoncé mathématique. L'utilisation conjointe de ces deux codes est une dimension importante des pratiques langagières des mathématiciens. Une autre dimension importante est l'interaction entre plusieurs formulations dans la compréhension des concepts mathématiques. Le mathématicien passe facilement de l'une à l'autre des trois propositions suivantes déjà données en exemple page 85 :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

u_n peut être aussi proche de 0 qu'on veut pourvu que l'on prenne n assez grand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_0,\ |u_n| < \varepsilon$$

Il sait, en présence de l'une d'entre elles, la reformuler si une autre est plus adaptée. On peut considérer que pour passer de la première proposition à la troisième il suffit de connaître la définition donnée dans le cours. Mais pour comprendre le lien entre ces deux propositions, pour rendre opératoire la définition, n'y a t-il pas besoin aussi de savoir les reformuler dans les termes de la deuxième proposition ? Reformuler en mathématiques ne consiste pas seulement à donner une définition, et je vais maintenant préciser cette notion de reformulation en m'appuyant sur les registres de représentations sémiotiques de R. Duval.

2.2.4 Coordination de registres de représentation sémiotique et reformulation

Les registres de représentation sémiotique de R. Duval

« Des représentations sémiotiques sont des productions constituées de signes appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement » (Duval, 1993, p. 39). Un même objet mathématique peut avoir plusieurs représentations sémiotiques, par exemple l'objet « droite » peut être représenté graphiquement par un trait, ou algébriquement par une équation. Certains de ces systèmes de signes sont appelés par R. Duval des *registres de représentation sémiotique*. Pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation sémiotique, il doit permettre trois activités cognitives liées à la production des représentations sémiotiques (voir Duval, 1993, pp. 41-42) :

– la formation d'une représentation identifiable comme appartenant au registre,
– le traitement d'une représentation, c'est-à-dire la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée,
– la conversion d'une représentation, c'est-à-dire la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre, en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale.

Duval plaide pour une plus importante prise en compte de la coordination de différents registres sémiotiques dans l'apprentissage des mathématiques :

> Si la conceptualisation implique une coordination de registres de représentation, le principal enjeu des apprentissages de base en mathématique ne peut pas seulement être l'automatisation de certains traitements ou la compréhension de notions mais il doit être la coordination des différents registres de représentation nécessairement mobilisés pour ces traitements ou pour cette compréhension. [. . .]
>
> En fait, l'enseignement des mathématiques est généralement organisé comme si la coordination des différents registres de représentation introduits ou utilisés s'effectuait rapidement et spontanément, comme si les problèmes et les coûts liés à la non-congruence n'existaient pas. Car ce qui, en définitive, semble important ce n'est pas le changement de registre à effectuer, mais les traitements qui pourront être effectués sur la représentation obtenue après changement de registre ! La coordination des registres de représentation ne semble donc pas devoir s'imposer comme l'un des objectifs principaux de l'enseignement, de 6^{e} jusqu'en Seconde. Il suffit de regarder comment sont introduits de nouveaux registres : représentations graphiques, figures géométriques, écriture symbolique du calcul des prédicats (quantificateurs) pour constater l'absence d'un tel objectif. On s'en tient à quelques correspondances locales, le plus souvent

> pour des cas de congruence, et à des règles d'emploi ou de conformité. (Duval, 1993, p. 54)

Ainsi, la capacité à représenter un objet dans divers registres, et à convertir une représentation d'un registre en la représentation correspondante dans un autre registre sont pour R. Duval des conditions nécessaires à la compréhension.

Registres de représentation sémiotique pour les propositions

Peut-on distinguer différents registres de représentation sémiotique pour les propositions mathématiques ? Dans l'article déjà cité, Duval évoque à plusieurs reprises le *registre de la langue naturelle*, et une fois le *registre de l'écriture symbolique du calcul des prédicats*. Duval fait ici la même distinction que C. Laborde entre langue naturelle et écriture symbolique.

Ce point de vue tend à assimiler formalisation et symbolisation. La formalisation est simplement une mise en forme codifiée. La symbolisation oblige bien sûr à la formalisation, puisqu'il faut respecter les règles d'utilisation des signes, mais on peut formaliser sans symboliser. Par exemple, on peut s'astreindre à expliciter les quantificateurs et à les placer en tête de la proposition, comme dans la proposition « quel que soit l'entier naturel n, si n est divisible par 4 alors n est pair », qui est déjà une formalisation de la proposition « tout entier naturel divisible par 4 est pair ». Une distinction fondamentale entre ces deux propositions est l'utilisation d'une variable dans la première, qui est une symbolisation, mais pour ne pas avoir à discuter du niveau de symbolisation nécessaire pour qu'une proposition appartienne au *registre de l'écriture symbolique du calcul des prédicats*, je préfère introduire le *registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats*, caractérisé surtout par des règles régissant l'utilisation d'éléments spécifiques (connecteurs logiques du calcul propositionnel et quantificateurs « pour tout », « il existe »), et non par le fait que ces éléments soient notés sous forme symbolique ou non. Deux contraintes de mise en forme permettent de dire si une proposition appartient ou non à ce registre :

- l'expression des quantifications à l'aide des quantificateurs « pour tout », « il existe » (ou une autre expression équivalente, voir les précisions sur le terme « quantificateur » page 140), c'est-à-dire qu'elles ne sont pas présentes de manière implicite, ou exprimées par d'autres termes que ces quantificateurs ;
- l'expression explicite des connecteurs.

Nous allons voir à travers quelques exemples que les mathématiciens ne s'expriment pas soit dans le registre de la langue naturelle, soit dans le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats, que je nommerai dans la suite plus simplement *registre formalisé*, soit dans celui de l'écriture symbolique du calcul des prédicats, que je nommerai dans la suite plus simplement *registre symbolique*, mais se trouvent souvent dans un registre que je me contenterai d'appeler *registre intermédiaire*. Par exemple :

– Les entiers divisibles par 4 sont pairs : *registre de la langue naturelle*
– Tout entier multiple de 4 est pair : *registre de la langue naturelle*
– Si 4 divise n, alors n est pair : *registre intermédiaire, la quantification universelle sur n est implicite*
– Quel que soit l'entier naturel n, si 4 divise n, alors n est pair : *registre formalisé*[17]
– Quel que soit l'entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$: *registre intermédiaire, la quantification existentielle sur k est exprimée par « avec »*
– Quel que soit l'entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$: *registre formalisé*
– $\forall n \in \mathbb{N} \; \big((\exists k \in \mathbb{N} \; n = 4k) \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{N} \; n = 2k') \big)$: *registre symbolique*

Envisager ainsi en termes de conversion entre des registres cette pratique de reformulation dont les mathématiciens usent largement permet de s'appuyer sur les résultats de R. Duval pour défendre les deux idées suivantes :

– l'utilisation de différentes formulations est nécessaire à la compréhension des propositions mathématiques,
– ces reformulations peuvent créer des difficultés pour les élèves, dues notamment à des problèmes de non-congruence. Par exemple, la proposition « la suite u est croissante à partir d'un certain rang » peut se reformuler « il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La quantification « il existe un entier naturel N » qui correspond à « à partir d'un certain rang » est à placer en tête de proposition, et non à la fin.

2.2.5 Formalisation des propositions et démonstrations

Nous retrouvons cette nécessité de disposer de différentes formulations dans l'article *Unpacking the logic of mathematical statements* de A. Selden et J. Selden, où les auteurs suggèrent que les différentes formulations d'un théorème participent de la compréhension que peut en avoir un étudiant et définissent la notion de *statement image* :

> Most mathematics, whatever its origins, is eventually recorded and communicated using statements, including definitions, theorems, and conjectures.[...] Theorems, in particular, are often remembered because they state how mathematical concepts are related. To statements of lasting significance, a person may attach rich mental structures, which we call *statement images*. These are meant to include all of the alternative statements, examples, nonexamples, visualizations, properties, concepts, consequences, etc., that are associated with a statement. Such associations can arise from noticing relationships, such as seeing an example which illustrate a theorem ; from repetition, such as using

17. Les propositions « n est pair » et « il existe un entier k tel que $n = 2k$ » relèvent toutes deux du registre formalisé. Ce qui les distingue est juste un choix différent dans les mots et signes utilisés.

> a theorem many times on one type of problem ; or from affect, such as discovering a proof technique after many attempts. [18] (Selden & Selden, 1995, p. 133)

Parmi les différentes formulations d'une proposition, ils distinguent les énoncés formels et les énoncés informels, les énoncés formels étant ceux construits à partir d'une utilisation, en mots ou en symboles, des connecteurs et des quantificateurs du langage des prédicats. Par exemple, une proposition telle que « une fonction dérivable est continue » est un énoncé informel équivalent à la proposition « pour toute fonction f, si f est dérivable, alors f est continue ». L'utilisation des registres de représentation sémiotique est un moyen plus précis pour distinguer différentes formulations plutôt que la seule opposition informel/formel que A. Selden et J. Selden ne définissent pas vraiment. Ils apportent cependant un élément supplémentaire pour l'analyse des propositions avec ce qu'ils appellent *unpacking (the logical structure of) an informal statement*, que l'on pourrait traduire par *mettre au jour la structure logique d'un énoncé informel*. Par exemple, les propositions « n est pair » et « il existe un entier k tel que $n = 2k$ » sont toutes les deux exprimées dans le registre formalisé, mais la structure logique n'est mise au jour que dans la deuxième. Cette structure logique est importante pour l'insertion d'une proposition dans une démonstration, qu'il s'agisse de l'utiliser ou de la démontrer.

A. Selden et J. Selden suggèrent que les énoncés informels sont plus opératoires pour la compréhension intuitive des relations entre les concepts, alors que les énoncés formels contiennent la précision nécessaire pour la validation des démonstrations. L'hypothèse qui est au centre de l'article est que les étudiants qui ont des difficultés à mettre au jour la structure logique d'un énoncé ont également des difficultés à valider une démonstration de cet énoncé. Nous retrouvons là ce qui motive le travail de formalisation du langage dans les différents systèmes logiques que j'ai évoqués : assurer la validité des raisonnements de par leur forme, et produire des schémas de raisonnements valides dans lesquels seule la forme logique des propositions intervient. Pour A. Selden et J. Selden, les étudiants avancés dans leurs études de mathématiques doivent être capables d'associer à un théorème la structure de sa démonstration ou sa structure logique :

> Since proof validation includes the production or recognition of proof frameworks, it is reasonable to expect statement images of theorems for more

18. Une grande partie des mathématiques, d'où qu'elles viennent, est finalement mémorisée transmise sous forme d'énoncés qui peuvent être des définitions, des théorèmes, des conjectures. [. . .] En particulier, on se souvient souvent des théorèmes parce qu'ils indiquent comment des concepts mathématiques sont reliés. À des énoncés qui ont une signification prégnante, une personne va associer des structures mentales riches, que nous appelons *statement images*. Elles incluent toutes les variantes de formulation, les exemples, les contre-exemples, les représentations mentales, les propriétés, les concepts, les conséquences, etc., qui sont associés à un énoncé. De telles associations peuvent provenir du constat de certaines relations, comme quand nous voyons un exemple qui illustre un théorème ; de la répétition, comme quand nous utilisons plusieurs fois un théorème dans un type de problème ; ou de l'affect, comme quand nous découvrons une technique de démonstration après de nombreuses tentatives.

advanced students to contain proof frameworks or the associated formal statements.[19] (Selden & Selden, 1995, p. 134)

Les auteurs notent également que la « réciproque » de leur hypothèse n'est généralement pas vraie, c'est-à-dire que les étudiants qui arrivent à mettre au jour la structure logique d'un énoncé ne sont pas toujours capables de valider sa démonstration.

2.3 Synthèse de l'étude didactique

V. Durand-Guerrier conclut son cours à la XVI[e] école d'été de didactique des mathématiques, intitulé *Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques* en ces termes :

> L'analyse logique du langage, parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites, contribue à questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, et met en valeur l'importance des catégories logiques dans le processus de conceptualisation.
>
> Un autre versant des apports de l'analyse logique du langage est celui du recours aux modélisations logiques disponibles pour analyser les preuves et étudier les situations de validation qui sont au cœur de l'activité et des apprentissages mathématiques. (Durand-Guerrier, 2013, p. 262)

L'analyse de la tâche du labyrinthe (issue de Durand-Guerrier, 1996) illustre ces deux utilisations : d'une part elle montre comment la pratique de quantification universelle implicite des implications, transparente pour les enseignants, amène un malentendu avec certains élèves, d'autre part elle propose une modélisation logique du raisonnement de ces élèves qui en montre la cohérence, même s'il les amène à une réponse qui n'est pas celle attendue par les auteurs de la tâche. Pour une telle analyse, la logique des prédicats est une référence qui permet notamment de prendre en compte les phénomènes de quantification. Elle est ainsi la logique pertinente pour l'étude didactique.

Le langage des prédicats dont nous nous sommes servi est un langage formel. Le langage utilisé par les mathématiciens s'en rapproche plus ou moins. C. Laborde montre que l'on a recours en mathématiques à deux codes, celui de l'écriture symbolique et celui de la langue naturelle, qui sont en interaction. L'utilisation conjointe de ces deux codes nécessite des adaptations de l'un ou de l'autre, spécifiques de cette interaction. Ainsi, l'apprentissage par les élèves de l'utilisation du code de l'écriture symbolique ne peut pas se réduire à la connaissance de la signification et de la manipulation des symboles. Il faut aussi apprendre à utiliser ces écritures symboliques à l'intérieur de formulations où elles sont en interaction avec la langue naturelle. Les adaptations nécessaires à cette insertion font

19. Puisque la validation d'une démonstration inclut la production ou la reconnaissance de sa structure, il est raisonnable d'attendre que les *statement images* des théorèmes contiennent, pour des étudiants avancés, les schémas de preuve ou les énoncés formels qui leur sont associés.

partie des pratiques familières au mathématicien et au professeur de mathématiques, mais peuvent poser des problèmes aux élèves.

Une autre pratique familière aux mathématiciens est la reformulation d'une proposition dans une expression adaptée à ses besoins mathématiques. J'ai proposé de faire un parallèle entre cette notion de reformulation et la coordination de différents registres de représentation sémiotique, au sens de R. Duval : le registre de la langue naturelle, le registre intermédiaire, le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats, le registre de l'écriture symbolique du langage des prédicats. Ce parallèle permet d'insister sur la nécessité de ces différentes formulations pour la compréhension des propositions (au sens où différentes représentations sémiotiques participent à la compréhension), et sur les possibles difficultés pour passer de l'une à l'autre liées notamment à des phénomènes de non-congruence (difficulté bien identifiée de la coordination de différents registres, puisqu'il n'y a généralement pas de procédure « automatique » pour convertir une proposition d'un registre à un autre).

Certaines reformulations se font à l'intérieur d'un même registre, elles consistent à mettre plus ou moins au jour la structure logique d'une proposition. La reformulation est ainsi une sorte d'écriture à contraintes : il s'agit de ré-écrire une proposition dans un langage donné. Selon A. Selden et J. Selden, des formulations mettant au jour la structure logique d'une proposition sont importantes dans l'élaboration et la validation des preuves, puisqu'elles permettent un lien entre structure de la proposition et structure de la preuve.

Conclusion des études épistémologique et didactique

À partir d'une étude épistémologique d'une part, et en m'appuyant sur des travaux didactiques d'autre part, mon but dans cette partie était de déterminer des caractéristiques pertinentes d'un *savoir de référence* pour l'enseignement de notions de logique. Du point de vue épistémologique, j'ai proposé une étude de différents systèmes logiques, depuis l'Antiquité grecque jusqu'à la constitution récente de la logique mathématique. Je vais rappeler les invariants et les différences entre les systèmes étudiés, en les organisant selon quatre axes : le travail sur le langage, la validité des raisonnements, la nécessaire formalisation et la dialectique entre syntaxe et sémantique. Du point de vue didactique, j'ai sélectionné des travaux mettant en évidence l'apport de l'analyse logique pour des questions didactiques sur le raisonnement et le langage. Je compléterai par une perspective didactique les résultats de l'étude épistémologique dans chacun des axes dégagés.

Le travail sur le langage

Tous ces systèmes sont construits à partir d'un travail sur le langage. Raisonner nous permet d'accéder à des vérités à partir de vérités déjà là, et nous amène à énoncer un jugement en utilisant d'autres jugements. Nous raisonnons en utilisant des propositions, au sens naïf donné dès Aristote de « discours dans lequel réside le vrai ou le faux » (Aristote, 2008, p. 95). Pendant longtemps, à la suite d'Aristote, la proposition élémentaire est analysée en sujet-copule-prédicat, le sujet pouvant être prédiqué universellement ou particulièrement, et la copule pouvant être affirmative ou négative, ce qui donne quatre types de propositions. Chez les Stoïciens, des propositions simples sont liées par des connecteurs, et nous trouvons dans la logique de Port-Royal une étude très fine des propositions ainsi composées. L'analyse de la proposition en sujet-copule-prédicat est cependant insuffisante pour décrire les propositions mathématiques, et il a fallu attendre Frege pour qu'à la fin du XIX^{e} siècle, elle soit remplacée par une analyse en termes de fonction et argument qui permet deux choses essentielles pour le langage mathématique : d'une part de considérer des prédicats (propriétés) à plusieurs places, d'autre part de sortir l'opération de quantification de la proposition en la faisant porter par des quantificateurs qui agissent sur des variables.

Le langage actuel des mathématiciens s'inspire du formalisme de Frege, mais n'est en aucun cas une utilisation stricte d'un langage formel. Nous avons vu avec la thèse de C. Laborde (Laborde, 1982) qu'il est le lieu de l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle. Les enseignants ont une pratique familière des particularités de ce langage, mais elles peuvent poser des difficultés aux élèves, qui « découvrent en même temps les objets mathématiques et la façon d'en parler » (Hache, 2014).

Nous pouvons distinguer deux niveaux dans l'analyse du langage, présents dès la logique antique. D'une part, la logique des propositions les étudie d'un point de vue syntaxique en en donnant les règles de construction des propositions, et d'un point de vue sémantique en décrivant l'effet de la composition de propositions (à l'aide de connecteurs) sur les valeurs de vérité. D'autre part la logique des prédicats « rentre à l'intérieur » de la proposition, en détaillant ses constituants. La seule logique propositionnelle est insuffisante pour décrire les propositions et le raisonnement mathématiques, et plusieurs travaux ont montré la pertinence de la logique des prédicats comme référence pour l'analyse didactique, notamment parce qu'elle permet de prendre en compte les phénomènes de quantification qui sont essentiels en mathématiques. La mise au jour de la structure logique des propositions aide à déceler la complexité de certaines formulations (voir l'exemple des propositions « composées au niveau du sens » données en page 50).

L'analyse de la tâche du labyrinthe (issue de Durand-Guerrier, 1996) montre comment la pratique de quantification universelle implicite des implications, transparente pour les enseignants, amène un malentendu avec certains élèves. L'interprétation des énoncés produits dans la classe de mathématiques demande donc de prendre en compte une dimension pragmatique : l'interprétation de certains signes utilisés dans ces énoncés n'est pas réductible à leur relation à un signifié, mais nécessite la prise en compte d'un contexte de production de cet énoncé. Dans son habilitation à diriger des recherches, V. Durand-Guerrier reprend une définition présentée par U. Eco de la dimension pragmatique : « le signe est ici perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font, etc… » (Durand-Guerrier, 2005, p. 114), et défend la thèse suivante :

> Dans l'analyse des raisonnements, la prise en compte de la dimension sémantique dans l'analyse des énoncés fait émerger des interprétations possibles qui doivent être examinées sous l'angle pragmatique, en référence au contexte, à la situation d'énonciation et aux connaissances du sujet.
>
> Dans une perspective didactique, ceci permet d'une part d'enrichir l'analyse *a priori* des situations proposées, d'autre part d'interpréter de manière plus fine les productions langagières des élèves et de prendre en compte de manière rigoureuse leurs connaissances. (Durand-Guerrier, 2005, pp. 115-116)

La validité des raisonnements

Tous les systèmes logiques étudiés sont établis comme des contributions à la science du raisonnement. Mais les positions diffèrent entre ceux qui voient la logique comme un art et ceux qui voient la logique comme une science, entre ceux qui utilisent la logique pour décrire le raisonnement et ceux qui veulent en faire l'outil même du raisonnement.

– Chez Aristote et chez les Stoïciens, la logique est présentée comme une théorie formelle du raisonnement, cette théorie établie pouvant ensuite être utilisée comme outil par les autres sciences. J'entends par là que la validité des raisonnements est assurée par leur forme et le fait qu'ils sont, ou qu'ils se ramènent à l'aide de quelques règles à, des raisonnements primitifs acceptés comme valides.
– Pour les auteurs de la logique de Port-Royal, « la logique est l'art de bien conduire sa raison dans la connaissance des choses » (Arnauld & Nicole, 1992, p. 30). Ils exposent les règles du raisonnement (la syllogistique aristotélicienne), tout en précisant que les erreurs des hommes « viennent bien plus de ce qu'ils raisonnent sur de faux principes, que non pas de ce qu'ils raisonnent mal suivant leurs principes » (Arnauld & Nicole, 1992, p. 167). Ici, garantir la validité des raisonnements n'est pas ressenti comme une mission importante de la logique.
– Dans *Les lois de la pensée*, G. Boole se donne comme but « d'étudier les lois fondamentales de l'esprit par lesquelles s'effectue le raisonnement ; de les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode » (Boole, 1992, p. 21). Ici, la logique est posée comme étant une science, elle est la théorie mathématique du raisonnement.
– Chez Leibniz et chez Frege, la logique doit fournir un système de signes dans lequel pourront s'exprimer les raisonnements, cette expression formelle étant la garantie de leur infaillibilité.

Nous retrouvons dans l'enseignement cet attachement à la forme comme garantie de la validité du raisonnement. Ainsi, au collège, au moment de l'initiation au raisonnement déductif, il n'est pas rare de voir proposés des canevas de démonstrations, des démonstrations pré-organisées à remplir avec les « bonnes » propositions, ou des mots ou groupe de mots devant être mis à une place bien précise dans les inférences (même si ces mots sont issus du langage courant, le fait de leur conférer une place bien précise en fait presque des mots-signes qui perdent leur sens au profit d'un rôle syntaxique).

M. Gandit, dans son article *Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : première partie*, dénonce la place trop importante que prend l'aspect formel d'une preuve au début de l'apprentissage de la démonstration au collège :

> Les épisodes de vie de classe que nous avons choisi de décrire nous ont permis d'expliciter des règles d'un contrat didactique coutumier par rapport à la démonstration, en vigueur au collège, voire au lycée, où la forme du discours l'emporte sur le sens de la preuve. Ce contrat repose sur les représentations qu'ont les enseignants de la preuve, mais aussi de la façon dont on peut l'enseigner. Il induit chez nos élèves des attitudes qui s'opposent à celles qui prévalent dans la communauté mathématique. Ce n'est pas acceptable si l'on a le souci d'assurer une véritable formation mathématique à nos élèves. (Gandit, 2004, p. 49)

En lien avec ce commentaire, soulignons une différence importante entre la logique de Port-Royal, qui revendique son non-formalisme, et les autres systèmes étudiés. Elle est écrite dans un but pédagogique, c'est un traité scolaire, qui s'adresse à des personnes voulant s'exercer au raisonnement. Les autres œuvres étudiées sont des ouvrages scientifiques, qui théorisent le raisonnement, qui cherchent à en décrire le fonctionnement. De fait, ne pas abuser de la formalisation au moment de la découverte du raisonnement déductif ne veut pas dire que cette formalisation ne puisse pas apporter ultérieurement un éclairage à qui commence à en avoir une bonne pratique. Ainsi, au niveau de l'enseignement supérieur, A. Selden et J. Selden (Selden & Selden, 1995) suggèrent de présenter les théorèmes et les définitions dans une formulation informelle, qui permet la compréhension intuitive, et dans une formulation formelle, qui permet de faire le lien avec la structure d'une preuve et le contrôle de sa validité.

La nécessaire formalisation

Dans le travail sur le langage, il y a une différence importante entre Aristote, les Stoïciens, la logique de Port-Royal d'un côté, et Leibniz, Boole, Frege de l'autre : les premiers se contentent du langage courant pour exprimer les raisonnements, les seconds proposent un autre langage, celui de l'algèbre pour Leibniz et Boole, et un système de signes nouveaux pour Frege.

Pour autant, ces systèmes peuvent tous être qualifiés de formels, dans le sens où ils proposent une mise en forme des propositions et des raisonnements selon un code plus ou moins contraignant :

– les auteurs de la logique de Port-Royal revendiquent cependant de ne pas être trop formels. De fait, la classification des propositions et des syllogismes selon leurs formes est une présentation dont ils héritent, et pour montrer qu'il n'y a rien d'intéressant à s'attacher à la forme, ils n'utilisent pas de variables pour donner des schémas, mais des exemples prototypiques.

- Aristote utilise des variables aux places que prennent les termes dans les syllogismes. Il dégage ainsi des lois logiques qui sont une formalisation de certains raisonnements. Par contre, il ne s'attache pas à formaliser le contenu de la proposition, et dispose de plusieurs façons de dire chacun des quatre types de propositions.
- Les Stoïciens utilisent également des variables, mais aux places des propositions. Et ils semblent plus attachés à l'idée d'utiliser toujours les mêmes mots pour les connecteurs, introduisant en cela des constantes logiques dans le langage.
- Avec Leibniz, puis Boole et Frege, l'approche formelle de la logique est totalement assumée. Elle en permet un traitement rigoureux, à l'image de ce qui se fait en mathématiques.

Pour ce qui est de la formalisation du langage, j'ai distingué trois registres de représentation sémiotique, au sens de R. Duval : le registre de la langue naturelle, le registre intermédiaire, et le registre formalisé. Cela me permet d'éviter, pour une proposition mathématique, une utilisation des qualificatifs « formelle » ou « informelle » qui ne serait pas fondée sur des critères distinctifs très clairs. Dans l'activité mathématique, l'interaction entre écriture symbolique et langue naturelle s'accompagne d'une dialectique féconde entre différentes formulations d'une proposition où la part de chacun des deux codes varie. Ces différentes formulations relèvent chacune de l'un des trois registres mentionnés ci-dessus. Le mathématicien sait choisir la formulation la plus adaptée à son travail mathématique. En reliant cette notion de reformulation aux registres de représentation sémiotique de R. Duval, nous pouvons alors, à l'instar de ce qu'il dit d'une façon générale sur les registres de représentation sémiotique, arguer d'une part que ces différentes formulations sont nécessaires à la compréhension, d'autre part que les reformulations mettant en jeu des changement de registre peuvent s'accompagner de problèmes de non-congruence particulièrement complexes pour les élèves.

Dans une perspective didactique, une autre formalisation est à questionner : celle des connaissances sur les notions de logique. R. Douady, dans son article *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, dit qu'un concept mathématique est *outil* « lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème », et entend par *objet* « l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement » (Douady, 1986, p. 9). Les notions de logique sont forcément présentes dans la classe dans leur dimension outil de l'activité mathématique. Mais expliciter des connaissances à leur sujet signifie les considérer également dans leur dimension objet. Comment décontextualiser et formuler ces connaissances sur les notions de logique, de façon à ce qu'elles prennent place dans un corpus de connaissances mathématiques plus large, et puissent être réinvesties ? Il n'existe pas actuellement de corpus se présentant comme *la logique des mathématiques*, pour la constitution duquel il aurait effectivement fallu se poser la question de la formalisation nécessaire de ses énoncés, puis la question des adaptations de cette formalisation dans un contexte d'enseignement.

La dialectique entre syntaxe et sémantique

La syntaxe s'occupe de la construction des expressions. Une approche syntaxique permet de déterminer si une expression est bien construite ou non sans avoir besoin d'avoir accès au sens des signes avec lesquels elle est construite. La sémantique s'occupe du sens, c'est-à-dire de l'interprétation des signes. En mathématiques, un regard syntaxique sur une proposition permet de dire si elle est bien formée (ce qui n'est pas le cas par exemple de « $\forall x\, \exists y > x$ », x et y étant des variables astreintes à $\mathbb{R}$, qui serait pourtant peut-être tolérée comme expression signifiant « pour tout réel, il en existe un qui lui est strictement supérieur »), d'en dégager la structure logique. Par exemple, « si p est premier et divise ab, alors p divise a ou p divise b », dans lequel les variables a, b, p sont astreintes à $\mathbb{Z}$, a une structure globale de la forme

$$\forall p\, \forall a\, \forall b\, \Big((A[p] \text{ ET } B[p,a,b]) \Rightarrow (C[p,a] \text{ OU } C[p,b])\Big)$$

Un regard sémantique s'intéresse à la vérité des propositions. Il y a une dialectique entre les deux aspects : repérer la structure d'une proposition aide à en comprendre le sens, comprendre le sens aide à dégager la structure, même si en théorie cela n'est pas nécessaire (en fait, la structure logique n'est pas toujours aussi clairement mise en évidence que dans l'exemple ci-dessus, par exemple, pour cette même proposition, on pourra dire également « si p premier divise ab, alors p divise a ou p divise b », masquant ainsi la conjonction dans la prémisse). Par ailleurs, à l'instar des règles de transformation des expressions algébriques, des règles de transformation des propositions qui préservent l'équivalence ont un fondement sémantique (l'équivalence est une notion sémantique), comme par exemple la règle qui dit que la négation de la proposition « Pour tout x, $P[x]$ » est la proposition « il existe au moins un x tel que NON $P[x]$ ». Mais une fois établies ces règles, elles peuvent être utilisées comme des règles de manipulations des signes indépendamment de leur sens, et être ainsi considérées comme des manipulations syntaxiques.

Dans les systèmes étudiés il n'y a pas de séparation nette entre les plans syntaxique et sémantique, mais cette dialectique est très présente dans :
– la syntaxe des langages proposés par Leibniz, Boole et Frege,
– les règles de transformations comme les règles de conversion des propositions chez Aristote,
– les schémas de déductions, comme les syllogismes chez Aristote ou la règle du *modus ponens* chez Frege.

Ces auteurs expliquent, justifient leurs choix par des considérations sémantiques, et montrent la possibilité d'un travail syntaxique une fois ces choix faits. J. Largeault explique par exemple ainsi l'utilisation de la sémantique chez Frege (explication qui rappelle le schéma de l'utilisation du système de Boole donné en page 63) :

> Enfin, d'après la façon dont Frege organise sa matière et qui continuera d'être la sienne dans ses ouvrages postérieurs, il apparait que l'interprétation sémantique apparaît à deux moments, comme but et aboutissement de la formalisation (établir un « calcul qui soit en même temps une langue »), et comme étape intuitive préparatoire à la construction du formalisme. Sous ce dernier aspect, la sémantique est une infrastructure, un échafaudage étranger à l'édifice lui-même, ou si l'on préfère, elle a un peu le rôle de ces figures que le mathématicien trace pour lui-même au brouillon mais qui n'auront pas place dans la véritable démonstration. (Largeault, 1970, pp. 104-105)

Dans sa thèse *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*, R. Kouki étudie plus particulièrement l'articulation des dimensions syntaxique et sémantique dans l'apprentissage des notions d'équation, inéquation et fonction. Cet aspect, présent dans un certain nombre de travaux de didactique de l'algèbre présentés par l'auteur, était cependant relativement peu développé. R. Kouki montre à travers une étude épistémologique que le point de vue logique « offre un cadre unificateur pour aborder et clarifier les concepts d'équations, inéquations et fonctions sous le double aspect syntaxique et sémantique » (Kouki, 2008, p. 29). En s'appuyant sur l'étude des programmes et des manuels, pour laquelle il croise l'étude en termes de praxéologies [20] avec la catégorisation logique en termes de sémantique et syntaxe, il montre ensuite « la prédominance des techniques syntaxiques dans le traitement de ces objets mathématiques » (*ibid*, p. 343). À travers deux expérimentations (un questionnaire et une mini-ingénierie), il montre également que peu d'élèves sont en mesure de mobiliser une articulation entre les points de vue sémantique et syntaxique pour la résolution d'une tâche.

En ce qui concerne la logique, l'écriture d'une proposition dans un langage formalisé est souvent jugée inutilement compliquée (même s'il ne s'agit que de rendre les quantifications explicites), et des formulations plus imagées lui sont souvent préférées. Par exemple, pour exprimer que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, on dira en Terminale « tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand ». La structure logique de cette proposition n'est pas explicite, notamment l'expression « pour x assez grand » masque des quantifications. Si on gagne en facilité de compréhension pour les élèves avec cette définition, on perd la possibilité de faire le lien entre structure de la proposition et structure de sa démonstration et des transformations possibles de la proposition (par exemple passer à la négation) sont bien plus difficiles.

20. Pour la Théorie Anthropologique du Didactique, toute activité met en œuvre une organisation, qu'on nomme praxéologie.

Justification des choix faits pour la constitution d'une référence

Ces études épistémologique et didactique m'amènent à proposer dans la prochaine partie de cette thèse une référence dans laquelle la présentation des notions de logique combine trois approches :

- à partir de la logique mathématique. L'étude historique a montré que la logique mathématique est une branche récente des mathématiques qui peut être considérée comme un aboutissement de ce qu'ont cherché à faire différents concepteurs de systèmes logiques depuis l'Antiquité grecque. Nous avons également vu que le langage des prédicats était particulièrement adapté à la description des énoncés mathématiques puisqu'il permet d'avoir des prédicats portant sur plusieurs variables, sur lesquelles il est facile de faire opérer des quantificateurs. La logique mathématique est donc particulièrement adaptée comme référence formelle pour rendre compte de la logique des mathématiques.
- À partir de l'étude des pratiques langagières des mathématiciens. J'ancre ainsi la présentation de ces notions de logique dans l'activité mathématique en prenant en compte la façon dont elles sont exprimées dans le discours mathématique. J'intègre ainsi la dimension pragmatique des énoncés produits dans la classe de mathématiques, et la logique des prédicats me sert de cadre d'interprétation de certaines formulations complexes et parfois ambiguës qui font pourtant partie des pratiques langagières des mathématiciens, largement importées dans la classe de mathématiques.
- À partir de travaux didactiques. J'ancre ainsi la présentation de ces notions de logique dans la classe de mathématiques, en prenant en compte des résultats d'études didactiques qui montrent les difficultés que la complexité de ces notions peut amener chez les élèves.

Deuxième partie

Proposition d'une référence pour l'enseignement de notions de logique

J'introduis dans la transposition didactique de notions de logique au lycée un *savoir de référence* entre le savoir savant et le savoir à enseigner, intermédiaire nécessaire du fait que ce qu'il y a à enseigner relève plus de connaissances pratiques du mathématicien que de connaissances théoriques. Mais un tel savoir de référence n'existe pas. Il m'est alors nécessaire de constituer une référence par rapport à laquelle je vais situer l'analyse didactique, qui n'est pas un savoir de référence puisqu'elle n'est pas partagée et reconnue par la communauté mathématique. Elle pourrait cependant contribuer à la construction d'un tel savoir.

Les études épistémologique et didactique m'ont conduite à proposer une présentation des notions de logique qui combine trois approches : une approche à partir de la logique mathématique (nous avons vu, tant du point de vue épistémologique que du point de vue didactique, que la logique des prédicats est pertinente pour l'analyse du langage et du raisonnement mathématiques), une approche à partir des pratiques langagières des mathématiciens (nous avons vu que les mathématiciens ne s'expriment pas dans un langage complètement formalisé et que la reformulation est féconde pour l'activité mathématique ; le langage des prédicats est une référence, mais ne saurait alors être le seul pris en compte), une approche à partir de travaux didactiques (nous avons déjà vu rapidement certaines difficultés des élèves qui y ont été analysées).

Dans un premier chapitre, je propose une présentation des notions de logique qui sont des éléments constitutifs du langage mathématique : proposition, variable, connecteur, quantificateur. Je m'inspire largement des réflexions du logicien français Daniel Lacombe, et de son polycopié *cours de logique élémentaire* (Lacombe, s. d.), dans l'introduction duquel il décrit ainsi sa démarche :

> Rappelons qu'il ne s'agit nullement ici de constituer quelque « système formel » que ce soit. Nous nous proposons simplement d'étudier le langage mathématique usuel (logico-ensembliste) muni de sa signification « intuitive » ordinaire (supposée unique et bien déterminée). Nous n'essaierons pas de discuter cette signification (sinon pour préciser quelques points douteux), ni de déterminer exactement le domaine sur lequel elle porte. Nous nous bornerons à analyser les différents procédés linguistiques qui permettent de former des propositions plus ou moins complexes relatives à ce domaine. (Lacombe, s. d., p. 1)

Je m'appuie également sur le polycopié du cours *Langage mathématique*[21] rédigé par René Cori (Cori, s. d.).

Dans un second chapitre, je m'intéresse aux raisonnements. Les modélisations des démonstrations que propose la logique mathématique sont beaucoup moins connues que le langage des prédicats. Les mathématiciens utilisent fréquemment des formulations relevant du re-

21. Ce cours s'adresse aux étudiants des parcours math, info et math-info en première année d'université.

gistre formalisé [22], ou qui en sont du moins assez proches. Par contre, la rédaction des démonstrations reste éloignée du formalisme qu'en propose la logique mathématique, d'une part parce que ces démonstrations sont ponctuées de commentaires *épimathématiques* qui servent à donner des indications au lecteur sur les variables utilisées, les inférences faites, d'autre part parce que nous choisissons dans ces démonstrations de détailler certains passages en explicitant rigoureusement toutes les inférences, ou au contraire de passer rapidement d'une hypothèse à une conclusion sans relater tout le chemin déductif entre les deux. Ici encore, je regarde les raisonnements en relation avec la modélisation proposée par la logique mathématique, en prenant notamment comme référence la déduction naturelle, et j'ancre cette approche théorique dans l'activité mathématique en commentant certaines pratiques dans la rédaction des démonstrations. Je détaillerai moins la présentation des différents types de raisonnement que celle des éléments constitutifs du langage mathématique, suivant en cela le choix que j'ai fait dans cette thèse de privilégier le pilier langage de la logique, éventuellement au détriment du pilier raisonnement. En particulier, je ne présente pas de difficultés des élèves par rapport aux raisonnements, pourtant mises en évidence dans de nombreux travaux didactiques.

22. Pour la caractérisation de ce registre, voir page 90.

Chapitre 3

Notions de logique et étude du langage mathématique

Sommaire

Je présente dans ce chapitre les notions de logique qui sont des éléments constitutifs du langage mathématique : proposition, variable, connecteur, quantificateur.

Je précise d'abord ce que j'appelle *langage mathématique*, qui se rapporte à ce qui concerne les objets mathématiques, et eux uniquement. Je le distingue notamment du *discours mathématique* dont il est une partie seulement, et qui concerne plus largement les objets mathématiques mais aussi des personnes qui les manipulent.

À l'instar de ce qui est fait dans les systèmes logiques que nous avons étudiés au premier chapitre, je précise ensuite en premier lieu ce que recouvre l'expression *proposition mathématique*, non pas en donnant une définition mathématique, mais en me basant sur une conception intuitive de cette notion, tout en attirant l'attention sur certaines idées erronées. Je fais ensuite de même pour la notion de variable, en insistant particulièrement sur la distinction entre variable libre et variable liée qui me paraît essentielle pour la compréhension des énoncés mathématiques (connaître le statut des variables qui interviennent dans un énoncé permet de savoir de qui parle cet énoncé). L'approche de ces deux notions se limite ainsi à une présentation naïve, mais en adéquation avec la façon dont peut les définir la logique mathématique. Je rappelle que ces deux notions sont absentes des programmes, et, à ma connaissance, elles n'ont pas été l'objet de travaux didactiques spécifiques (du point de vue de la logique, puisque la notion de variable est certes présente dans les travaux de didactique de l'algèbre, mais essentiellement d'un point de vue cognitif).

La présentation de ces notions est un préalable à celle des connecteurs et des quantificateurs. Pour les connecteurs ET et OU, la négation, l'implication, et pour les quantificateurs, j'adopte de façon systématique les trois approches déjà mentionnées :
- à partir de la logique mathématique, qui ancre les notions dans une référence épistémologiquement adéquate ;
- à partir de l'étude des pratiques langagières des mathématiciens à travers l'expression de ces notions dans le discours mathématique (je relève notamment des implicites et des ambiguïtés qui sont potentiellement sources de difficulté pour les élèves),
- à partir de travaux didactiques, qui ont mis en évidence et analysé des difficultés des élèves (à ma connaissance, ces travaux n'ont jamais spécifiquement porté sur les connecteurs ET et OU).

3.1 Langage mathématique, discours mathématique, expressions mathématiques

Les linguistes distinguent la langue, qui est un système de signes qui permet la communication, du langage, qui est la mise en activité de la langue, par un sujet, à des fins de communication (voir par exemple Rebière, 2013, p. 221). En logique mathématique, un langage est un ensemble de signes, avec lesquels sont construites les formules (voir la définition d'une formule en annexe page 446). C'est dans le sens des linguistes qu'il faut entendre *langage* dans l'expression *langage des mathématiciens*, mais c'est dans le sens des logiciens qu'il faut entendre *langage* dans l'expression *langage mathématique*, que je vais maintenant décrire.

Le *langage mathématique* est une partie de ce que j'appellerai *discours mathématique*, qui est l'ensemble des phrases, et de certains éléments de ces phrases (ceux à qui l'on peut donner un sens même si on les isole du reste de la phrase), prononcés, écrits, pensés dans un contexte où une ou des personnes font des mathématiques. Parmi elles, certaines sont des phrases qui disent des faits sur les objets mathématiques. Ce sont ces phrases, et certains de leurs éléments, qui constituent le *langage mathématique*. Elles sont des propositions au sens déjà donné par Aristote de phrases dans lesquelles réside le vrai ou le faux. Par exemple, la phrase « Tous les nombres réels ont un carré positif » fait partie du langage mathématique, c'est une proposition. Dans la proposition équivalente « pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ », la formalisation dans le langage des prédicats permet d'isoler les éléments à partir desquels la proposition est construite : le quantificateur universel portant sur la variable x, et la proposition $x^2 \geqslant 0$, à l'intérieur de laquelle nous pouvons isoler des éléments qui désignent des objets mathématiques : x^2 et 0. Finalement, le *langage mathématique* est constitué d'*expressions mathématiques* qui peuvent être vues comme :

> des assemblages de signes qui obéissent à certaines règles et à certaines conventions, lesquelles peuvent être soit très générales (voire universellement admises) soit particulières à un contexte donné (un ouvrage, un chapitre, un paragraphe...) (Cori, s. d., p. 3)

Voici quelques exemples d'expressions mathématiques :

(a) $2x + y = -3$.

(b) L'ensemble des multiples de 7.

(c) $\{x \mid f(x) = a\}$.

(d) $x \mapsto \int_1^x t dt$.

(e) a est solution de l'équation $x^2 - xy = 0$ d'inconnue réelle x.

(f) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

(g) Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

On peut classer les expressions mathématiques en deux grandes catégories :

– les expressions qui servent à désigner des objets mathématiques, que nous appellerons des NOMS (qui correspondent aux termes du langage des prédicats : voir en annexe page 449) ;
– les expressions qui disent des faits concernant les objets mathématiques ; nous les appellerons des PROPOSITIONS (qui correspondent aux formules du langage des prédicats, voir en annexe page 449). Une proposition est susceptible d'être vraie ou fausse, c'est-à-dire que cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, même si nous

ne sommes pas forcément en mesure de répondre à cette question. Nous reviendrons là-dessus dans la section suivante, qui concerne les variables.

Nous dirons que deux expressions mathématiques sont SYNONYMES si :

– ou bien ce sont deux noms et ces deux noms désignent le même objet quelles que soient les circonstances ;
– ou bien ce sont deux propositions et ces deux propositions sont en même temps vraies et en même temps fausses, quelles que soient les circonstances. Dans le cas des propositions, on dit souvent ÉQUIVALENTES au lieu de synonymes.

Je préciserai plus loin ce que signifie « quelles que soient les circonstances » (voir page 113).

Certains assemblages de signes ne sont pas des expressions mathématiques. Il en va ainsi des assemblages qui sont « mal formés », au sens où ils ne respectent pas la syntaxe des signes utilisés, par exemple : « $cos = x^2$ », « $\{x \in \mathbb{R}$ ».

D'autres assemblages sont bien formés, mais ne sont pas des expressions mathématiques. Par exemple, « nous avons donc montré que le carré d'un nombre réel est toujours positif » n'est pas une phrase du langage mathématique car elle ne dit pas un fait sur des objets mathématiques, mais un fait sur l'activité d'êtres humains. C'est une phrase du *discours mathématique*, que nous pourrions rencontrer dans un texte de démonstration. Les phrases exprimant une inférence, par exemple $(*)$: « n est pair donc n^2 est pair », ne font pas non plus partie du langage mathématique. La logique mathématique formalise de telles phrases, mais ce ne sont pas des propositions. Cela n'a effectivement pas de sens de se demander si elles sont vraies ou fausses. On pourrait être tenté de dire que la phrase $(*)$ est vraie, mais on serait gêné de dire que la phrase « 3 est pair donc 3^2 est pair » est vraie, pourtant elle n'est qu'une instanciation de la phrase $(*)$. La phrase $(*)$ exprime un raisonnement, la question qui se pose par rapport à ce raisonnement n'est pas celle de sa vérité mais celle de sa validité (voir distinction déjà faite par Aristote, page 37). Reprenant elle aussi dans sa thèse [1] un cours de D. Lacombe, F. Rakotovoavy situe de telles phrases, et d'autres qui plus généralement permettent de suivre le raisonnement, au niveau *épimathématique* :

> Nous dirons que, dans un endroit donné d'un texte mathématique donné, un certain syntagme se situe au niveau épimathématique, lorsque ce syntagme ne désigne aucun objet mathématique, mais fournit au lecteur une indication sur la manière dont il convient de compléter, de rectifier et de relier entre elles les portions strictement mathématiques du texte environnant ce syntagme, de façon à obtenir soit une proposition mathématique correcte et complète, soit une démonstration mathématique convenablement mise en forme. (Rakotovoavy, 1983, p. 14)

Autre exemple d'expression se situant au niveau *épimathématique* : « soit x un nombre réel dont le carré est inférieur à 4 ». Cette phrase sert à introduire la variable x dans

1. Intitulée « Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques, de certains adjectifs marqueurs de variance. »

le discours. Il ne s'agit pas seulement de préciser dans quel ensemble la variable x peut prendre ses valeurs, cette phrase atteste d'un acte d'un locuteur qui donne un nom à un objet mathématique, et qui va ensuite dire des choses sur cet objet. Le caractère « quelconque » de cet objet permet de savoir que ce qui va être affirmé de x pourra l'être de tout nombre réel dont le carré est inférieur à 4. Par contre, une phrase telle que : « la démonstration suivante se fait facilement par récurrence » ne se situe pas au niveau *épimathématique*, c'est un commentaire sur l'activité mathématique, elle n'est pas nécessaire, même si elle peut être utile, pour suivre le raisonnement.

Revenons maintenant aux expressions mathématiques. On les utilise comme des briques qui permettent, comme dans un jeu de construction, de fabriquer d'autres expressions mathématiques. Par exemple, à partir des noms x et 1, on peut former le nom $x + 1$. Puis :

la proposition : $x + 1 = 0$,

le nom : l'équation $x + 1 = 0$,

la proposition : l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution positive.

Mettre au jour une telle construction relève d'une analyse syntaxique des expressions mathématiques. D'une certaine façon, c'est faire de la grammaire du langage mathématique. L'analyse grammaticale occupe une place importante dans l'enseignement des langues, mais elle est peu présente dans l'enseignement mathématique (bien sûr les textes officiels soulignent l'importance du travail sur l'expression en mathématiques, mais pas au sens d'un travail syntaxique).

Dans l'activité mathématique, la vocation des propositions est d'être énoncées, et cette énonciation constitue l'acte d'affirmation de leur vérité. Dans la pratique, on ne dit pas « la proposition "tous les réels ont un carré positif" est vraie » mais simplement « tous les réels ont un carré positif ». L'énonciation d'une proposition constitue un acte de langage (Austin, 1970) : l'acte d'assertion. Nous avons vu que, dans son *Idéographie*, Frege utilisait un symbole pour le jugement (voir page 66) qu'il distinguait de la « *simple combinaison d'idées*, à propos de laquelle celui qui l'écrit n'exprime pas s'il lui attribue la vérité ou non » (Frege, 1999, p. 15).

Le logicien fait alors un pas de côté pour s'intéresser aux propositions en tant qu'objets (ce que faisaient déjà Aristote et les Stoïciens, la grande nouveauté de la logique mathématique ayant été d'en faire des objets mathématiques), notamment d'un point de vue syntaxique en en analysant les constituants. C'est ce que nous allons faire maintenant, en commençant par un élément caractéristique du langage mathématique : les variables.

3.2 Variable

En mathématiques aujourd'hui, nous utilisons des lettres, majuscules ou minuscules, de différents alphabets, pour représenter les variables. Les signes « x », « f », où x et f sont des variables, constituent à eux seuls des expressions mathématiques, ce sont des noms, au même titre que les expressions « 2 », « la fonction *sinus* ». L'utilisation d'une variable en mathématiques s'accompagne de la précision du type d'objet que la variable désigne, c'est-à-dire de la mention d'un certain ensemble auquel la variable est *astreinte*. Toutes les expressions mathématiques qui peuvent être formées avec le nom « 2 » sont encore des expressions mathématiques de même nature (nom ou proposition) quand on y remplace 2 par une variable x, astreinte par exemple à l'ensemble des nombres réels (sous réserve que l'expression ait un sens pour tous les nombres réels). Ainsi, « x^2 est positif » est une proposition, au même titre que « 2^2 est positif », la première dit un fait sur un objet qui s'appelle x, la deuxième sur 2.

L'inverse n'est cependant pas vrai : si on remplace la variable x par 2 dans l'expression « pour tout réel x, x^2 est positif », on obtient « pour tout réel 2, 2^2 est positif », qui n'est pas une expression mathématique. Il y a en effet une différence fondamentale entre les propositions « 2^2 est positif » et « x^2 est positif », c'est la possibilité de former à partir de la deuxième proposition des expressions dans laquelle la variable x est *muette*, telles que « pour tout réel x, x^2 est positif ». Cette proposition ne parle pas de x, elle donne une information sur l'ensemble des nombres réels. Un cas bien connu de variable *muette* (on dit aussi variable *liée*) est la variable d'intégration dans une intégrale[2], par exemple t dans $\displaystyle\int_0^1 t^2 dt$. Cette expression est le nom d'un nombre réel, qui ne « dépend » pas d'un objet qui s'appellerait t. D'ailleurs le nombre réel désigné par cette expression a aussi pour nom $\dfrac{1}{3}$, où la variable t ne figure pas. En revanche, la variable x n'est pas muette dans l'expression $\displaystyle\int_0^x t^2 dt$, qui est syntaxiquement proche de la précédente. Ici, l'objet désigné par ce nom « dépend » de x. Un autre nom du même objet est $\dfrac{1}{3}x^3$, et il est impossible de lui trouver un nom dans lequel la variable x ne figure pas. La variable x dans cette expression est *parlante* (on dit aussi variable *libre*). On peut maintenant préciser dans quels cas on obtient encore une expression mathématique en substituant une valeur à une variable : une telle substitution est possible quand la variable est libre. Les variables libres ont ainsi un rôle de marque-place dans les expressions. Cette substitution qui conserve le statut d'expression n'est pas possible dans le cas de variables muettes : l'expression $\displaystyle\int_0^1 3^2 d3$ n'a pas de sens.

Revenons alors à la précision « quelles que soient les circonstances » utilisée dans la définition d'expressions synonymes (voir page 111). Les noms x et y ne sont pas synonymes, et les propositions $2x + 6 = 0$ et $2y + 6 = 0$ ne sont pas équivalentes. En effet, dans

2. Les manuels de Terminale utilisent cette terminologie, en disant par exemple que la variable est muette car « elle n'intervient pas dans le résultat ».

ces expressions les variables x et y sont libres, ces expressions prennent différentes « valeurs » selon les valeurs attribuées aux variables x et y, qui n'ont aucune raison d'être les mêmes. Ceci est souvent une difficulté, notamment pour les élèves qui ont en tête que « peu importe la lettre choisie pour la variable », ce qui est vrai pour les variables muettes, puisque les expressions dans lesquelles elles sont utilisées ne dépendent pas d'elles. C'est généralement à propos de variables muettes que le professeur peut être amené à tenir ce discours, par exemple à propos de la variable d'intégration. Mais quand les variables sont libres, deux variables différentes n'ont aucune raison de désigner le même objet « quelles que soient les circonstances ». Peut-être peut-on s'en convaincre en tenant le raisonnement suivant :

> Supposons que les propositions (1) $2x + 6 = 0$ et (2) $2y + 6 = 0$ soient équivalentes, ainsi que les expressions (1') $x = -3$ et (2') $y = -3$, alors toutes expressions dans lesquelles (1) et (2), ou (1') et (2'), seraient à la même place, seraient équivalentes. Par exemple, « Si $2x + 6 = 0$ alors $x = -3$ » et « Si $2x + 6 = 0$ alors $y = -3$ » seraient équivalentes. On voit assez facilement que ça n'est pas le cas.

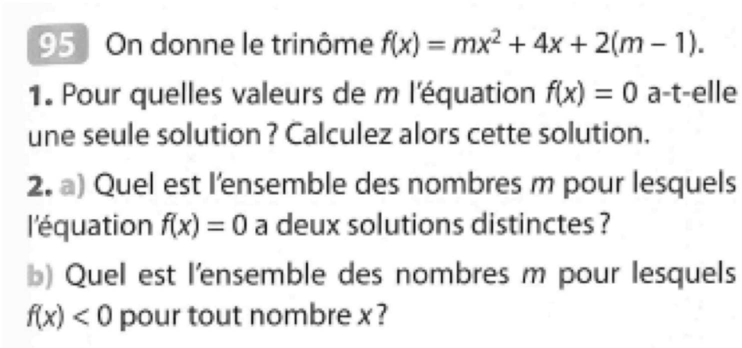
Le statut (libre ou liée) d'une variable dans une expression est indépendant de la signification de cette expression. Il s'agit d'une notion purement syntaxique : une variable est liée quand elle est dans le champ d'un *mutificateur* (« signe qui rend muet »). Nous avons déjà vu que le signe d'intégrale $\int_{\dots}^{\dots} \dots d \dots$ est un mutificateur, il en est de même, par exemple[3], du signe de somme indexée $\sum_{\dots=\dots}^{\dots} \dots$, de la flèche d'application $\dots \mapsto \dots$, du syntagme « équation d'inconnue... », et bien sûr des quantificateurs.

Une proposition qui ne comporte pas de variables libres est une proposition *close*, par exemple la proposition « il existe un réel x tel que $x + 3 = 0$ », dans laquelle la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$. Une proposition qui contient des variables libres est une proposition *ouverte*, par exemple la proposition « $x + 3 = 0$ », dans laquelle la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$. On pourrait alors être tenté de donner un critère sémantique pour distinguer le statut de la variable x dans ces deux propositions : des connaissances mathématiques me permettent de savoir que la première proposition est vraie, alors qu'il n'est pas possible d'attribuer une valeur de vérité à la deuxième proposition, par manque d'information sur l'individu x. V. Durand-Guerrier dit qu'un énoncé est *contingent* pour un sujet donné à un instant donné « si ce sujet n'a pas les moyens de se prononcer sur la vérité de cet énoncé, soit que la valeur de vérité de l'énoncé ne soit pas contrainte par la situation, soit que le sujet ne dispose pas des informations nécessaires pour se prononcer » (Durand-Guerrier, 2005, p. 41). Il s'agit d'une caractéristique sémantique et pragmatique. La proposition « $x + 3 = 0$ » est contingente dans le premier sens donné par V. Durand-Guerrier. Mais les notions de proposition ouverte et de proposition contingente ne sont pas identiques : une proposition telle que « $x^2 + 3 \geqslant 0$ » dans laquelle la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$,

3. La liste est loin d'être exhaustive.

est une proposition ouverte, pourtant elle n'est pas contingente, en tout cas pas pour un sujet qui sait que le carré d'un réel est positif, et donc que cette proposition est vraie indépendamment de la variable x.

Dans certaines activités proposées aux élèves, même si cela n'est évidemment pas demandé explicitement, et même si ça n'est pas ainsi que l'envisagent les enseignants, la tâche consiste à donner une expression sans variable muette synonyme d'une expression qui en comporte une. C'est le cas par exemple quand il leur est demandé de calculer la valeur d'une intégrale telle que $\int_0^1 x^2 dx$, de déterminer l'ensemble des solutions d'une équation (ici il s'agit de trouver une expression en extension d'un ensemble donné en compréhension[4], par exemple de $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 = 0\}$). C'est aussi le cas de la première question de l'exercice suivant, extrait du manuel Transmath 1S :



95 On donne le trinôme $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1)$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculez alors cette solution.

2. a) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes ?

b) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $f(x) < 0$ pour tout nombre x ?

FIGURE 3.1 – Exercice extrait du manuel Transmath 1S

Dans cette question il s'agit en fait de donner une proposition équivalente à « l'équation $mx^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$ a une seule solution », en l'occurrence « $m = -1$ OU $m = 2$ » (le fait de parler de trinôme astreint de manière implicite la variable m à $\mathbb{R}^*$, sans cette restriction, la proposition équivalente serait « $m = -1$ OU $m = 2$ OU $m = 0$ »). Il est possible de faire vivre ces notions de synonymie, et de statut des variables, dans la classe de mathématiques, en soulignant cette équivalence, et le fait que les deux propositions parlent de m, lors de la correction d'un tel exercice. Elles peuvent être également pertinentes pour marquer la distinction entre la définition de « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée », et « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par M ». La première proposition est équivalente à « il existe un réel M tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par M », la variable M est mutifiée par le quantificateur existentiel, alors que dans la deuxième proposition elle est libre.

Le statut des variables dont nous parlons ici est différent de ce qui est appelé « les différents statuts de la lettre » dans certains travaux de didactique de l'algèbre, qui étudient un statut cognitif de la lettre, c'est-à-dire des conceptions que l'on peut distinguer en analysant l'utilisation des lettres par une personne lors d'une activité mathématique (voir par exemple Grugeon, 1997).

4. Un ensemble est défini en extension quand on donne la liste de ses éléments, en compréhension quand on donne une propriété caractéristique de ses éléments.

Du point de vue de l'analyse du langage mathématique, ces lettres sont toutes des variables, qui sont des noms d'objets. Ce point de vue sur les variables n'a pour l'instant pas été explicitement l'objet de recherches didactiques. Je fais l'hypothèse que plusieurs pratiques font obstacle à ce qu'il vive dans la classe de mathématiques au lycée. Tout d'abord, dans l'enseignement secondaire, les élèves entendent parler de variable essentiellement à propos de variables astreintes à des ensembles de nombres [5] (dans le contexte de l'algèbre, ou dans le contexte des fonctions). Les élèves rencontrent des lettres majuscules qui sont des noms de points du plan, ou des variables qui sont des noms de fonctions, ou de vecteurs, mais le mot « variable » n'est quasiment jamais utilisé à leur propos. Par ailleurs, comprendre qu'une variable est un nom d'objet nécessite de distinguer ce nom d'objet de l'objet lui-même, c'est-à-dire distinguer le signifiant (la variable) du signifié (un objet mathématique). Or, certaines expressions couramment utilisées masquent cette distinction, par exemple quand on dit « a et b sont des nombres réels », avant de donner les identités remarquables. Un tel énoncé est utilisé pour introduire des variables, il s'agit d'un acte d'un locuteur en train de faire des mathématiques. Il s'agit même de deux actes confondus en une seule expression : considérer deux nombres réels et les nommer a et b. À ce titre, cet énoncé se situe au niveau *épimathématique*.

3.3 Connecteurs ET et OU

3.3.1 Approche à partir de la logique mathématique

D'un point de vue syntaxique, les CONNECTEURS LOGIQUES servent à construire de nouvelles propositions à partir d'une ou plusieurs propositions. D'un point de vue sémantique, chaque connecteur logique est défini par son comportement par rapport aux valeurs de vérité des propositions utilisées dans cette construction : un connecteur logique à n places est alors défini comme une application de $\{V, F\}^n$ dans $\{V, F\}$, où V représente la valeur de vérité Vrai, et F la valeur de vérité Faux. Les connecteurs le plus souvent utilisés en mathématiques sont : NON (connecteur unaire), ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À (connecteurs binaires). Je reviendrai plus en détail sur chacun d'eux.

Les connecteurs binaires ET et OU permettent à partir de deux propositions P et Q de former :
– leur conjonction, qui est la proposition (P ET Q)
– leur disjonction, qui est la proposition (P OU Q)

5. Notons cependant une nouveauté dans les programmes actuels du lycée : la présence de variables aléatoires, qui sont des fonctions, et la présence de variables en algorithmique, celles-ci présentant des différences importantes avec les variables en mathématiques. Par exemple cela n'a pas de sens en mathématiques de dire « j'affecte à la variable n la valeur $n + 1$ ».

Les *tables de vérité* suivantes indiquent le comportement des connecteurs ET et OU par rapport aux valeurs de vérité :

P	Q	P ET Q
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

FIGURE 3.2 – Table de vérité du connecteur ET

P	Q	P OU Q
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

FIGURE 3.3 – Table de vérité du connecteur OU

Un connecteur binaire est défini en associant une des valeur Vrai, Faux à chacun des quatre couples de valeurs de vérité. Il y a 16 façons de faire cela et donc 16 connecteurs binaires différents. Les tables de vérité des connecteurs ET et OU reflètent le sens des mots « et », « ou » dans la langue courante. Le fait que le connecteur OU corresponde au « ou » inclusif est un choix arbitraire. Voici quelques propriétés des connecteurs ET et OU :

- tout d'abord, on peut remarquer que (P ET Q) est vraie dans le seul cas où P est vraie et Q est vraie, et fausse dans les trois autres, et que (P OU Q) est fausse dans le seul cas où P est fausse et Q est fausse, et vraie dans les trois autres.
- les connecteurs ET et OU sont distributifs l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire que

$$[P \text{ ET } (Q \text{ OU } Q')] \text{ est équivalente à } [(P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } Q')]$$
$$[P \text{ OU } (Q \text{ ET } Q')] \text{ est équivalente à } [(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } Q')]$$

- les propriétés suivantes sont appelées lois d'absorption :

$$[P \text{ ET } (P \text{ OU } Q)] \text{ est équivalente à } P$$
$$[P \text{ OU } (P \text{ ET } Q)] \text{ est équivalente à } P$$

Il y a également des règles sur le comportement de ET et OU vis-à-vis de la négation sur lesquelles nous reviendrons dans la section 3.4.

Il est naturel d'exprimer les connecteurs ET et OU dans le discours mathématique en utilisant les mots « et » et « ou ». Cependant, nous allons voir que tous les « et » utilisés dans le discours mathématique ne correspondent pas à des connecteurs ET, et que, plus souvent qu'on ne le croit, l'usage des mots « et » et « ou » en mathématiques est différent de celui qu'on en fait dans la langue courant.

3.3.2 Expression dans le discours mathématique

Différents « et » en mathématiques

La fonction syntaxique des connecteurs logiques ET et OU est de coordonner deux propositions. Mais dans la phrase « Pierre et Paul sont cousins » le mot « et » ne coordonne pas les deux propositions « Pierre est cousin » et « Paul est cousin » ; il sert à lier les éléments auxquels s'applique la propriété « être cousins » (on pourra alors parler de *et-couple*, ici la conjonction « et » n'est pas un connecteur binaire). La situation est analogue dans la proposition « les nombres m et n sont premiers entre eux ». Par contre, il y a bien coordination entre deux propositions dans la phrase « Pierre et Paul sont cousins de Jean », ou dans la proposition « les nombres m et n sont premiers » (on pourra alors parler de *et-propositionnel*). Notons par ailleurs que, dans ce deuxième cas, il n'y a pas eu seulement une opération de coordination entre les deux propositions « Pierre est cousin de Jean » et « Paul est cousin de Jean », mais aussi une sorte de *mise en facteur* d'une partie qui se répétait dans chacune des propositions, nécessitant éventuellement quelques ré-écritures (on pourra dire que le « et » de cette dernière phrase est un *et-propositionnel factorisé*). En effet, faire opérer le connecteur ET sur les propositions « Pierre est cousin de Jean » et « Paul est cousin de Jean » donne la phrase « Pierre est cousin de Jean ET Paul est cousin de Jean ». Ensuite, par « mise en facteur » de « est cousin de Jean », on obtient « Pierre et Paul est cousin de Jean », qu'il faut ré-écrire pour que les règles d'accord soient respectées, ce qui donne finalement « Pierre et Paul sont cousins de Jean ». La remarque s'applique également dans le cas de la proposition « les nombres m et n sont premiers ». La situation y est même encore plus compliquée par la présence de « les nombres » qui nécessite un rétablissement du singulier quand on veut retrouver les deux propositions sur lesquelles opère la conjonction. Nous soulignons rarement cette opération de *mise en facteur*. Pourtant, elle peut ne pas être si évidente pour des élèves qui ne maîtrisent pas bien la langue française. D'autre part, il peut y avoir des ambiguïtés quand il s'agit de retrouver les propositions élémentaires qui composent la phrase. Ainsi, que signifie « Pierre et Paul sont les frères d'Antoine et Julien » ? Que les quatre sont frères ou que Pierre est le frère d'Antoine et Paul celui de Julien ? Parfois d'autres éléments permettent de trancher. Par exemple, dans la proposition « n et m sont les successeurs de p et q », on peut considérer qu'il n'y a pas d'ambiguïté en raison de l'unicité du successeur, mais ce n'est pas le cas pour la proposition « n et m sont des majorants de p et q ».

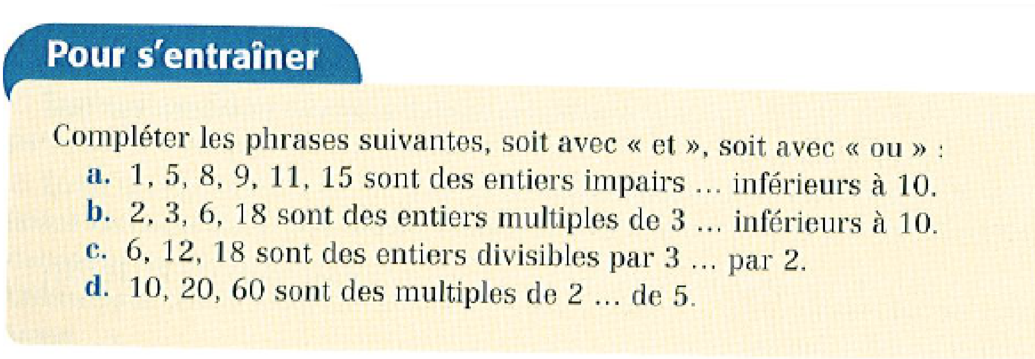
Comme nous le voyons, en mathématiques, puisque nous nous exprimons en utilisant la langue naturelle, tous les « et » ne sont pas des connecteurs logiques. Pour clarifier les choses, il serait pertinent de marquer la distinction. La logique mathématique propose les symboles $\wedge$ pour le connecteur ET et $\vee$ pour le connecteur OU, mais à la différence des flèches pour les connecteurs IMPLIQUE et ÉQUIVAUT À, ces symboles ne sont pas utilisés par les mathématiciens. Une alternative est de noter en majuscule les « et », « ou » qui sont des connecteurs entre propositions. Ceci ne sera pas toujours possible, comme nous allons le voir dans l'exemple emblématique suivant : considérons la proposition « les ensembles A et B sont non-vides et disjoints ». Elle est la conjonction, signalée par le deuxième « et », des propositions « les ensembles A et B sont non-vides » et « les ensembles A et B sont disjoints », après mise en facteur de « les ensembles A et B sont ». Mais le « et » placé entre A et B est *et-propositionnel* dans la première de ces deux propositions, *et-couple* dans la deuxième. Il n'est donc pas possible d'appliquer ce critère distinctif à cette formulation condensée, il faut pour cela recourir à une formulation plus longue : « les ensembles A ET B sont non-vides ET les ensembles A et B sont disjoints », que l'on peut encore reformuler en : « l'ensemble A est non-vide ET l'ensemble B est non-vide ET les ensembles A et B sont disjoints ». Ici le « et » en minuscules qui subsiste est incontournable : c'est un et-couple et le connecteur ET ne saurait le remplacer.

Il y a également un troisième usage du mot « et » qu'il est important de souligner. Prenons comme exemple la phrase « Pierre et Paul sont les frères de Jean ». Le mot « les » joue ici un rôle essentiel : cette phrase n'est pas la conjonction des deux phrases « Pierre est le frère de Jean » et « Paul est le frère de Jean ». Le « et » utilisé, associé à l'expression « sont les », sert à énumérer les éléments d'un ensemble, nous parlerons alors de *et d'énumération*. Nous retrouvons un tel « et » dans « 1 et 3 sont les solutions de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ ». Il ne s'agit pas d'un connecteur ET qui coordonne les deux propositions « 1 est la solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ » et « 3 est la solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$ ». Cette proposition est en fait équivalente à « (1 est une solution de l'équation $(x-1)(x-3) = 0$) ET (3 est une solution de l'équation $(x - 1)(x - 3) = 0$) ET (pour tout réel x, si x est solution de l'équation $(x - 1)(x - 3) = 0$, alors ($x = 1$ OU $x = 3$)) », qui est la conjonction de trois propositions. Nous pourrions aussi donner une proposition équivalente plus simple : « pour tout réel a, (a est solution de l'équation $(x - 1)(x - 3) = 0$ si et seulement si ($a = 1$ OU $a = 3$)) », dans laquelle il n'y a pas de conjonction mais une disjonction. Ce passage d'un « ou » à un « et » entre « $(x-1)(x-3) = 0$ si et seulement si ($x = 1$ ou $x = 3$) » et « les solutions de l'équation $(x - 1)(x - 3) = 0$ sont 1 et 3 » peut laisser les élèves perplexes. Les distinctions précédentes éclairent ce changement : il ne s'agit pas ici de la transformation d'un connecteur OU en un connecteur ET, mais d'un connecteur OU dans un cas, et d'un *et d'énumération* dans l'autre.

Une situation analogue se produit à propos de la réunion de deux ensembles. La propriété « x appartient à $A \cup B$ » est équivalente à « (x appartient à A) OU (x appartient à B) », mais on dira tout aussi bien « les éléments de $A \cup B$ ce sont les éléments de A et les éléments de B », en utilisant un *et d'énumération*. Ainsi, dans une situation où on s'intéresse au tirage d'une carte dans un jeu, pour déterminer la probabilité de l'événement « être rouge ou être un roi », il faut compter les cartes rouges et les rois.

Intervention du *Principe du maximum d'information*

Nous avons essayé de clarifier différents usages du « et » dans le langage courant qui se retrouvent en mathématiques. Nous allons maintenant voir comment certains usages du langage courant peuvent être en contradiction avec la sémantique logique des connecteurs ET et OU. En effet, comment expliquer que tant d'élèves refusent de considérer que la proposition « $2 \leqslant 3$ » est vraie ? Du point de vue de la logique mathématique, cette proposition, qui est la disjonction des propositions « $2<3$ » et « $2=3$ », est vraie puisque « $2<3$ » est vraie. C'est finalement exactement cet argument qui amène les élèves à dire que « $2 \leqslant 3$ » est fausse, en vertu du fait qu'ils connaissent une proposition vraie, « $2<3$ », qui donne plus d'informations que « $2 \leqslant 3$ ». Ils appliquent ainsi ce que D. Lacombe a appelé *le principe du maximum d'information*, inspiré de la *loi d'exhaustivité* d'O. Ducrot. Ce principe, spontanément appliqué dans la vie courante, amène une personne, lorsqu'elle donne une information, à donner tous les renseignements dont elle dispose. Voyons un autre exemple de mise en œuvre de ce principe dans la classe de mathématiques, avec l'exercice suivant proposé dans le manuel *Indice* de Seconde :



Pour s'entraîner

Compléter les phrases suivantes, soit avec « et », soit avec « ou » :

a. 1, 5, 8, 9, 11, 15 sont des entiers impairs ... inférieurs à 10.
b. 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 ... inférieurs à 10.
c. 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 ... par 2.
d. 10, 20, 60 sont des multiples de 2 ... de 5.

FIGURE 3.4 – Exercice sur les connecteurs ET et OU dans le manuel *Indice*

Savoir que (P ET Q) est vraie me donne des informations sur P et sur Q, à savoir qu'elles sont vraies, et je peux alors en déduire que (P OU Q) est vraie. A l'inverse, savoir que (P OU Q) est vraie ne me donne pas d'informations sur P et sur Q, et donc je ne peux rien en déduire sur (P ET Q). Nous pouvons alors dire qu'affirmer (P ET Q) donne plus d'information que d'affirmer (P OU Q)[6]. Dans un tel exercice, il est possible et correct de compléter toutes les propositions avec « ou », mais ça n'est sans doute pas ce qui est attendu ! Les élèves complèteront vraisemblablement avec « et » là où c'est possible et, conformément au principe du maximum d'information, pourront même avoir tendance à considérer comme fausse la réponse « ou » dans un tel cas. Le corrigé du manuel du professeur donne une seule possibilité pour chaque proposition (ET quand c'est possible), allant ainsi dans le sens des élèves qui pensent qu'il n'y a qu'une « bonne réponse ». Pourtant, cet exercice offre l'occasion de susciter un débat autour de cette question. En

6. De la même manière, dire que P est vraie donne plus d'information que de dire que (P OU Q) est vraie, et la proposition « pour tout nombre réel x, si$(x-1)(x-3)=0$, alors ($x=1$ OU $x=3$ OU $x=2$) » serait très probablement considérée fausse par beaucoup d'élèves.

effet, on peut s'appuyer sur le comportement des connecteurs ET et OU par rapport aux valeurs de vérité pour préciser que parfois les deux connecteurs sont acceptables, et de dire qu'en mathématiques il n'y a pas des propositions plus vraies que d'autres.

Comme nous l'avons vu, l'utilisation des connecteurs ET et OU en mathématiques est moins simple qu'il n'y paraît, et la difficulté ne se résume pas à la distinction entre ou exclusif et ou inclusif. Les usages du discours quotidien sont plus souvent qu'on ne le croit en conflit avec l'utilisation des connecteurs ET et OU en mathématiques

3.4 Négation

3.4.1 Approche à partir de la logique mathématique

Le connecteur unaire NON permet à partir d'une proposition P de former sa négation NON P. La proposition NON P est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

On a alors la propriété suivante : NON(NON P) est équivalente à P.

Les propriétés suivantes concernant la négation et les connecteurs ET et OU sont appelées *Lois de Morgan* :

NON(P ET Q) est équivalente à (NON P OU NON Q)

NON(P OU Q) est équivalente à (NON P ET NON Q)

Nous avons déjà vu les propriétés suivantes concernant la négation et les quantificateurs avec le carré des oppositions de Frege (voir page 70) :

NON($\forall x\, P[x]$) est équivalente à $\exists x$ NON $P[x]$

NON($\exists x\, P[x]$) est équivalente à $\forall x$ NON $P[x]$

Ces équivalences servent à effectuer des manipulations syntaxiques sur les propositions, de la même manière qu'on manipule les expressions algébriques. Ainsi, pour une proposition donnée, il est possible d'obtenir plusieurs propositions équivalentes à sa négation en appliquant ces règles. Prenons par exemple la proposition $(*)$ « Il existe un entier n tel que n est pair ET n est un multiple de 3 ». On obtient successivement :
– sa négation : (1) « NON(Il existe un entier n tel que n est pair ET n est un multiple de 3) »
– une première proposition équivalente : (2) « pour tout entier n, NON(n est pair ET n est un multiple de 3) »
– une deuxième proposition équivalente : (3) « pour tout entier n, (NON(n est pair) OU NON(n est un multiple de 3)) »

Il y a dans le vocabulaire mathématique des appellations attitrées pour la négation de certains prédicats. Par exemple, la négation de « n est pair » est équivalente à « n est impair ». La négation de la proposition « n est un multiple de 3 » est équivalente à la forme négative « n n'est pas un multiple de 3 ». On obtient alors une quatrième proposition équivalente à la négation de la proposition $(*)$: (4) « Pour tout entier n, (n est impair OU n n'est pas un multiple de 3) ».

N'importe laquelle de ces propositions sera acceptée comme étant la négation de la proposition $(*)$ (et hormis les logiciens, rares sont les mathématiciens qui proposeront la proposition (1)). Finalement, plusieurs applications successives des règles données ci-dessus nous ont permis de « rentrer » le plus possible la négation à l'intérieur de la proposition. Ce que nous avons fait ici sur un exemple est toujours possible : pour toute proposition, on peut trouver une proposition équivalente dans laquelle les négations ne portent que sur des propositions élémentaires, c'est-à-dire des propositions qui ne comportent ni connecteur ni quantificateur. On privilégie souvent une telle formulation pour la négation d'une proposition donnée.

3.4.2 Expression dans le discours mathématique

Alors que les mots « et » et « ou » peuvent, dans certains cas, être dans la langue usuelle des opérateurs sur les propositions qui correspondent aux connecteurs ET et OU, il n'y a pas dans la langue française d'opérateur sur les propositions qui serait l'analogue du connecteur NON[7]. Ainsi, là où la conjonction des propositions « n est pair » et « n est un multiple de 3 » est « directement » la proposition « n est pair ET n est un multiple de 3 », la négation de la proposition « n est pair », qui est à strictement parler la proposition « NON(n est pair) », ne sera pratiquement jamais formulée ainsi ; on dira plutôt éventuellement « n est non pair »[8], ou plus souvent « n n'est pas pair » et même encore plus souvent « n est impair ».

L'exemple de la proposition $(*)$: « Il existe un entier n tel que n est pair ET n est un multiple de 3 » de la page 121 montre que les choses sont encore plus complexes quand on a affaire à une proposition comportant un connecteur ou un quantificateur. Dans le cas d'une proposition élémentaire, la négation est donnée par ce qu'on appelle *la forme négative*, généralement construite en encadrant le verbe des deux mots « ne » et « pas ». Les élèves pratiquent régulièrement à l'école primaire l'exercice qui consiste à passer d'une forme affirmative à une forme négative. Mais dans le cas d'une proposition quantifiée, la

7. Nous avons vu page 40 qu'un tel opérateur existe dans la langue grecque, c'est aussi le cas dans la langue arabe, voir les travaux de I. BEN KILANI, notamment l'article (Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004)

8. Le mot « non » est parfois, mais rarement, utilisé dans le langage courant associé à un adjectif (nul et non avenu, non voyant. . .). En mathématiques, cet usage est plus fréquent : une fonction non continue, un triangle non rectangle. . . mais il est très rare qu'on utilise le mot « non » apposé à une proposition comme c'est le cas pour le connecteur logique.

forme négative ne correspond pas toujours à la négation mathématique, puisque l'on accepte comme forme négative de la phrase « je mange toujours des fruits » tout aussi bien la phrase « je ne mange jamais de fruits », qui ne correspond pas à la négation, que la phrase « je ne mange pas toujours des fruits », qui correspond à la négation. Par ailleurs, toute proposition a une négation, même une proposition telle que« n n'est pas premier », mais cela n'a pas de sens de demander sa forme négative puisqu'elle est déjà sous forme négative. Les élèves doivent comprendre que l'exercice « donner la négation de » en mathématiques n'est pas le même que « donner la forme négative de » en français.

Considérer la négation d'une proposition (ce qui nous arrive assez souvent en mathématiques, dans les raisonnements par l'absurde ou par contraposée, ou pour se représenter un objet ne répondant pas à une certaine définition) va souvent nécessiter des opérations de conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats et de traitement (voir page 89) dans chacun de ces registres. Les propriétés vues page 121 se traduisent par des règles formelles qui permettent un traitement relativement simple de la négation dans le registre formalisé, règles dont ne nous disposons pas dans le registre de la langue naturelle. Ainsi, la négation de la proposition « Il existe un entier qui est pair et multiple de 3 » admet au moins les trois formulations équivalentes suivantes dans la langue naturelle :
– Il n'existe pas d'entier qui soit pair et multiple de 3
– Aucun entier n'est pair et multiple de 3
– Tous les entiers sont impairs ou non multiples de 3
Mais il n'y a pas vraiment de procédure syntaxique qui permettrait de passer d'une de ces formulations à une autre. Ainsi, le registre formalisé paraît plus sûr pour formuler la négation d'une proposition que celui de la langue naturelle. Mais j'ai déjà insisté sur le fait que langue naturelle et langage formalisé étaient imbriqués dans le discours mathématique, et une des difficultés associées à la négation est justement la nécessité de cette double expertise, d'une part des manipulations liées à la négation dans le langage formalisé, d'autre part des différentes expressions dans la langue naturelle.

3.4.3 Difficultés pour les élèves avec la négation

Opposition trompeuse

Une première difficulté des élèves, bien connue des professeurs, concerne des couples de prédicats comme être positif/être négatif, être croissante/être décroissante, qui ne sont pas la négation l'un de l'autre.

Le manuel *Hyperbole* de Seconde propose l'exercice suivant pour alerter les élèves sur cette confusion :

37 Fonctions non croissantes, non décroissantes

1. f est une fonction croissante sur un intervalle I signifie : « pour tous réels u et v de I, si $u \leqslant v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$ ».

a) Écrire la définition d'une fonction non croissante sur I.

b) Une fonction non croissante sur I est-elle une fonction décroissante sur I ? Illustrer son propos avec un graphique.

2. f est la fonction définie sur $[0;3]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

Pierre a écrit : « $f(0) = 4$ et $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$.

$0 \leqslant 1$ et $f(0) \geqslant f(1)$ donc f est décroissante sur $[0;3]$. »

a) Expliquer pourquoi ce raisonnement est faux.

b) Faire une conclusion correcte à partir des calculs de Pierre, commençant par « $0 \leqslant 1$ et $f(0) \geqslant f(1)$ donc... ».

FIGURE 3.5 – Un exercice sur la négation dans le manuel *Hyperbole*

Cet exercice est proposé dans une rubrique « s'initier à la logique ». Comment est-ce qu'un élève peut écrire la définition d'une fonction non croissante sur I [9] ? Est-ce qu'on s'attend à ce qu'il sache écrire la négation de la définition d'une fonction croissante sur I donnée dans le cours ? Est-ce qu'on s'attend à ce qu'il la retrouve de façon empirique (pour montrer qu'elle n'est pas croissante sur I, il faut trouver deux éléments x et y de I qui ne sont pas dans le même ordre que leurs images, c'est-à-dire vérifiant $x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$) ? De la même façon, comment répond-il à la question 1.b) ? En comparant deux définitions ? Formulé ainsi, cet exercice ne permet pas vraiment de travailler sur ce qu'est la négation, il permet seulement éventuellement d'appliquer les règles qui y sont associées si elles ont été données. Il me paraît plus intéressant de faire remarquer que « f n'est pas une fonction croissante sur I » est la négation de « f est une fonction croissante sur I », puis de se demander si c'est équivalent à « f est une fonction décroissante sur I » (on peut aussi demander quelle est la négation de « f est une fonction croissante sur I », il y a toutes les chances que les deux réponses soient proposées). Nul besoin d'écrire des définitions pour répondre qu'elles ne sont pas équivalentes : il est possible de trouver une fonction f (et un intervalle I) telle que les deux propositions « f est une fonction croissante sur I » et « f est une fonction décroissante sur I » soient fausses, ce qui contredit la définition de la négation. Ensuite seulement, l'exercice qui consiste à écrire la négation de « f est une fonction croissante sur I » en mettant au jour sa structure logique permet de travailler sur les règles de formulation d'une négation.

9. Il ne s'agit d'ailleurs pas d'une définition, mais plutôt d'une propriété qui se déduit de la définition d'une fonction croissante.

Ambiguïtés de certaines formes négatives, quantifications implicites

Je mentionne rapidement un exemple bien connu d'ambiguïté : celui des formulations en « tous… ne pas ». L'interprétation correcte est d'entendre la phrase « toutes les boules ne sont pas rouges » comme équivalente à « il existe une boule non-rouge », mais certaines personnes l'entendent comme « toutes les boules sont non-rouges » (voir par exemple Durand-Guerrier, 2005, p. 77). Je renvoie à l'article *Au collège comme au lycée : une activité sur les connecteurs ET et OU* du groupe Logique de l'IREM de Paris pour des exemples de formulations ambiguës de propositions contenant négation et connecteur ET ou OU (Groupe Logique de l'IREM de Paris, 2014).

J'insisterai un peu plus sur la difficulté à donner la négation de propositions qui relèvent du registre que j'ai appelé *intermédiaire*, dans lequel les quantifications ne sont pas toutes exprimées à l'aide des quantificateurs, comme par exemple « tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang », qui est la définition proposée par le programme de Terminale S de 2011 pour exprimer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. Dans cette définition, la quantification existentielle portant sur N dans la définition formelle « $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$ » est cachée dans l'expression « à partir d'un certain rang », dans laquelle on peut considérer qu'elle est devinable grâce à « un certain rang ». Bien sûr, on pourra toujours se servir de la définition du programme pour exprimer le fait que u_n ne tend pas vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, et dire que cela signifie « il existe un intervalle ouvert contenant ℓ et qui ne contient pas toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Mais rien dans l'expression « I ne contient pas toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » ne laisse deviner la structure logique de la proposition équivalente « $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \text{ ET } u_n \notin I)$ ». Nous retrouvons l'idée que pour utiliser des procédures syntaxiques efficaces pour formuler et comprendre la négation d'une proposition « il est nécessaire que la syntaxe utilisée pour formaliser les énoncés soit en adéquation avec les règles de formation du calcul des prédicats, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs, ce qui est loin d'être toujours le cas dans la pratique mathématique ordinaire » (Durand-Guerrier, 2005, p. 75).

Négation et contraire

Un deuxième obstacle, bien identifié par I. Ben Kilani dans sa thèse (Ben Kilani, 2005), à l'acquisition de la notion de négation par les élèves est son assimilation fréquente à l'idée de « contraire ». Le contraire est défini comme étant « ce qui s'oppose par le plus grand écart possible à une chose située sur le même plan » (définition du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales) ; on voit qu'il y a là une différence avec la notion de négation qui ne contient pas cette idée de *plus grand écart possible*. Ainsi, le contraire de « tous les élèves de la classe ont un téléphone portable » est bien « aucun élève de la classe n'a de téléphone portable ». C'est parfois ce contraire que les élèves ont à formuler dans les exercices de français où ils doivent donner la forme négative d'une phrase, *toujours* est associé à *jamais* (il vient toujours/il ne vient jamais), *tous* à *aucun* (tous les membres sont là/aucun membre n'est là)... Nous avons vu (dans l'étude épistémologique, page 34) qu'Aristote distinguait une relation de contradiction entre une proposition et sa négation (qui ne peuvent ni être vraies toutes les deux en même temps, ni être fausses toutes les deux en même temps), et une relation de contrariété entre une proposition universelle et sa contraire (relation entre une universelle affirmative et une universelle négative, qui peuvent être fausses toutes les deux en même temps mais pas vraies toutes les deux en même temps), auxquelles viendra s'ajouter au Moyen-Âge une relation entre une proposition existentielle et sa subcontraire (relation entre une particulière affirmative et une particulière négative, qui peuvent être vraies toutes les deux en même temps mais pas fausses toutes les deux en même temps) (voir le carré des oppositions complet page 48). La logique mathématique, et les mathématiques d'une façon générale, n'ont gardé qu'une de ces relations, la relation de contradiction, qui est la seule définissable pour toutes les propositions en s'appuyant sur l'échange des valeurs de vérité.

Quand la négation n'est pas tout à fait ce qu'on croit

Traditionnellement, la proposition « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ » est équivalente à la proposition $(*)$: « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est ℓ », car écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ pose l'existence de la limite (finie ou infinie). De même, la proposition « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq \ell$ » est équivalente à la proposition $(**)$: « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est différente de ℓ ». Ainsi, bien que la proposition $(**)$ ait toutes les apparences de la négation de la proposition $(*)$, il n'en est rien puisque ces deux propositions sont fausses pour une suite qui ne converge pas.

La proposition « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ » est une *proposition composée au niveau du sens*, au sens des auteurs de la logique de Port-Royal (voir page 50), ce que nous voyons très bien dans la proposition $(*)$. Formuler la négation de telles propositions est complexe, justement parce qu'il faut exhiber les conjonctions qui y sont contenues.

3.5 Implication

Nous avons déjà relevé dans les études épistémologique et didactique les nombreuses difficultés liées à la notion d'implication. Sous ce titre, je ne parlerai pas seulement du connecteur IMPLIQUE, mais aussi de l'implication universellement quantifiée, et de la possible confusion entre les deux, surtout dans le cas des formulations en *si..., alors...*. Nous verrons également de nombreuses expressions du discours mathématique reliées à l'implication, qu'il est important de recenser même si cela aboutit à une liste qui peut paraître longue. Pour ce qui est des travaux didactiques, ils sont également particulièrement nombreux sur cette notion. La longueur de la section qui va suivre est une conséquence de ces divers points, qui montrent que l'implication est un élément majeur de l'activité mathématique, au cœur du langage, du raisonnement, et de l'articulation entre les deux.

3.5.1 Approche à partir de la logique mathématique

Le connecteur IMPLIQUE

Le connecteur binaire IMPLIQUE permet, à partir de deux propositions P et Q, de former la proposition $P \Rightarrow Q$. La proposition Q est presque systématiquement appelée *la conclusion*, plusieurs noms sont utilisés pour la proposition P :

- P est parfois appelée *l'hypothèse*. Ce terme est également utilisé dans une démonstration : l'hypothèse (généralement les hypothèses), c'est ce qui est posé comme vrai. Or, nous y reviendrons ultérieurement, affirmer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie ne pose absolument pas la vérité de P, et penser cela est même une difficulté identifiée par rapport à la compréhension de la notion d'implication.
- P est parfois appelée *la condition*. Mais ce terme de condition est également utilisé dans l'expression « condition nécessaire », or, quand $P \Rightarrow Q$ est vraie, c'est Q qui est une condition nécessaire pour P. Par ailleurs, « condition » n'est quasiment jamais utilisé dans le langage courant pour signifier une condition suffisante, il signale le plus souvent une condition nécessaire et suffisante (comme dans « j'irai me promener dimanche, à condition qu'il ne pleuve pas »), parfois seulement nécessaire (comme dans « il est possible que j'aille me promener dimanche, à condition qu'il ne pleuve pas »).
- P est parfois appelée *la prémisse*, terme que j'utilise dans cette thèse car, à l'inverse des deux autres, il ne présente pas d'ambiguïté.

La table de vérité du connecteur IMPLIQUE est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

FIGURE 3.6 – Table de vérité du connecteur IMPLIQUE

Les deux dernières lignes de cette table posent souvent problème. Je propose trois arguments pour les justifier.

Premier argument : il n'y a qu'un nombre fini de possibilités. Examinons les autres choix possibles :

– en choisissant la valeur Faux pour les deux cas où P est Faux, on a la table de vérité du connecteur ET. On veut évidemment définir un connecteur IMPLIQUE distinct du connecteur ET.
– En choisissant la valeur Vrai pour P Faux et Q Vrai, et la valeur Faux pour P Faux et Q Faux, on obtient alors les mêmes valeurs de vérité pour $P \Rightarrow Q$ et pour Q, et on aurait alors $P \Rightarrow Q$ équivalent à Q, là aussi, on attend autre chose du connecteur IMPLIQUE que le fait d'être équivalent à la conclusion.
– En choisissant la valeur Faux pour P Faux et Q Vrai, et la valeur Vrai pour P Faux et Q Faux, on obtient alors la table de vérité du connecteur ÉQUIVAUT À.

Ce premier argument montre que le choix qui est fait est le seul « raisonnable ». Cela étant dit, l'argument n'est pas très constructif, puisqu'il est basé sur l'élimination des autres possibilités.

Je donne alors un deuxième argument pour essayer de convaincre que ce choix est raisonnable. Demandons-nous comment persuader quelqu'un que l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse. L'argument souvent avancé comme étant le plus convaincant est de dire que P est vraie et Q est fausse. Ceci correspond bien au seul cas de la table de vérité où $P \Rightarrow Q$ est fausse.

Finalement, je donne un troisième argument pour essayer de convaincre que cette table de vérité correspond bien à l'usage de l'implication en mathématiques. Il est lié aux implications universellement quantifiées : prenons par exemple la proposition « pour tout entier naturel n, [(n est premier et n est différent de 2) $\Rightarrow$ n est impair] ». Elle est vraie, ce qui veut dire que chaque implication obtenue en attribuant une valeur à la variable n dans la proposition « (n est premier et n est différent de 2) $\Rightarrow$ n est impair » est vraie. Il en est notamment ainsi des implications :

$$(2 \text{ est premier et } 2 \text{ est différent de } 2) \Rightarrow 2 \text{ est impair},$$

nous sommes alors dans le cas « prémisse fausse conclusion fausse »,

$$(9 \text{ est premier et } 9 \text{ est différent de } 2) \Rightarrow 9 \text{ est impair},$$

nous sommes alors dans le cas « prémisse fausse conclusion vraie ».

Ainsi, décider que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie lorsque la prémisse P est fausse est la seule manière de pouvoir écrire des propositions de la forme « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ », sans se préoccuper des valeurs qui rendent la prémisse fausse pour conclure à sa vérité. En particulier, une telle proposition est vraie lorsqu'aucun élément ne vérifie P.

Cette table de vérité nous permet de voir facilement que la négation de $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (P ET NON Q)[10].

10. Plusieurs étudiants savent « utiliser » ce résultat, notamment quand ils produisent un contre-exemple pour infirmer une implication, car ils donnent alors un élément qui vérifie la prémisse et pas

Implication universellement quantifiée

Le symbole $\Rightarrow$, ou une des expressions qui le traduit, est presque toujours utilisé en mathématiques entre deux propositions comportant au moins une même variable libre, comme par exemple dans la proposition « n est pair $\Rightarrow$ n est divisible par 4 ». Les mathématiciens diront (presque) tous que cette proposition est fausse. Pourtant, il s'agit d'une proposition contenant une variable libre, nous ne pouvons pas savoir si elle est vraie ou fausse. En se reportant à la table de vérité de l'implication, cette proposition est vraie lorsque la variable n prend, par exemple, la valeur 4 (on a alors la proposition « 4 est pair $\Rightarrow$ 4 est divisible par 4 »), ou la valeur 3 (car la prémisse est alors fausse), et fausse lorsque variable n prend, par exemple, la valeur 2. Mais les mathématiciens lisent cette proposition comme une proposition close car ils associent systématiquement une quantification universelle au symbole $\Rightarrow$, ou à une des expressions qui le traduit. La plupart du temps, ils n'éprouvent alors pas le besoin d'écrire explicitement cette quantification universelle, ce qui amène parfois des malentendus avec les élèves (voir l'exemple de la tâche du labyrinthe page 82).

3.5.2 Expression dans le discours mathématique

Quels mots associer à ce symbole $\Rightarrow$? Comment « lire » la proposition $P \Rightarrow Q$? Plusieurs expressions sont couramment utilisées : « si P, Q » (ou « Q si P ») , « P implique Q », « P entraîne Q », « si P alors Q »... Il y a également des expressions en lien avec les notions de condition nécessaire et de condition suffisante sur lesquelles nous reviendrons.

Utilisation de « si »

Le mot « si » dans le langage courant Le mot « si » est une conjonction de subordination, utilisé pour introduire une proposition subordonnée reliée à une proposition principale. La subordonnée P et la principale Q sont dans le même ordre que dans $P \Rightarrow Q$ dans l'expression « si P, Q », ou dans l'ordre inverse dans l'expression « Q si P ». Dans *Dire et ne pas dire*, O. Ducrot propose une description des énoncés *si p, q* non pas à partir de l'existence d'un type de relation entre p et q, mais à partir de l'acte de supposition accompli quand on les emploie :

> [...] la thèse principale défendue ici est qu'une proposition de type *si p, q* n'a pas pour *signification* première « p est cause de q », ni « p est condition de q » (bien qu'elle puisse servir à indiquer ces relations). Sa valeur fondamen-

la conclusion. Mais quand on leur demande d'écrire formellement la négation de $P \Rightarrow Q$, ils proposent souvent $P \Rightarrow \text{NON}\, Q$, ou $\text{NON}\, P \Rightarrow Q$, ou $Q \Rightarrow \text{NON}\, P$, bref, une <u>implication</u> combinant P, Q ou leur négation !

> tale est de permettre la réalisation successive de deux actes illocutoires[11] : 1° demander à l'auditeur d'imaginer « *p* », 2° une fois le dialogue introduit dans cette situation imaginaire, y affirmer « *q* ». (Ce qui explique immédiatement une déontologie du *si* : il y a des situations dont il est indécent de demander à l'auditeur de les envisager). (Ducrot, 1991, p. 168)

Il explique à la lumière de cette description pourquoi l'emploi du mot « si » donne à entendre qu'il y a une relation de dépendance entre les propositions qu'il réunit :

> Dans la mesure, en effet, où on demande à l'auditeur de se placer dans l'hypothèse « *p* » avant de lui annoncer « *q* », on donne à penser qu'il y a une certaine dépendance entre « *p* » et « *q* » : sinon, on comprendrait mal que le locuteur ait cru bon de faire précéder l'acte d'affirmation d'un acte de supposition. La dépendance entre les deux propositions apparaît ainsi comme un contrecoup de la dépendance entre les deux actes accomplis.

Selon O. Ducrot, cette idée de dépendance associée au mot « si » empêche même les mathématiciens de l'utiliser pour marquer dans tous les cas le connecteur IMPLIQUE :

> Un mathématicien n'aurait pas de répugnance particulière à dire « si 2+2=4, alors 2+3=5 », car on peut envisager que la deuxième proposition se démontre à partir de la première[12]. Mais il hésiterait à dire « si 2+2=4, alors 2 n'a pas de racine carrée rationnelle », car la démonstration de la deuxième proposition, dans ce cas, n'utilise pas, habituellement, la première.

Il explique ensuite comment la loi d'exhaustivité, qui correspond au principe du maximum d'information décrit page 120, amène alors à entendre cette relation de dépendance comme à la fois suffisante et nécessaire :

> En allant un peu plus loin dans la même voie, on peut expliquer un phénomène linguistico-psychologique bien connu, qui désespère les enseignants préoccupés de former leurs élèves à un minimum de pensée logique. Alors qu'on voudrait réserver l'expression *si p, q* pour indiquer que « *p* » est une condition suffisante de « *q* », les élèves, et pas mal d'autres, tendent à comprendre la même expression comme désignant une condition non seulement suffisante mais nécessaire – ou, du moins, très favorable. La loi générale d'exhaustivité permet de prévoir cette interprétation. Si le locuteur a restreint son affirmation de « *q* » à la supposition préalable que « *p* » est vrai, il est naturel de

11. Catégorie de la théorie des actes de langage d'Austin : il distingue trois aspects de l'acte de langage consistant à faire quelque chose par la parole : il y a l'acte de *locution* (la production de sons appartenant à un vocabulaire et à une grammaire, et auxquels sont rattachés un « sens » et une « référence », c'est-à-dire une « signification », au sens classique du terme) ; l'acte *d'illocution* (produit *en* disant quelque chose, et consistant à rendre manifeste *comment* les paroles doivent être comprises en ce moment - les *mêmes* paroles pouvant être comprises soit comme un conseil, soit comme un commandement, etc.) ; et l'acte de *perlocution* (produit *par* le fait de dire quelque chose, c'est-à-dire que l'acte donne lieu à des *effets* - ou conséquences - chez les autres ou chez soi) (Austin, 1970).

12. Je dirais plutôt car il s'agit d'une instanciation de l'implication $x + y = z \Rightarrow x + y + 1 = z + 1$ qui est vraie quels que soient x, y et z.

> croire, puisqu'il est censé dire le maximum de ce qu'il sait, qu'il ne pouvait pas affirmer « q » d'une façon catégorique. Si, de plus, on refuse d'attribuer cette incapacité à une limitation de son savoir, on doit interpréter cette restriction de l'affirmation comme l'affirmation d'une restriction. On introduit donc l'idée que « q » est vrai seulement si « p » est vrai. (Ducrot, 1991, pp. 169-170)

Ducrot cite ensuite d'autres utilisations du mot « si », notamment le *si présuppositionnel* qui « introduit une proposition qui constituerait la présupposée de la principale si celle-ci était employée isolément » (Ducrot, 1991, p. 176), comme dans l'exemple qu'il donne : « si tu as soif, il y a de la bière au frigidaire ». Notons que le *si présuppositionnel* ne vérifie pas la règle de contraposition (on s'en convaincra facilement en essayant avec l'exemple donné !)

***Si présuppositionnel* en mathématiques** On retrouve également en mathématiques un usage du mot « si » qui se rapproche de ce *si présuppositionnel*, quand on donne une propriété des éléments d'un ensemble, mais qu'il faut exclure certains éléments pour lesquels la propriété n'a pas de sens. Par exemple dans :

$$\text{si } x \text{ et } y \text{ sont des réels strictement positifs, } \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Ici, le « si » introduit une condition P : « x et y sont des réels strictement positifs » pour que la proposition Q : « $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ » ait un sens. On est alors effectivement bien gêné en énonçant la contraposée de cette proposition. Ainsi, même si une proposition comme celle énoncée ci-dessus peut correspondre à une implication universellement quantifiée sur des variables astreintes à $\mathbb{R}_+^*$, cette formalisation n'est pas porteuse de sens dans la mesure où il s'agit d'une implication dont la prémisse n'impose aucune restriction. On lui préfèrera une formulation simplement sous forme d'énoncé universel :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y \text{ strictement positifs, } \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Le « si » dans les définitions On utilise également le mot « si » en mathématiques dans certaines définitions. Commençons par dire qu'une définition n'est pas une proposition. Elle pose une convention, et cela n'a pas de sens de se demander si elle est vraie ou fausse. Elle introduit un nouveau prédicat $P'[x]$ (par exemple « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ») comme raccourci d'une proposition $P[x]$ (ici « pour tous réels x, y, si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$). Elle pose une équivalence entre ces deux propositions, mais on ne peut pas utiliser dans la définition l'expression « si et seulement si » puisque d'une certaine façon le prédicat $P'[x]$ n'est pas encore introduit dans le langage. Une fois posée la définition : « soit $x \in E$, par définition, on dira que $P'[x]$ si $P[x]$ », on pourra utiliser la propriété : « pour tout $x \in E$, $P'[x]$ si et seulement si $P[x]$ ». Au vu des commentaires précédents, cette utilisation du « si » ne correspond bien sûr pas à une implication. Pour bien marquer cette différence, et éviter une confusion malheureuse, plusieurs auteurs de manuels utilisent des termes qui signalent l'aspect *épimathématique* d'une définition (c'est-à-dire qui indiquent que ça n'est pas une proposition : voir page 111) : « par définition », « on dira que »...

Utilisation de « implique », « entraîne »

L'utilisation des mots « implique »ou « entraîne » entre deux propositions, comme c'est le cas en mathématiques, ne se retrouve pas dans le langage courant où il est attendu qu'ils soient placés entre deux syntagmes nominaux, l'un constituant le sujet, l'autre le complément du verbe. Or, une proposition n'est pas un syntagme nominal. « n est divisible par 4 implique n est pair » n'est donc pas une phrase correcte du point de vue de la grammaire française. L'utilisation du mot « implique » en mathématiques amène ainsi à prendre des libertés avec la syntaxe de la langue naturelle [13].

Citant W. Quine (philosophe et logicien américain du XX^{e} siècle), V. Durand-Guerrier signale une utilisation du mot « implique » qui « combine non des énoncés pour former des énoncés, mais des noms d'énoncés pour former des énoncés sur des énoncés. » (Quine, cité dans Durand-Guerrier, 2005, p. 48). Par exemple, nous pourrions dire « P et Q implique P ». Dans ce cas, nous ne nous contentons pas de considérer la proposition « $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow P$ », nous affirmons aussi qu'elle est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions P et Q.

Nous utilisons aussi le mot « implique » (ou « entraîne ») dans une phrase telle que « la convergence uniforme implique la convergence simple » (dans le cas des suites de fonctions à valeurs réelles). Dans ce cas, « implique » traduit une implication universellement quantifiée : « pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, et toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f ».

Le mot « implique » est présent dans la maxime « le faux implique n'importe quoi », qui est parfois utilisée pour dire qu'une implication est vraie quand sa prémisse est fausse. Je reviendrai sur cette maxime, pour le moment je me contente de dire qu'en l'occurrence, il serait plus juste de dire « "le faux implique le faux" est vrai, et "le faux implique le vrai" est vrai ».

Utilisation de « si..., alors... »

Dans le langage courant comme dans le langage mathématique, « si..., alors...... » s'utilise avec deux propositions. Une petite particularité à signaler toutefois : dans le langage courant, il y a des phénomènes d'anaphore (procédé consistant à rappeler un mot ou groupe de mots précédemment énoncé par un terme grammatical). C'est ce qui se produit

13. Une telle formulation peut être vue comme un condensé de la phrase « le fait que n est divisible par 4 implique le fait que n est pair ».

dans l'exemple « si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme » : derrière le *alors* il y a un énoncé dans lequel un mot (c') est utilisé pour rappeler un terme de la prémisse, et cet énoncé n'est pas, pris isolément, une proposition. Quand il y a un tel phénomène, l'écriture de la réciproque ou de la contraposée demande quelques réaménagements. Ainsi, quand on dit, par exemple, que la réciproque de la proposition « si P alors Q » est la proposition « si Q alors P », cela s'applique uniquement quand les deux énoncés reliés par *si. . ., alors. . .* sont des propositions ayant du sens même prises isolément, ce qui est bien sûr le cas quand ils sont exprimés dans le registre formalisé, mais ce qui est loin d'être toujours le cas dans les exemples proposés aux élèves, ce qui leur laisse alors la charge de ces réaménagements.

Signalons ici une difficulté dans des formulations du type « s'il existe x tel que $P[x]$ alors $Q[x]$ ». Considérons par exemple :

$$(*) \text{ s'il existe un réel } x \text{ tel que } f(x) = 3 \text{ alors } x > 1$$

Comment formuler cette proposition dans le registre formalisé ? On pourrait être tenté de proposer :

$$(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3) \Rightarrow x > 1$$

Mais alors la variable x est muette dans la prémisse et parlante dans la conclusion, ce qui pose problème car la proposition ainsi obtenue contient alors une variable parlante, ce qui n'est pas le cas de la proposition $(*)$. On peut très bien écrire de manière équivalente la proposition :

$$(\exists y \in \mathbb{R},\ f(y) = 3) \Rightarrow x > 1$$

dont on voit clairement qu'elle n'est pas équivalente à $(*)$.

On peut alors essayer de conserver une quantification existentielle sans avoir x parlante dans la conclusion en écrivant la proposition suivante, dont on se rendra rapidement compte qu'elle ne convient pas :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 3 \Rightarrow x > 1)$$

En effet, toute fonction vérifie cette dernière proposition (il suffit de prendre $x = 2$) alors qu'il y a des fonctions qui ne vérifient pas la proposition $(*)$.

En fait, malgré la présence de « s'il existe » dans cette proposition $(*)$, il s'agit d'une proposition purement universelle. Cette proposition $(*)$ est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 3 \Rightarrow x > 1)$$

En fait, n'importe quelle implication universellement quantifiée « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ » peut se lire « s'il existe un x tel que $P[x]$ alors il vérifie $Q[x]$ », formulation utilisée notamment dans des phases de recherche d'une condition nécessaire.

Expressions en lien avec les notions de condition nécessaire, condition suffisante

Je signale ici quelques expressions utilisées en mathématiques pour dire « $P \Rightarrow Q$ » :
– P est une condition suffisante pour (que) Q, P suffit à Q, pour (que) P il faut (que) Q
– Q est une condition nécessaire pour (que) P, pour (que) Q il suffit (que) P, il faut (que) Q pour (que) P

Ces expressions sont particulièrement complexes à utiliser du fait du double jeu entre suffisant et nécessaire (dans $P \Rightarrow Q$, qu'est-ce qui est nécessaire à quoi, qu'est-ce qui est suffisant à quoi ?), et entre les places dans la phrase (parfois P est en premier, comme dans $P \Rightarrow Q$, parfois P est en second). Parfois, ces formulations seront plus compréhensibles en passant par la contraposée (par exemple, « il faut Q pour P » est peut-être plus facile à entendre comme « si NON Q, alors NON P »).

Pour terminer, je mentionnerai une difficulté liée à l'expression « si et seulement si ». Quand nous disons « P si et seulement si Q », on dit « P si Q », qui correspond à $Q \Rightarrow P$, et « P seulement si Q », qui correspond à $P \Rightarrow Q$. Ainsi, quand nous commençons la démonstration d'une équivalence « P si et seulement si Q » en montrant $P \Rightarrow Q$, nous commençons par montrer le « seulement si », et non le « si » qui vient en premier dans l'expression.

3.5.3 Difficultés pour les élèves avec l'implication

Quantification universelle implicite

Nous avons déjà vu (par exemple avec la tâche du labyrinthe, page 82) que certains élèves interprètent la proposition « si $P[x]$ alors $Q[x]$ » comme une proposition ouverte pour laquelle ils ne peuvent pas conclure si elle est vraie ou fausse, et qu'ils n'ont pas tort du point de vue de la logique mathématique.

On pourrait alors suggérer qu'il suffit d'apprendre aux élèves que, même s'il n'y a pas écrit « pour tout », il faut faire comme si c'était le cas. Je donnerai trois arguments contre une telle suggestion.

Le premier est lié a la négation. En effet, pour donner la négation de la proposition « si $P[x]$ alors $Q[x]$ », comme elle est généralement entendue, c'est-à-dire comme une implication universellement quantifiée, il ne suffit pas de savoir que la négation de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition (P ET NON Q) (ce qui est déjà bien !), et de proposer ($P[x]$ ET NON $Q[x]$). Ici, il faut expliciter la quantification existentielle, la négation est « il existe x tel que ($P[x]$ ET NON $Q[x]$) ». Expliciter la quantification universelle aiderait les élèves à penser à cette quantification existentielle !

Le deuxième concerne le domaine de quantification. En l'absence de quantification universelle explicite, le domaine de quantification (c'est-à-dire le domaine auquel la variable est astreinte) n'est évidemment pas mentionné. Or, bien sûr, la connaissance de ce domaine est nécessaire pour se prononcer sur la vérité de l'implication. Ainsi, dans une classe où on demande aux élèves de se prononcer sur la proposition « si $x^2 \geqslant 1$ alors $x \geqslant 1$ », certains désaccords entre élèves peuvent être dus au fait que certains rétablissent la quantification universelle et pas d'autres, mais certains hésiteront aussi car c'est vrai quand les variables sont astreintes à $\mathbb{R}_+$, faux quand les variables sont astreintes à $\mathbb{R}$.

Le troisième argument a trait à la place et à la portée du quantificateur omis. Deux exemples sont donnés dans *Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques* (Hache & Mesnil, 2012, pp. 215-216). Je reprends ici le deuxième. Considérons la proposition suivante (dans laquelle la variable k est astreinte à $\mathbb{R}$, et la variable f à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$(*) \text{ Si } f \text{ est croissante alors } |k| \times f \text{ est croissante}$$

Replaçons maintenant les quantifications universelles, il y a deux possibilités :
– (1) : $\forall f \, \forall k$ (si f est croissante alors $|k| \times f$ est croissante)
– (2) : $\forall f$ [si f est croissante alors ($\forall k$ $|k| \times f$ est croissante)]
Ces deux propositions sont équivalentes, on peut donc *a priori* utiliser indifféremment l'une ou l'autre de ces formulations. Or, examinons maintenant les réciproques :
– réciproque de la proposition (1) : $\forall f \, \forall k$ (si $|k| \times f$ est croissante alors f est croissante)
– réciproque de la proposition (2) : $\forall f$ [si ($\forall k$ $|k| \times f$ est croissante) alors f est croissante]
Les deux réciproques obtenues ne sont pas équivalentes (la première est fausse, la deuxième est vraie). Ainsi, on ne peut pas rétablir les quantifications universelles implicites dans la proposition $(*)$ indifféremment comme dans la proposition (1) ou comme dans la proposition (2).

Vérité de l'implication et vérité de la prémisse

Dans les réponses à un questionnaire proposé à des étudiants entamant leurs études à l'université, V. Durand-Guerrier repère une conception « selon laquelle affirmer un énoncé conditionnel, c'est affirmer son antécédent », et relie cette conception à l'utilisation d'une implication dans les démonstrations :

> Cette conception commune semble donc assez résistante, au sens où elle *résiste* à la pratique et aux savoirs acquis en mathématiques [...] On peut naturellement mettre en relation le fait de ne pas considérer les cas qui rendent faux l'antécédent avec la pratique scolaire usuelle où l'implication est utilisée essentiellement pour appliquer la règle du détachement [14], après avoir contrôlé que les hypothèses du théorème sont satisfaites. (Durand-Guerrier, 2005, p. 56)

14. Ou *modus ponens* : de A et de si A alors B, on déduit B.

Une telle conception amène des difficultés dans des questions faisant intervenir la contraposée, comme le montre V. Durand-Guerrier avec certaines réponses d'étudiants à la question suivante :

> Si un domaine plan D_1 est inclus dans un domaine plan D_2, alors son aire A_1 est inférieure à l'aire A_2 du domaine D_2.
>
> Que peut-on dire de D_1 et de D_2 sachant que $A_1 > A_2$?

Un étudiant répond : « C'est impossible puisque D_1 est supposé inclus dans D_2. D_1 et D_2 sont à redéfinir. » (Durand-Guerrier, 2005, p. 55). Cette difficulté a aussi été repérée par L. Radford dans (Radford, 1985).

Confusion entre implication et équivalence

Dans sa thèse L. Radford remet en question l'interprétation de certaines erreurs d'élèves comme étant une confusion entre implication et équivalence (Radford, 1985). Il propose un test à des élèves de Première (16-17 ans) dans lequel il y a trois types de question :
– Sachant que « si A alors B » est vraie, et que A est fausse, que conclure sur B ?
– Sachant que « si A alors B » est vraie, et que B est vraie, que conclure sur A ?
– Sachant que « si A alors B » est vraie, et que B est fausse, que conclure sur A ?
Il détecte alors quatre traitements différents de l'implication, dont le premier pourrait être interprété comme une confusion entre implication et équivalence, mais pour lequel Radford parle plutôt de co-occurrence :

> Le premier [traitement de l'implication] est globalisant : il consiste à voir dans les deux événements A et B de l'énoncé « si A alors B », deux événements inséparables : l'un ne saurait se produire sans l'autre. Vu ainsi, ce traitement semblerait relever de l'équivalence logique. Mais il n'en est rien : c'est une affirmation de co-occurence qui n'a aucune signification logique. (Radford, 1985, p. 194)

Dans un tel traitement, le rôle de la prémisse et le rôle de la conclusion ne sont pas distingués. Pour de tels élèves, dire « si A alors B » revient à dire « soit A et B, soit ni A ni B ». Bien sûr, ce traitement ne pourra pas être mis à mal dans des situations où il y a effectivement équivalence entre A et B !

Le cas de la prémisse fausse

J. Rogalski et M. Rogalski, dans une perspective globale d'étude des erreurs de raisonnement liées à un maniement erroné de la logique, se sont intéressés aux divers modes de traitement de la validité de l'implication par des étudiants (J. Rogalski & Rogalski, 2004). Ils ont conduit une étude empirique faite sur deux groupes d'étudiants entrant dans la préparation au CAPES de mathématiques [15] de l'université de Lille, en 1999 et en 2001. Ils ont notamment étudié le traitement des implications à prémisse fausse, intérêt qu'ils justifient par le fait que « la situation de l'implication à hypothèse fausse est à peu près la seule qui met fortement en évidence le saut qualitatif entre d'une part une certaine logique usuelle, naturelle [...] et d'autre part une logique formelle [16] dont la nécessité intervient de façon plus cachée en mathématiques, au point que les étudiants ne se rendent pas compte qu'elle y est plus qu'on ne le pense à l'œuvre » (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 177).

Des réponses à 3 items concernant des implications de type factuel (où les propositions en jeu sont des données immédiatement saisissables par le sujet, pratiquement sensibles, comme la tâche du labyrinthe, ou qui peuvent éventuellement être à contenu mathématique « routinier » pour les sujets, comme la proposition « si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral »), à prémisse fausse, leur permettent de dégager différents profils :

- **Logique** (réponse du type *l'implication est vraie*, en général avec l'argument *parce que l'hypothèse est fausse*)
- **Pertinent** (réponse du type *l'implication est stupide*, *l'implication n'a pas de sens*)
- **Non conditionnel** (réponse du type *l'assertion est fausse car l'hypothèse est fausse*)
- **Sans dominante** (autre type de réponse ou de distribution de réponse) (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 180)

Voici la répartition dans chaque groupe :

Profil	Premier groupe (107 étudiants)	Deuxième groupe (71 étudiants)
Logique	17,7 %	21,1%
Pertinent	21,5%	23,9%
Non conditionnel	42%	39,4%
Sans dominante	18,7%	15,5%

Seules les réponses des étudiants du profil *logique* sont en adéquation avec la table de vérité de l'implication, mais nous ne savons pas si c'est effectivement la connaissance de cette table qui permet aux étudiants de conclure. Dans sa thèse V.Deloustal-Jorrand relate une pré-expérimentation avec des étudiants en maîtrise de mathématiques (quatrième année à l'université) (Deloustal-Jorrand, 2004). Elle a notamment demandé aux étudiants ce qu'ils pensaient des implications suivantes (ils pouvaient cocher l'une des quatre cases Vrai, Faux, On ne peut pas savoir, Je ne sais pas répondre) :

- 3 pair $\Rightarrow$ 4 pair
- 3 pair $\Rightarrow$ 4 impair
- 3 impair $\Rightarrow$ 4 pair
- 3 impair $\Rightarrow$ 4 impair

15. Concours qui permet de devenir professeur de mathématiques dans le secondaire.
16. Je rappelle qu'en France, les étudiants en mathématiques, et en particulier ceux qui vont préparer le CAPES, n'ont le plus souvent aucune formation en logique mathématique.

Ces étudiants ont suivi plusieurs séances de travail sur l'implication, et ont notamment vu sa table de vérité. Sur 17 étudiants, 16 répondent correctement à ces questions, et l'auteur relie cela à la connaissance de la table de vérité.

Il semble alors naturel de se demander si le fait de ne pas savoir qu'une implication est vraie quand sa prémisse est fausse est handicapant dans l'activité mathématique. En effet, on se retrouve assez peu souvent (je serais presque tentée de dire *jamais*) en situation de devoir valider une implication en justifiant sa vérité par le fait que sa prémisse est fausse. Par contre, on « croise » plus souvent qu'on ne croit des implications à prémisse fausse, notamment parce qu'à chaque fois que nous affirmons la vérité d'une implication universellement quantifiée « pour tout x, $(P[x] \Rightarrow Q[x])$ », nous affirmons en particulier la vérité d'un certain nombres d'implications à prémisse fausse (voir le troisième argument en faveur du choix fait pour la table de vérité de l'implication page 128). Dans certaines récurrences, il peut nous arriver de montrer que l'hérédité est vraie à partir d'un certain rang n_0, mais sans pouvoir initialiser la propriété au rang n_0 parce qu'elle n'est vraie qu'à partir d'un rang $n_1 > n_0$ (nous aurons alors montré la vérité d'implications dont la prémisse est fausse : les implications $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ pour $n_0 \leqslant n < n_1$). J. Rogalski et M. Rogalski donnent aussi l'exemple d'une récurrence descendante, de certains raisonnements par l'absurde (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 178).

J. Rogalski et M. Rogalski étudient ensuite les réponses aux autres items du questionnaire, qui mettent en jeu des validations d'implications à contenu mathématique, des implications « arbitraires », correspondant à la définition d'une règle (par exemple dans un exercice inspirée d'un test célèbre appelé « la tâche de Wason », dans lequel il est question de la règle « si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un nombre pair sur son autre face »), des implications de « contrat social » (par exemple dans un exercice une maîtresse dit « demain, si quelqu'un a su résoudre l'exercice, je vous donnerai des bonbons ») (voir J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 179), et regardent si le regroupement des réponses selon les profils définis ci-dessus est pertinent. Ils regardent aussi la réussite au CAPES pour chaque profil. Globalement, il y a une meilleure réussite, au questionnaire comme au CAPES, pour les étudiants qui ont le profil *logique*, et une moins bonne réussite pour les étudiants qui ont le profil *non conditionnel.* Les auteurs ne cherchent pas un lien de cause à effet dans les corrélations qu'ils ont mises en évidence, c'est-à-dire qu'ils ne se lancent pas dans des explications du type « les étudiants qui manifestent une meilleure compétence mathématique ont le profil *logique* parce que… », ou à l'inverse « les étudiant qui ont le profil *logique* manifestent une meilleure compétence mathématique parce que… ». Ils se demandent par contre comment agir face à ce constat que des étudiants sont reçus au CAPES, et vont devenir professeurs de mathématiques, alors que leur « aptitude à évaluer des implications pose de sérieux problèmes » (J. Rogalski & Rogalski, 2004, p. 193). Ils doutent qu'un enseignement de logique formelle soit efficace, mais suggèrent un enseignement de logique en interaction avec l'activité mathématique, éventuellement avec une dimension historique. Or, si des expérimentations locales et ponctuelles ont eu lieu, et ont été assez concluantes (les auteurs évoquent le débat scientifique de M. Legrand, des cours proposés en DEUG [17] par V. Durand-Guerrier ou R. Pellissier), les questions de logique continuent d'être globalement absentes de la formation initiale des enseignants de mathématiques, et l'on peut supposer que les résultats de cette étude si elle était menée aujourd'hui ne seraient pas très différents.

Dans la conduite des situations de débat scientifique (pratique initiée par M. Legrand, reprise par exemple dans la brochure de M. Gandit et M-C. Demangeot, *Le vrai et le faux au collège et au lycée*), dans lesquels les élèves ont à se prononcer sur la vérité ou non d'une implication « pour tout x, si $P[x]$ alors $Q[x]$ », M. Legrand distingue trois catégories de valeurs possibles pour la variable x :
– les *exemples*, qui vérifient la prémisse et la conclusion,
– les *contre-exemples*, qui vérifient la prémisse et pas la conclusion,
– les *hors-sujet*, qui ne vérifient pas la prémisse. (Gandit & Masse-Demongeot, 2001)
Du point de vue de la logique mathématique, la distinction entre *exemples* et *hors-sujet* n'a pas vraiment de raison d'être : certes, nous pouvons les associer chacun à des lignes différentes de la table de vérité du connecteur IMPLIQUE, mais dans le deux cas, l'implication « si $P[x]$ alors $Q[x]$ » est vraie. Ils interviennent par contre différemment dans les réponses des élèves à ce type de tâche : il est courant que des élèves proposent un hors-sujet pour infirmer une implication, ou un exemple pour la démontrer. La catégorisation proposée ci-dessus peut s'avérer utile pour identifier ces types d'erreurs (on ne prouve pas une implication universellement quantifiée avec un exemple ! on ne l'infirme pas avec un hors-sujet, mais avec un contre-exemple !).

3.6 Quantificateurs

3.6.1 Approche à partir de la logique mathématique

Nous avons vu dans l'étude épistémologique que dans la logique Aristotélicienne, les propositions sont différenciées selon un critère de quantité. La quantification est ainsi déjà présente dans cette formalisation des propositions, mais elle n'est pas séparable du reste de la proposition (c'est-à-dire que la quantification n'est pas une opération supplémentaire que l'on peut faire à partir d'une proposition). C. S. Peirce (sémiologue, philosophe et logicien américain, 1839-1914) est le premier [18] à dégager toute la portée du fait de « sortir » la quantification de la proposition en utilisant des quantificateurs qui « portent sur un ou plusieurs individus indéterminés x, y, z, arguments d'une fonction, la distinction étant nettement faite entre le ou les quantificateurs et la formule qu'ils quantifient »

17. Diplôme d'Études Universitaires Générales, correspondant jusqu'en 2003 aux deux premières années à l'université.
18. Il reconnaît à son élève Mitchell la paternité des symboles qu'il utilise.

(Blanché, 1970, p. 299). Je dirai alors qu'il y a dans une proposition :
- une quantification quand des éléments y expriment l'idée d'une quantité,
- un quantificateur quand cette quantification est marquée par une expression possédant la propriété de pouvoir être séparée du reste de la proposition, qui est alors encore une proposition.

La logique des prédicats utilise deux quantificateurs : le quantificateur universel, qui appliqué à une variable x astreinte à un domaine E permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\forall x\, P$, et le quantificateur existentiel, qui appliqué à une variable x permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\exists x\, P$. La proposition $\forall x\, P[x]$ [19] est vraie lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E la proposition $P[a]$ est vraie. La proposition $\exists x\, P[x]$ est vraie lorsqu'il existe au moins un élément a de l'ensemble E tel que $P[a]$ soit vraie [20].

Dans la pratique, on indique souvent dans la proposition le domaine auquel les variables sont astreintes, ce qui rend parfois la succession de quantifications assez chargée, comme dans la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \, \forall x \in I \, \forall y \in I \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

(uniforme continuité de la fonction f sur l'intervalle I).

Il arrive que l'on sépare les quantifications par des virgules et que l'on rassemble les variables astreintes à un même domaine et soumises consécutivement à un même quantificateur, ce qui donne dans le cas présent :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \, \forall x, y \in I, \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Constatons tout de suite que le gain de place est minime ! Conscients qu'il y a là une écriture qui n'est pas tout à fait correcte, certains mathématiciens utilisent le produit cartésien et écrivent : $\forall (x, y) \in I^2$. Il vaut beaucoup mieux s'astreindre à ne faire suivre un quantificateur que par une simple variable. Cela permet de disposer de règles syntaxiques simples et sûres pour manipuler les propositions. De plus, dans l'exemple de la continuité uniforme, l'écriture $\forall x \in I \, \forall y \in I$ permet de mettre en évidence l'inversion de l'ordre des quantifications qui différencie la continuité uniforme sur I et la continuité sur I, qui, elle, s'exprime par :

$$\forall x \in I, \, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \, \forall y \in I, \quad (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

19. Dans la pratique nous rencontrons essentiellement des propositions où la quantification porte sur une variable x qui est libre dans P, d'où la notation $P[x]$. Je n'ai pas utilisé cette notation dans l'aspect syntaxique des quantificateurs, car j'ai voulu souligner que de ce point de vue syntaxique, une proposition telle que $\forall x, y = 4$ est correcte (et il est en fait possible de lui donner une interprétation sémantique, voir dans l'annexe A page 451).

20. L'utilisation d'une lettre a différente de x souligne la différence entre les aspects syntaxique et sémantique.

Je rappelle le carré des oppositions pour les propositions contenant un prédicat unaire :

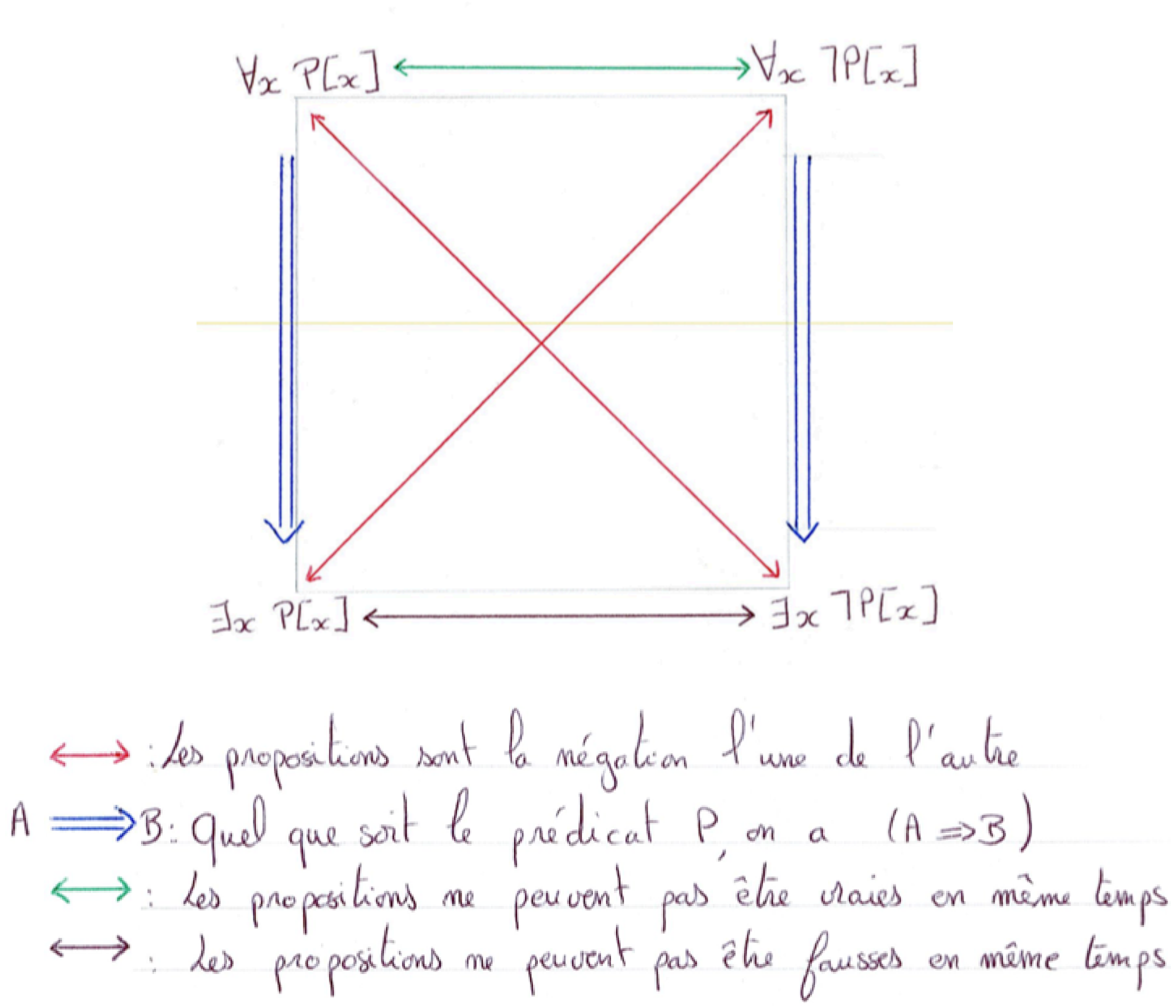


FIGURE 3.7 – Carré des oppositions pour les prédicats unaires avec couleurs

Pour un prédicat binaire $P[x, y]$, selon la nature de la quantification sur x et de la quantification sur y, et l'ordre de ces quantifications, nous obtenons 8 propositions closes différentes. Mais quand les deux quantificateurs sont identiques, « l'ordre n'a pas d'importance » (c'est-à-dire que les propositions $\forall x\, \forall y\ P[x, y]$ et $\forall y\, \forall x\ P[x, y]$ sont équivalentes, ainsi que les propositions $\exists x\, \exists y\ P[x, y]$ et $\exists y\, \exists x\ P[x, y]$). Nous avons alors, à équivalence près, 6 propositions :
- $\forall x\, \forall y \quad P[x, y]$
- $\forall x\, \exists y \quad P[x, y]$
- $\exists x\, \forall y \quad P[x, y]$
- $\exists x\, \exists y \quad P[x, y]$
- $\forall y\, \exists x \quad P[x, y]$
- $\exists y\, \forall x \quad P[x, y]$

Sur le modèle du carré des oppositions, nous pouvons alors construire un dodécagone pour les prédicats à deux variables. Dans la figure ci-dessous (pour laquelle j'ai utilisé la même légende que pour la précédente), toutes les flèches rouges existantes sont dessinées. Par contre, pour ne pas alourdir le schéma, j'ai choisi pour les flèches bleues, vertes et noires de ne noter que celles partant ou arrivant à la proposition $\exists x \, \forall y \; P[x,y]$ ou à sa négation $\forall x \, \exists y$ NON$P[x,y]$:

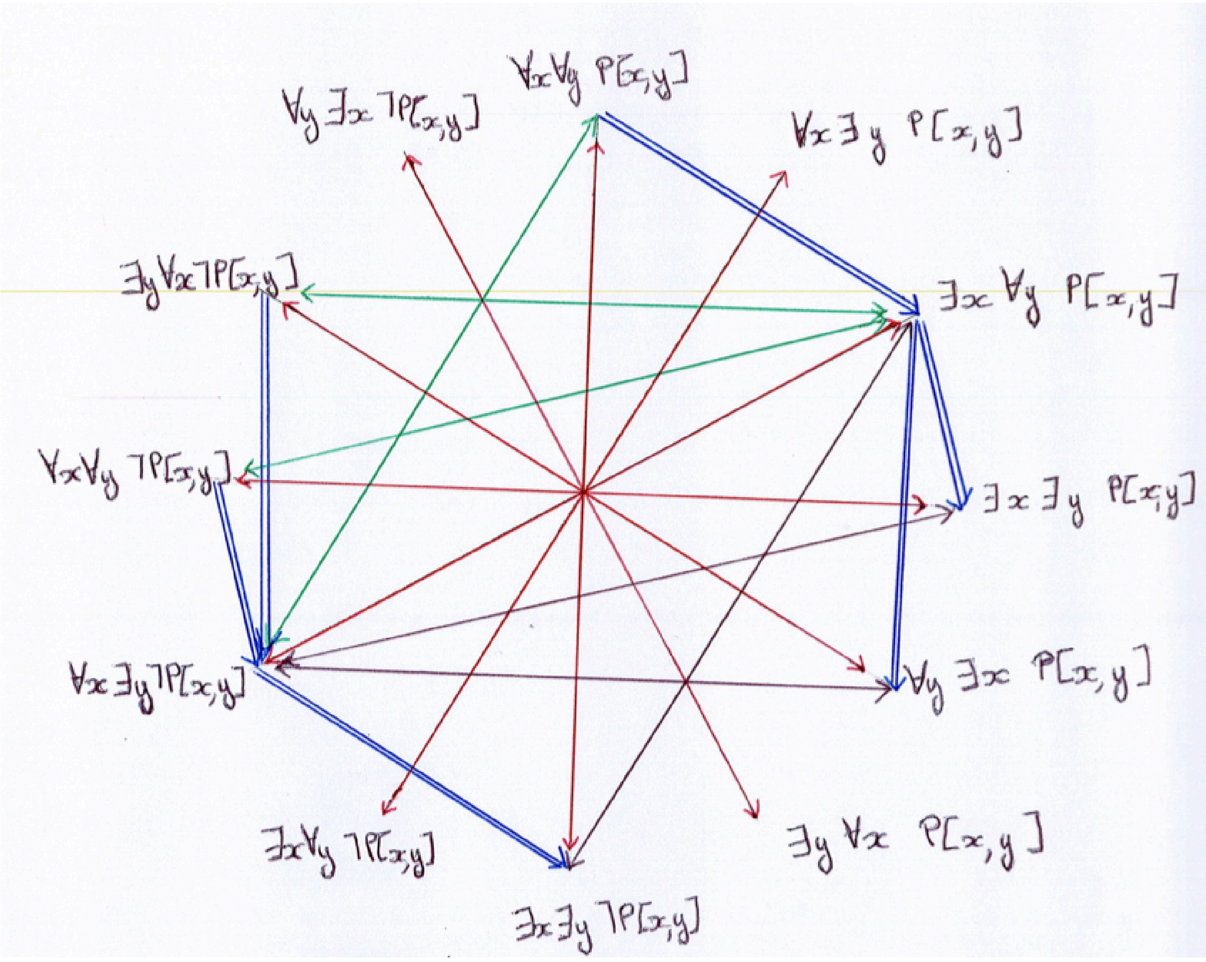


FIGURE 3.8 – Dodécagone des oppositions pour les prédicats binaires avec couleurs

Donnons également quelques propriétés des quantificateurs vis-à-vis des connecteurs ET et OU. Dans le cas d'un ensemble fini E à n éléments $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la proposition « pour tout $x \in E$, $P[x]$ » est équivalente à la conjonction « $P[x_1]$ ET $P[x_2]$ ET … ET $P[x_n]$ », et la proposition « il existe $x \in E$ tel que $P[x]$ » est équivalente à la disjonction « $P[x_1]$ OU $P[x_2]$ OU … OU $P[x_n]$ ».

Par extension, dans le cas d'un ensemble E dénombrable, $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, nous pourrions voir la proposition « pour tout $x \in E$, $P[x]$ » comme « $P[x_1]$ ET $P[x_2]$ ET … ET $P[x_n]$ ET … », et la proposition « il existe $x \in E$ tel que $P[x]$ » comme « $P[x_1]$ OU $P[x_2]$ OU … OU $P[x_n]$ OU … ». D'une façon générale, une quantification universelle peut-être vue comme une conjonction infinie, et une quantification existentielle comme une disjonction infinie.

Cela peut servir pour se souvenir des propriétés suivantes :

Quels que soient les prédicats P et Q,

(1) on a équivalence entre :
   – $\forall x\ (P[x]$ ET $Q[x])$ et $(\forall x\ P[x]$ ET $\forall x\ Q[x])$
   – $\exists x\ (P[x]$ OU $Q[x])$ et $(\exists x\ P[x]$ OU $\exists x\ Q[x])$

(2) les propositions suivantes sont vraies :
   – $(\forall x\ P[x]$ OU $\forall x\ Q[x]) \Rightarrow \forall x\ (P[x]$ OU $Q[x])$
   – $\exists x\ (P[x]$ ET $Q[x]) \Rightarrow \exists x\ (P[x]$ ET $\exists x\ Q[x])$

Les réciproques de ces implications ne sont pas toujours vraies. En effet, considérons les prédicats $P[n]$: « n est pair » et $Q[n]$: « n est impair » (pour une variable n astreinte à $\mathbb{N}$). Alors :
– la proposition « $\forall n\ (P[n]$ OU $Q[n])$ » est vraie,
  mais la proposition « $(\forall n\ P[n]$ OU $\forall n\ Q[n])$ » est fausse,
– la proposition $(\exists n\ P[n]$ ET $\exists n\ Q[n])$ est vraie,
  mais la proposition $\exists n\ (P[n]$ ET $Q[n])$ est fausse.

3.6.2 Expression dans le discours mathématique

Quantifications implicites, quantificateurs

Les quantifications sont souvent implicites, et c'est une difficulté importante, et sous-estimée, pour les élèves (nous avons déjà vu l'exemple de la quantification universelle implicite associée à l'implication). Par ailleurs, elles sont également souvent marquées par d'autres expressions que des quantificateurs (voir page 140 pour la distinction quantification/quantificateur).

Examinons les 12 propositions suivantes [21] (la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$) :

(1) Un nombre réel a un carré positif

(2) Un nombre réel a toujours un carré positif

(3) Tous les réels ont un carré positif

(4) Chaque nombre réel a un carré positif

(5) N'importe quel nombre réel a un carré positif

(6) Le carré d'un nombre réel est positif

(7) Le carré d'un nombre réel est toujours positif

(8) Tout réel x est tel que son carré est positif

21. Certaines paraîtront moins bien formulées que d'autres, mais elles sont toutes grammaticalement correctes, et l'on peut très bien toutes les imaginer prononcées ou écrites dans le cadre d'un cours de mathématiques.

(9) Si x est un réel, alors x^2 est positif

(10) Pour tout réel x, x^2 est un réel positif

(11) Tout réel x est tel que x^2 est positif

(12) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$

Ce sont plusieurs formulations d'une même propriété, mais la quantification universelle y est exprimée de manière très différente.

Dans la proposition (1), la quantification est implicite, sous-entendue par la première occurrence du mot « un ». Nous utilisons fréquemment « un » pour marquer une quantification universelle, dans le langage courant comme en mathématiques. Mais « un » est également utilisé pour marquer une quantification existentielle, ce qui est évidemment source de confusion ! Parfois les deux utilisations cohabitent dans une même proposition, comme par exemple dans « un réel positif possède une racine carrée », ou dans « un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle ». Dans la proposition (1), la deuxième occurrence de « un » n'est pas directement interprétable comme une quantification [22].

Dans la proposition (2) l'implicite de la quantification universelle est levé par l'utilisation du mot « toujours ». La permanence indiquée ici par « toujours » n'est pas une permanence dans le temps, mais une permanence dans un ensemble de valeurs.

Dans les propositions (3), (4), (5), la quantification est explicite, marquée par les mots « tous », « chaque », « n'importe quel ». Dans sa théorie du *denoting*, B. Russell fait une distinction entre ces expressions (pour plus de précisions, on pourra se reporter à *La philosophie mathématique de Russell* , de D. Vernant, 1993, pp. 64-65). Il est probable qu'elles induisent différentes « représentations » chez les élèves, qui seraient différemment opérantes selon les situations. Je n'ai pas connaissance d'études ayant testé cette hypothèse.

Les propositions (6) et (7) se différencient des propositions (1) à (5) car le carré y est sujet et non plus complément. Notons que le déterminant utilisé devant « carré » est « le », qui donne une information qui n'était pas contenue dans les formulations précédentes : l'unicité du carré. Une telle information est également contenue dans (1') : « un nombre réel à son carré positif ».

Les propositions (8) à (12) se démarquent profondément des précédentes par l'utilisation d'une variable. Dans la proposition (8) cependant, la variable est tout à fait superflue, on pourrait dire (8') : « Tout réel est tel que son carré est positif ». La proposition (8) mélange l'utilisation d'une variable et un phénomène d'anaphore (voir page 132) avec le

22. Il est tout de même possible de formaliser cette proposition en utilisant une deuxième variable, et d'interpréter ce deuxième « un » comme une quantification. Nous aurions alors les deux possibilités suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\ (y = x^2 \text{ ET } y \geqslant 0)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ (y = x^2 \Rightarrow y \geqslant 0)$, c'est-à-dire une formulation avec une quantification universelle, et une formulation avec une quantification existentielle. Ceci est dû à l'unicité du carré d'un réel. En effet, plus généralement, quand il y a existence et unicité d'un élément y d'un ensemble E vérifiant la propriété $P[y]$ (ici $y = x^2$), quel que soit le prédicat $Q[y]$ (ici $y \geqslant 0$), les propositions $\exists y(P[y] \text{ ET } Q[y])$ et $\forall y(P[y] \Rightarrow Q[y])$ sont équivalentes.

mot « son », qui fait que la quantification n'est pas séparable du reste de la proposition, comme cela est possible dans la proposition (11).

Quand j'ai décrit le registre formalisé (voir page 90), l'expression des quantifications à l'aide des quantificateurs était une contrainte de mise en forme de ce registre. Dans la liste des propositions précédentes, seules les propositions (10), (11) et (12) appartiennent à ce registre. Dans les propositions (1) à (9), la quantification n'est pas exprimée à l'aide d'un quantificateur, et est plus ou moins explicite.

D'autres expressions cachent des quantifications. C'est le cas par exemple du terme « avec », dans une proposition telle que « $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$ » qui est souvent donnée comme synonyme de « n est pair ». Ici, le terme « avec » cache une quantification existentielle. Autre exemple, l'expression « pour n assez grand », par exemple dans « $np > A$ pour n assez grand ». Dans une proposition « $P[n]$ pour n assez grand », il y a deux quantifications cachées : une existentielle portant sur une variable A qu'il faut réintroduire, et une universelle sur n : cette proposition est équivalente à « $\exists A \forall n\, (n \geqslant A \Rightarrow P[n])$ ». Autre exemple dans un cadre géométrique : la proposition « $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \gamma \in \mathbb{R}$, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M ». La proposition « $N[x]$ est indépendant de x », dans laquelle $N[x]$ n'est pas une proposition mais le nom d'un objet, est équivalente à « $\forall x \forall x'\ N[x] = N[x']$ ». Je ne me prononcerai pas sur le fait que de telles formulations sont ou non plus facilement compréhensibles par les élèves. Par contre, je peux affirmer qu'elles empêchent un travail sur les quantificateurs, puisqu'ils n'y sont pas présents. Par ailleurs, nous avons vu dans la partie de ce chapitre concernant la négation que des telles formulations sont peu opératoires pour formuler la négation (voir page 125).

Les expressions les plus utilisées pour le quantificateur universel sont « pour tout x », « quel que soit x ». Pour le quantificateur existentiel, les expressions les plus utilisées sont « il existe x tel que », « il existe au moins un x tel que », la deuxième étant surtout utilisée quand on veut souligner le fait qu'on ne demande pas l'unicité. La présence d'un verbe dans cette expression oblige à faire la liaison avec la proposition en utilisant « tel que », ce qui n'est bien sûr pas nécessaire quand on utilise le symbole $\exists$. On pourrait marquer le quantificateur universel avec l'expression « tout réel x est tel que », dans laquelle on aurait cette même liaison. Et on pourrait marquer le quantificateur existentiel avec l'expression « pour au moins un x », qui permettrait de l'éviter.

Je terminerai avec l'utilisation, fréquente en mathématiques, du mot « soit », par exemple dans l'énoncé « soit x un réel ». Notons tout d'abord que dans le discours mathématique un tel énoncé peut constituer une phrase à lui tout seul [23] (rappelons que « soit x un réel » n'est pas une proposition, voir page 111). Dans sa thèse, F. Rakotovoavy dit qu'une

23. On ne trouve pas de telle utilisation du mot « soit » dans la langue courante.

telle expression[24] sert à faire une présentation-quantification universelle différée (PUD, voir Rakotovoavy, 1983, p. 50). Quand une PUD est utilisée dans un théorème, elle n'est généralement suivie que d'une (ou en tout cas d'un petit nombre de) proposition(s). Elle marque alors la quantification universelle qui porte dessus (le théorème est de la forme $\forall x,\ P[x]$). Quand une PUD est utilisée au début d'une démonstration, tout ce qui est démontré concernant x est vrai pour tout élément du domaine auquel x est astreinte (c'est-à-dire que chaque proposition $P[x]$ de la démonstration dont on a prouvé la vérité peut être complétée en une proposition close vraie : $\forall x,\ P[x]$). Cela est vrai en particulier de la conclusion. Malheureusement, la démonstration s'arrête souvent là (par exemple elle se termine par « donc $P[x]$ »), et il est assez rare que la quantification universelle soit rappelée, par exemple en ajoutant « nous avons montré que pour tout x, $P[x]$ » (V. Durand-Guerrier signale que cette absence « tend à occulter les questions de généralisation, ou de réciproque, qui pourraient se poser, ce qui va à l'encontre de ce que l'on souhaite développer chez les élèves », (Durand-Guerrier, 2005, p. 94).

Quantification relativisée

En mathématiques, nous avons très souvent recours à la quantification relativisée, par exemple dans la proposition $(*)$: « tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers »[25]. Pour une variable astreinte à $\mathbb{N}$, notons $P[n]$ le prédicat « n est un entier pair supérieur à 3 », et $P'[n]$ le prédicat « n est un nombre premier ». La proposition $(*)$ est équivalente à la proposition $(**)$ (les variables sont astreintes à $\mathbb{N}$) :

$$\forall n, \quad \Big(P[n] \Rightarrow (\exists p, \exists q,\ (P'[p] \text{ ET } P'[q] \text{ ET } n = p + q))\Big)$$

Nous utilisons une quantification universelle relativisée quand nous voulons affirmer une propriété $Q[x]$ non pas de tous les éléments d'un ensemble, mais de ceux possédant une certaine autre propriété $P[x]$. Nous pourrons alors noter $\forall x \mid P[x],\ Q[x]$ (lire « pour tout x tel que $P[x]$, $Q[x]$ »), qui est en fait un « raccourci » pour la proposition « $\forall x$, $(P[x] \Rightarrow Q[x])$ ». De la même manière, nous utilisons une quantification existentielle relativisée quand nous voulons affirmer l'existence d'un élément possédant une propriété $Q[x]$, non pas n'importe où mais parmi les éléments qui possèdent aussi une certaine propriété $P[x]$. Nous pourrons alors noter $\exists x \mid P[x],\ Q[x]$ (lire « il existe x tel que $P[x]$ tel que $Q[x]$ »[26]), qui est en fait un « raccourci » pour la proposition « $\exists x$, $(P[x]$ ET $Q[x])$ ».

24. Elle donne d'autres exemples d'expressions ayant le même effet : « on considère un réel x », « on se donne un réel x ».

25. Cette proposition, à ce jour ni démontrée ni infirmée, est appelée *conjecture de Goldbach*.

26. L'utilisation de l'expression « pour au moins un x » éviterait cette répétition de « tel que », nous dirions alors « pour au moins un x tel que $P[x]$, $Q[x]$ »

Avec ces notations, la proposition $(*)$ devient alors :

$$\forall n \mid P[n], \exists p \mid P'[p], \exists q \mid P'[q], \quad n = p + q$$

Nous voyons dans cette dernière formulation, comme dans la formulation initiale, l'allègement de l'écriture par rapport à la formulation $(**)$. Outre cet allègement, un autre avantage de la quantification relativisée est que la relativisation reste inchangée quand on passe à la négation d'une proposition. Ainsi, la négation de la proposition $(*)$ est :

$$\exists n \mid P[n], \forall p \mid P'[p], \forall q \mid P'[q], \quad n \neq p + q$$

et d'une façon générale, la négation de la proposition « pour tout $x \mid P[x]$, $Q[x]$ » est la proposition « il existe $x \mid P[x]$ tel que NON $Q[x]$ », et la négation de la proposition « il existe $x \mid P[x]$ tel que $Q[x]$ » est « pour tout $x \mid P[x]$, NON $Q[x]$ ». Cet avantage est malheureusement méconnu de certains élèves qui, quand on leur demande la négation d'une proposition commençant par $\forall \varepsilon > 0$, écrivent une proposition qui commence par $\exists \varepsilon < 0$.

Au collège, les propriétés permettant de reconnaître la nature d'un quadrilatère sont données souvent sous la forme *si…, alors …*, mais aussi parfois sous la forme d'une quantification relativisée. Par exemple, on trouvera souvent « si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme », également parfois « un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme », malheureusement rarement « tout quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme », formulation dans laquelle la quantification est explicite. Un avantage de la première formulation est de pouvoir énoncer facilement la réciproque, mais d'une part nous avons vu que cela nécessitait parfois quelques aménagements (voir page 133), d'autre part, nous pourrions définir une notion de réciproque des énoncés de la forme « pour tout $x \mid P[x]$, $Q[x]$ », qui serait « pour tout $x \mid Q[x]$, $P[x]$ ».

Pour terminer cette section, je reviens sur l'utilisation du *si présuppositionnel* en mathématiques (voir page 131), par exemple dans la proposition « si $x > 0$, $\ln(x^2) = 2 \ln x$ ». Contrairement aux apparences, il ne s'agit pas d'une quantification relativisée, puisque $\ln(x^2) = 2 \ln x$ n'a pas de sens sur un domaine plus large que les réels strictement positifs.

3.6.3 Difficultés pour les élèves avec les quantificateurs

Les études qui portent sur la manipulation des quantificateurs dans l'apprentissage des mathématiques se situent dans le contexte de l'enseignement supérieur. Deux raisons à cela : à ce niveau-là, ils sont utilisés de façon plus systématique dans des définitions et des propriétés, souvent sous forme symbolique, et ils interviennent dans des propositions où il y a alternance des deux quantificateurs, ce qui est, nous allons le voir maintenant, source de difficulté pour les étudiants.

Non prise en compte de l'ordre des quantificateurs

J'ai déjà évoqué la recherche de E. Dubinsky et O. Yiparaki montrant une forte tendance chez des étudiants à favoriser, pour des énoncés comportant une quantification universelle et une quantification existentielle, une interprétation « pour tout… il existe » par rapport à une interprétation « il existe… pour tout » (voir page 80). Dans sa thèse déjà citée, F. Chellougui retrouve ce phénomène dans des productions d'étudiants qui ont à démontrer des énoncés contenant simultanément les quantificateurs universels et existentiels (qui sont explicitement présents ou qui sont « cachés » dans la définition de certains termes, par exemple de « A est majorée »). F. Chellougui utilise la déduction naturelle de Copi [27] dans l'analyse *a priori* des tâches proposées aux étudiants, afin de « repérer ce qui relève de la gestion des quantificateurs, ce qui est clairement un appel à des connaissances mathématiques, et de repérer également comment ces deux pôles sont articulés » (Chellougui, 2004, p. 124). Elle mène 6 entretiens semi-directifs avec des binômes d'étudiants de première année d'université de la section Math-Informatique ayant préalablement résolu ces exercices. Au début de chaque entretien, elle demande ce qu'est un majorant, et la plupart des réponses sont formulées ainsi :

Quel que soit x appartenant à A, il existe un réel M tel que x est inférieur ou égal à M. On dit que M est un majorant de A.

Ces réponses sont accompagnées d'une formulation notée sur une feuille :

$$\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leqslant M$$

F. Chellougui relève d'abord qu'une telle définition donne une propriété d'un ensemble A, et non la caractérisation d'une relation entre un élément M et un ensemble A, ce qui peut être repéré en identifiant le statut des variables. En s'appuyant sur la représentation graphique d'un intervalle de $\mathbb{R}$, et en cherchant à voir avec les étudiants s'il vérifie ou non la définition proposée, F. Chellougui tente ensuite de les amener à remettre en cause cette définition. Elle remarque alors dans la discussion qui suit que l'ordre des quantificateurs n'est souvent pas pris en compte par les étudiants. Par ailleurs, elle signale que « cette intervention provoque soit un aménagement de la définition, soit un questionnement sur les objets eux mêmes, mais ne permet pas en général d'aboutir à une définition satisfaisante » (*ibid*, p. 249).

27. Logicien américain, qui reprend le principe de la déduction naturelle de Gentzen et propose son propre système en 1954.

Utilisation des propositions existentielles

F. Chellougui met en évidence une autre difficulté. Elle propose à des étudiants de première année d'université de la section Math-Informatique l'exercice suivant :

On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathscr{R}$ définie par :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad p\mathscr{R}q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*\ p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.

Pour montrer la transitivité, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall r \in \mathbb{N}^*, \Big((p\mathscr{R}q \text{ ET } q\mathscr{R}r) \Rightarrow p\mathscr{R}r\Big)$, il faut utiliser deux fois l'énoncé existentiel qui définit la relation $\mathscr{R}$, c'est-à-dire que suite à l'affirmation de l'existence d'un élément vérifiant une certaine propriété, on va en choisir un et lui donner un nom. Bien sûr, il ne faut pas utiliser la même lettre de variable dans les deux cas. Or, dans la rédaction d'une démonstration, les mathématiciens passent, la plupart du temps, directement de la proposition « il existe n vérifiant $P[n]$ », à un énoncé où apparaît un élément n vérifiant $P[n]$ (par exemple, « N est pair, donc il existe n tel que $N = 2n$ donc $N^2 = 4n^2$ » ; nous y reviendrons dans la partie suivante sur les démonstrations). Dans l'expérimentation proposée par F. Chellougui, seuls 19 étudiants sur 96 changent de lettre entre les deux utilisations. De nombreux autres justifient la transitivité par le raisonnement erroné [28] « $p\mathscr{R}q$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^n = q$, $q\mathscr{R}r$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^n = r$, donc $p^{n^2} = r$ et donc $p\mathscr{R}r$)

Les propositions $\forall, \exists$ et la « règle de dépendance »

Quand nous utilisons un énoncé de la forme « $\forall\varepsilon\, \exists\eta\quad P[\varepsilon,\eta]$ », pour un ε donné, nous pouvons considérer un η vérifiant $P[\varepsilon,\eta]$. Mais ce η dépend de ε. Nous trouvons une erreur due à un non-respect de cette dépendance dans la démonstration ci-après, proposée par un étudiant, et issue de l'article *Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?* de G. Arsac et V. Durand-Guerrier (Durand-Guerrier & Arsac, 2003).

28. Les rédactions des étudiants données en exemples utilisent plutôt des mises en forme de démonstrations avec le symbole d'équivalence, des accolades.

Question ; (E,d) est un espace métrique, A et B sont deux parties de E. On définit $d(A,B) = \inf\{d(x,y),\ x \in A,\ y \in B\}$. Montrer que si A est compact et B est fermé et $A \cap B = \varnothing$, alors $d(A,B) \neq 0$.

Démonstration ;

1 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B, 0 \leq d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

2 Comme $x \in A$, et A fermé $\Longrightarrow x \in \overline{A} \Longrightarrow \exists\ (x_n) \subset A, x_n \rightarrow x$

3 Or, $d(x_n,y) \leq d(x_n,x) + d(x,y)$

4 Et, comme $x_n \rightarrow x$, $\exists\, n_0$, $n \geq n_0$ $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$

5 d'où, pour $n \geq n_0$, $d(x_n,y) < \varepsilon$, ainsi $x_n \rightarrow y$ et comme $(x_n) \subset A$, alors :

6 $y \in \overline{A} = A$, or $y \in B \Longrightarrow y \in A \cap B \Longrightarrow A \cap B \neq \varnothing$.

Tableau 3. – Le texte de la démonstration de l'étudiant

FIGURE 3.9 – Démonstration proposée par un étudiant

Les auteurs soumettent cette preuve à 21 enseignants. Tous, sauf un, écrivent que « x et y dépendent de ε », dépendance explicitée dans des termes très variés selon les enseignants (voir p. 324 de l'article). Pour les auteurs, cette règle de dépendance est emblématique du fait que « le professeur communique des règles de raisonnement contextualisées qui remplacent l'appel explicite à la logique », bien qu'elle présente un caractère exceptionnel, « d'une part par l'unanimité de son emploi par les enseignants, d'autre part par la fréquence de son explicitation dans les manuels » (p. 331). Les enseignants interrogés se servent de leur expertise mathématique pour dire que dans un tel cas, il aurait fallu expliciter la dépendance. Dans son HdR déjà citée, V. Durand-Guerrier parle d'un paradoxe didactique : « l'appropriation des règles de raisonnement suppose apparemment l'expertise mathématique, qui précisément fait défaut à celui qui étudie un nouveau domaine mathématique. » (Durand-Guerrier, 2005, p. 146).

3.7 Synthèse de l'étude du langage mathématique

Dans ce chapitre nous avons étudié des éléments constitutifs des expressions mathématiques, en prenant comme référence la logique des prédicats. Nous avons alors identifié plusieurs difficultés possibles pour les élèves dans l'utilisation du langage mathématique :

– le mélange, pour certains termes, d'un usage conforme à la logique mathématique, et d'un usage différent dans le langage courant. C'est le cas par exemple du mot « et » dont nous avons vu qu'il ne traduit pas toujours un connecteur propositionnel ET, ou encore du principe du maximum d'information qui agit sur les phrases avec « ou », mais qui ne vaut pas pour le langage mathématique.

– L'usage d'un même mot dans différentes expressions dans lesquelles il ne prend pas toujours le sens que lui donne la logique mathématique. C'est le cas par exemple du mot « si », qui n'est pas toujours employé pour traduire le connecteur IMPLIQUE, mais qui sert aussi à marquer une restriction pour qu'une proposition ait un sens, ou qui est utilisé dans les définitions.
– L'emploi de variables et de mutificateurs agissant sur ces variables est une spécificité du langage mathématique. Apprendre à formuler et à comprendre des propositions comportant des variables, différencier les statuts (libre ou liée) d'une variable, sont des compétences importantes pour la maîtrise du langage mathématique, rarement explicitement enseignées. C'est particulièrement vrai pour les différents statuts des variables, dont peu d'enseignants sont familiers.
– De nombreux implicites sont présents dans les pratiques langagières de la communauté mathématique, implicites qui ne sont pas toujours partagés par les élèves, ce qui peut amener des malentendus. Des formulations qui semblent parfois plus proches d'une compréhension intuitive masquent souvent une structure logique complexe et rendent difficile la manipulation des propositions ainsi formulées.

La mise en évidence de ces implicites et de ces ambiguïtés n'a pas pour but de les faire disparaître des pratiques langagières des mathématiciens. Mais il paraît essentiel que les professeurs en prennent conscience, pour qu'ils puissent en informer leurs élèves.

Les constituants des expressions mathématiques utilisés pour leur formulation dans le registre formalisé (connecteurs, quantificateurs) sont familiers aux mathématiciens. La logique mathématique a aussi pour objet la formalisation des démonstrations, mais les formalisations proposées sont beaucoup moins connues que le langage des prédicats. Je vais dans le chapitre suivant proposer une étude des divers types de raisonnement, comme je viens de le faire pour les expressions mathématiques, en m'appuyant notamment sur la formalisation proposée par la déduction naturelle.

Chapitre 4

Les raisonnements

Sommaire

Dans le chapitre précédent, j'ai proposé une présentation des notions de logique qui sont des éléments constitutifs du langage : proposition, variable, connecteur, quantificateur. Afin de constituer une référence pour la réflexion sur l'enseignement de ces notions au lycée, j'ai combiné trois points de vue : celui de la logique mathématique, celui des pratiques langagières des mathématiciens, celui de la didactique des mathématiques.

Bien sûr, une référence pour l'enseignement de notions de logique au lycée ne peut pas s'arrêter là. Si j'ai affirmé ma volonté de réhabiliter dans cette thèse le pilier langage de la logique, et si j'ai suivi, en commençant par présenter les notions de logique en lien avec le langage, la même démarche que les auteurs des systèmes logiques étudiés dans le premier chapitre, il n'en reste pas moins que le but de la logique est d'assurer la validité des raisonnements, et qu'il n'est pas question de faire l'impasse sur ces derniers. Ce chapitre est ainsi consacré aux raisonnements. Il est cependant beaucoup moins détaillé que le précédent. En particulier, je ne présente pas de résultats de travaux didactiques sur le raisonnement (qui sont très nombreux, je renvoie aux actes de la 19ème étude ICMI, *Proof and Proving in mathematics education* (Hanna & De Villiers, 2011) qui constituent une synthèse récente et riche des recherches sur le sujet).

Je présente d'abord deux approches de la formalisation des démonstrations : le système axiomatique de Hilbert et Ackermann et la déduction naturelle de Gentzen, dont j'explique le fonctionnement pour les démonstrations dans le calcul des propositions.

De la même façon que dans le chapitre précédent, l'implication est l'objet d'un paragraphe spécifique : j'y reviens sur la distinction entre implication et déduction, entre vérité et validité (voir page 37 dans le premier chapitre), sur les deux règles du *modus ponens* et du *modus tollens*, inégalement institutionnalisées dans la classe de mathématiques, sur la différence entre le *démonstrateur* d'une implication (souvent le professeur, en tout cas au lycée) et l'*utilisateur* d'une implication (souvent l'élève).

J'aborde ensuite les quantificateurs en faisant le lien entre les règles d'introduction et d'élimination de la déduction naturelle et les pratiques langagières relatives aux variables dans les démonstrations courantes.

Je termine par un rapide examen des types de raisonnement présents dans les programmes : raisonnement par contre-exemple, raisonnement par contraposée, raisonnement par l'absurde, raisonnement par disjonction des cas, raisonnement par récurrence. La logique mathématique fournit une justification de leur validité, et permet d'expliquer quelques difficultés qui leur sont liées.

4.1 Formalisation des démonstrations

Formaliser les démonstrations revient à définir mathématiquement la notion de « être démontrable », avec des critères purement syntaxiques. Nous retrouvons l'idée de ramener le raisonnement à un calcul sur des signes qui était déjà le but de Leibniz (voir section 1.2.2 dans la première partie). Bien sûr, on veut que cette idée de démontrabilité préserve la vérité, c'est-à-dire que si la proposition B est démontrable à partir d'une proposition A, alors lorsque A est vraie, B est vraie [1]. La première formalisation achevée est celle de Frege (voir la section 1.3.2 dans la première partie). Elle repose sur le principe suivant : on se donne un ensemble d'axiomes logiques et des règles permettant d'en déduire d'autres « lois logiques ». Dans un tel système axiomatique, une démonstration formelle est une suite finie de propositions (écrites dans une langue formelle) telle que chaque proposition est soit un axiome, soit obtenue par l'application d'une règle de déduction à partir de propositions qui se trouvent précédemment dans la suite. La dernière proposition est la proposition à démontrer. Cette approche est ensuite développée par Whitehead et Russell, puis par Hilbert.

G. Gentzen n'est pas satisfait par de tels systèmes axiomatiques, et il veut « édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques » (Gentzen, 1955, p. 17). Il propose alors un système qu'il appelle *la déduction naturelle* et dans lequel il n'y a pas d'axiomes : « la déduction naturelle ne part pas, en général, de propositions logiques fondamentales, mais d'hypothèses, auxquelles viennent se rattacher des déductions logiques. Grâce à une déduction ultérieure, le résultat est alors rendu indépendant des hypothèses [2] » (Gentzen, 1955, p. 19). Dans le système qu'il propose, les règles régissent le comportement des connecteurs et des quantificateurs. Elles sont de deux types : les règles d'introduction et les règles d'élimination.

Dans la suite, je vais présenter le système de Hilbert et Ackermann (exposé dans *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928) pour le calcul des propositions et la déduction naturelle de Gentzen (exposée dans *Recherches sur la déduction logique*, 1934) pour le calcul des propositions et des prédicats.

On peut trouver une présentation relativement simple (parfois d'ailleurs un peu trop simplifiée) de ces deux systèmes dans le livre *Logique et raisonnement* de M. Freund (Freund, 2011), et une présentation plus approfondie dans *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale* de P. Gochet et P. Gribomont (Gochet & Gribomont, 1990).

1. J'utilise ici un vocabulaire, et notamment une notion de vérité, très informels. Ceci peut être précisé avec les notions de conséquence sémantique et conséquence syntaxique (voir annexe A page 453), et le théorème de complétude (voir annexe A page 453).

2. Nous verrons une illustration de ce principe avec la règle d'introduction de l'implication page 158.

Comme dans le chapitre précédent, le but ici n'est pas de faire une présentation théorique, mais de mettre ces systèmes formels en relation avec les pratiques, notamment langagières, utilisées en mathématiques pour la rédaction des démonstrations.

J'utiliserai dans ce qui suit les symboles $\wedge$, $\vee$ et $\neg$ respectivement pour les connecteurs ET, OU et NON.

4.2 Preuves dans le calcul des propositions

Je rappelle que le calcul des propositions est l'étude des propositions formées à partir de variables propositionnelles et des connecteurs.

Dans un système axiomatique, on isole dans ces propositions un sous-ensemble d'*axiomes*, qui sont des tautologies [3]. À partir de ces axiomes et de *règles d'inférence*, on démontre des *théorèmes*.

La déduction naturelle cherche à être plus proche du raisonnement naturel. Elle ne fonctionne qu'avec des règles, mais qui sont de nature plus générale que celles que l'on utilise dans les systèmes à la Hilbert, qui n'agissent que sur des propositions : les règles de la déduction naturelle agissent sur les démonstrations.

Une démonstration est un objet que l'on peut voir comme un texte composé de propositions et de règles, mais il n'est pas nécessaire de définir explicitement cet objet. Le tout est de savoir qu'une démonstration possède des hypothèses : une suite finie de propositions, et une conclusion : une seule proposition. Une règle de déduction permet de construire une nouvelle démonstration à partir d'autres démonstrations. Une règle prend ainsi en argument des démonstrations, que l'on peut voir comme des textes déjà écrits, en ne tenant compte que de la conclusion et des hypothèses de ces démonstrations. C'est à partir de ces démonstrations que la règle permet de poursuivre en produisant une nouvelle démonstration, avec toujours une nouvelle conclusion, et éventuellement une modification de la liste des hypothèses.

On indique dans ce qui suit comment représenter graphiquement une démonstration : cette représentation donne à voir les règles qui ont permis, à partir des démonstrations élémentaires, d'arriver à la démonstration.

La démonstration la plus simple possible est celle qui est constituée d'une seule proposition A : celle-ci est à la fois hypothèse et conclusion. C'est la démonstration de A sous hypothèse A, la démonstration la plus élémentaire que l'on puisse imaginer. De telles démonstrations sont trop élémentaires pour être explicites dans les démonstrations « réelles »

3. Propositions toujours vraies, quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui y sont présentes.

des mathématiques. Toutes les démonstrations sont constituées de ces démonstrations élémentaires combinées à l'aide de règles.

Les règles les plus simples n'agissent que sur les conclusions des démonstrations. On les représente habituellement de la façon suivante : une suite finie de propositions, qui sont les conclusions des démonstrations en argument, séparées par un trait horizontal d'une autre proposition, qui est la conclusion de la nouvelle démonstration :

$$\frac{H_1, H_2}{C}$$

On pourra lire cette règle de plusieurs façons :
– pour prouver C il suffit de prouver H_1 et de prouver H_2 ;
– si j'ai prouvé H_1 et H_2 alors j'ai prouvé C ;
Et on pourra dire quand on utilise cette règle : « on a H_1, on a H_2, on a donc C ».

Dans ce cas particulier les hypothèses de la nouvelle démonstration sont inchangées, au sens ou ce sont les mêmes s'il n'y a qu'un argument, la mise bout à bout des deux suites d'hypothèses s'il y en a deux, etc.

Pour chaque connecteur ou quantificateur on donne une règle dite d'introduction, qui donne la facon « standard » de prouver une formule construite avec ce connecteur ou quantificateur, et une règle dite d'élimination qui donne la facon « standard » d'utiliser une telle formule. Voyons l'exemple simple des règles de la conjonction :
– règle d'introduction de la conjonction :

$$\frac{P, \quad Q}{P \wedge Q}$$

Elle affirme que pour prouver $P \wedge Q$ il suffit de prouver P et de prouver Q.
– règles d'élimination de la conjonction :

à droite	à gauche
$\frac{P \wedge Q}{Q}$	$\frac{P \wedge Q}{P}$

Elles affirment que si l'on a prouvé $P \wedge Q$, on a prouvé P et on a prouvé Q.
La règle d'élimination de l'implication est encore de la même nature, et est tout à fait analogue à la règle du *modus ponens* des systèmes à la Hilbert :

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

Par contre la règle d'introduction de l'implication est de nature plus générale, car elle agit également sur les hypothèses de la démonstration en argument [4]. C'est la représentation de la règle de démonstration usuelle « pour montrer $P \Rightarrow Q$, il suffit de montrer Q sous hypothèse P ».

4. Cette règle correspond à un lemme que l'on a besoin de démontrer quand on manipule les systèmes à la Hilbert, appelé « lemme de déduction ».

La règle d'introduction de l'implication prend donc comme argument une démonstration de Q qui peut utiliser P parmi ses hypothèses [5], et renvoie une démonstration de $P \Rightarrow Q$ dans laquelle l'hypothèse P a été « déchargée », c'est-à-dire quelle ne fait plus partie de celles-ci dans la nouvelle démonstration [6].

On la représente de la façon suivante :

$$\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots\\ Q\end{array}}{P \Rightarrow Q}$$

Les occurrences de l'hypothèse déchargée sont mises entre crochets. Par exemple :

$$\dfrac{[P]}{P \Rightarrow P} \qquad \dfrac{\dfrac{[P \wedge Q]}{P}}{(P \wedge Q) \Rightarrow P} \qquad \dfrac{\dfrac{[P] \quad [P]}{P \wedge P}}{P \Rightarrow (P \wedge P)}$$

Les tableaux ci-après donnent les schémas d'axiomes ou les règles régissant les connecteurs. Le symbole $\perp$ représente une proposition particulière appelée à être sémantiquement toujours fausse. Les lettres majuscules désignent des propositions [7].

5. Cette hypothèse peut être utilisée plusieurs fois, mais peut aussi ne pas être réellement utilisée.

6. Il est tout à fait licite de ne décharger que certaines des occurrences de l'hypothèse P, ou de décharger une hypothèse qui n'est pas utilisée.

7. Je m'écarte légèrement du système originel de Hilbert et Ackermann dans lequel les axiomes étaient donnés avec des variables propositionnelles et dans lequel la *règle de substitution* (si X est un théorème, toute proposition obtenue en substituant des propositions Y_1, Y_2, $\ldots Y_n$ à des variables propositionnelles p_1, p_2, $\ldots p_n$ de X est également un théorème) permettait de remplacer dans les axiomes ou dans les théorèmes les variables propositionnelles par des propositions arbitraires, ce qui est prévu d'emblée dans la présentation que je propose.

Axiomes du système de Hilbert et Ackermann	Règle de déduction du système de Gentzen
$(P \land Q) \Rightarrow P$ $(P \land Q) \Rightarrow Q$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \land R)))$	élimination à gauche de $\land$: $\dfrac{P \land Q}{P}$ élimination à droite de $\land$: $\dfrac{P \land Q}{Q}$ introduction de $\land$: $\dfrac{P, \quad Q}{P \land Q}$
$P \Rightarrow (P \lor Q)$ $Q \Rightarrow (P \lor Q)$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \lor Q) \Rightarrow R))$	introduction à gauche de $\lor$: $\dfrac{P}{P \lor Q}$ introduction à droite de $\lor$: $\dfrac{Q}{P \lor Q}$ élimination de $\lor$: $\dfrac{P \lor Q, \quad \begin{matrix}[P] \\ M\end{matrix}, \quad \begin{matrix}[Q] \\ M\end{matrix}}{M}$
$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ $(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	introduction de $\Rightarrow$: $\dfrac{\begin{matrix}[P] \\ Q\end{matrix}}{P \Rightarrow Q}$ élimination de $\Rightarrow$: $\dfrac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q}$

Axiomes du système de Hilbert et Ackermann	Règle de déduction du système de Gentzen
$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q))$	
$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ $P \Rightarrow \neg\neg P$ $\neg\neg P \Rightarrow P$	introduction de ¬ : $\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ \bot\end{array}}{\neg P}$ élimination de ¬ : $\dfrac{P, \quad \neg P}{\bot}$
	élimination de l'absurde : $\dfrac{\bot}{P}$ réduction à l'absurde : $\dfrac{\begin{array}{c}[\neg P]\\ \bot\end{array}}{P}$

Gentzen reformule en ces termes la règle d'élimination de l'absurde : « si la proposition fausse est valable, toute proposition, quelle qu'elle soit, est valable » (Gentzen, 1955, p. 25). La maxime « le faux implique n'importe quoi », déjà évoquée page 132, peut aussi être un raccourci imprudent associé à cette règle de déduction. Il est alors essentiel de ne pas penser qu'elle dit que du fait qu'une proposition soit fausse je peux déduire que n'importe quelle proposition est vraie (la possibilité d'une telle déduction serait très gênante puisqu'il existe évidemment des propositions fausses).

Les axiomes du système de Hilbert et Ackermann sont accompagnés de la règle de déduction suivante :

Règle de détachement : De P et de $P \Rightarrow Q$ on dérive Q.

Cette règle de détachement (ou *modus ponens*) est le pendant de la règle d'élimination de $\Rightarrow$.

Je me propose d'illustrer le fonctionnement de ces deux systèmes en donnant les démonstrations de la commutativité du connecteur ET (il s'agit donc de prouver que la proposition (P ET Q) $\Rightarrow$ (Q ET P) est un théorème, c'est-à-dire démontrable sans hypothèse) :

– Dans le système de Hilbert-Ackermann, la démonstration se présente sous forme d'une suite de propositions :
  (1) $((P \wedge Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow (((P \wedge Q) \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)))$
  Substitution de $(P \wedge Q)$ *à* P*, et de* P *à* R *dans le troisième axiome*
  (2) $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$ *Deuxième axiome*
  (3) $((P \wedge Q) \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P))$ *Détachement à partir de* (1) *et* (2)
  (4) $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ *Premier axiome*
  (5) $(P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$ *Détachement à partir de* (3) *et* (4)
  Il ne figure dans la suite que des axiomes et des propositions obtenues par application des règles à ces axiomes ou à d'autres propositions de la suite. Le résultat obtenu est donc un théorème.
– En déduction naturelle, la démonstration se présente sous forme d'un arbre :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{B}\wedge\mathrm{e} \qquad \dfrac{[A \wedge B]}{A}\wedge\mathrm{e}}{B \wedge A}\wedge\mathrm{i}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\Rightarrow\mathrm{i}$$

  L'hypothèse $A \wedge B$ est déchargée par l'application de la règle d'introduction de $\Rightarrow$ ($\Rightarrow$ i), la conclusion est donc démontrée sans aucune hypothèse, c'est un théorème.
  La démonstration peut se lire :
  de $A \wedge B$ on déduit B ($\wedge$e),
  de $A \wedge B$ on déduit A ($\wedge$e).
  De B et de A on déduit $B \wedge A$ ($\wedge$i).
  Comme de $A \wedge B$ on a déduit $B \wedge A$, on a $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$ ($\Rightarrow$i).

4.3 Implication et déduction

Il est essentiel en mathématiques de ne pas confondre implication et déduction, c'est-à-dire de ne pas confondre $A \Rightarrow B$ et (A donc B). $A \Rightarrow B$ est une proposition. Elle peut être vraie ou fausse, ce renseignement ne nous est pas donné par la proposition elle-même mais par son assertion ou son infirmation. De plus, savoir qu'elle est vraie ne nous donne aucun renseignement sur la valeur de vérité de A ni sur celle de B puisque plusieurs distributions de valeurs de vérité rendent $A \Rightarrow B$ vraie. (A donc B) n'est pas une proposition, on ne peut pas lui accorder de valeur de vérité [8]. Cette phrase se situe au niveau *épimathématique*. Affirmer (A donc B), c'est affirmer trois choses :

– que A est vraie
– que B est vraie
– qu'on peut déduire le deuxième renseignement du premier (souvent parce que l'on sait que $A \Rightarrow B$ est vraie).

On voit ici que la troisième affirmation n'est pas l'affirmation de la vérité d'une proposition, mais l'affirmation de la validité d'un raisonnement (voir distinction page 37). Bien sûr, une grande partie des « donc » écrits ou prononcés en mathématiques sont reliés à l'implication car ils marquent une utilisation de la règle du *modus ponens*.

Savoir que $A \Rightarrow B$ est vraie nous permet de faire une déduction dans un autre cas que celui où l'on sait que A est vraie : celui où l'on sait que B est faux. On peut alors déduire que A est faux. Cette inférence correspond au *modus tollens* : de $P \Rightarrow Q$ et de $\neg Q$ je peux déduire $\neg P$. Dans les systèmes de déduction de Hilbert et Ackermann et de Gentzen, il n'y a pas de règles de déduction correspondant au *modus tollens* parce que c'est inutile : on peut facilement dériver une telle règle des axiomes et de la règle de détachement dans le premier cas, des autres règles dans le second cas. Les éléments premiers de ces systèmes sont choisis de façon à être en nombre minimal (de ce point de vue, le système de Hilbert et Ackermann peut être amélioré en choisissant d'autres axiomes qui permettent d'en prendre moins). Il aurait ainsi été redondant de prendre une règle correspondant au *modus ponens* et une règle correspondant au *modus tollens*.

Ces deux règles de déduction sont couramment mises en œuvre dans l'activité mathématique, et l'on peut se demander, d'un point de vue didactique, s'il est pertinent ou non de les faire vivre toutes les deux dans la classe. V. Durand-Guerrier cite certains travaux de psychologie cognitive qui montrent que les enfants sont capables d'utiliser la règle du

8. On n'est pas forcément gêné de dire que *A donc B* est vrai dans un cas où c'est pertinent de dire *A donc B*, par exemple « 12 est un multiple de 4 donc 12 est pair ». Mais que dire alors de « 14 est un multiple de 4 donc 14 est pair », où la déduction "est un multiple de 4 donc est pair" est correcte, mais appliquée à une proposition fausse, la conclusion étant pourtant vraie ? De « 13 est un multiple de 4 donc 13 est pair », qui se différencie du cas précédent car la conclusion est également fausse ? De « 12 est pair donc 12 est un multiple de 4 », où hypothèse et conclusion sont vraies, mais la déduction "est pair donc est un multiple de 4" est incorrecte ? On voit bien que chacune de ces phrases pose des problèmes différents (vérité de l'hypothèse, vérité de la conclusion, validité de l'inférence), et que les qualificatifs vrai/faux n'y sont pas adaptés.

modus tollens dès l'âge de huit ans et soutient qu'elle est « constitutive, au même titre que le *modus ponens*, de l'articulation entre les définitions syntaxiques et sémantiques de l'implication » (Durand-Guerrier, 2005, p. 58). Les élèves sont cependant beaucoup plus souvent en situation d'application du *modus ponens*, et souvent le raisonnement déductif est réduit à la règle « si A alors B, or A, donc B ». Je fais l'hypothèse que cette idée qu'une implication vraie permet de faire des déductions dans deux cas (et qu'une équivalence vraie permet de faire des déductions dans quatre cas !) n'est pas présente dans la classe de mathématiques, et je suis en accord avec V. Durand-Guerrier sur le fait que cela est dommageable à la compréhension de la notion d'implication.

Regardons maintenant ce que doit faire la personne (dans l'enseignement secondaire, c'est presque toujours le professeur) qui *démontre* $A \Rightarrow B$. Elle doit d'abord se placer dans certaines conditions, à savoir se placer sous hypothèse A, et sous cette hypothèse démontrer B. Que doit faire la personne (le plus souvent c'est la tâche principale de l'élève du secondaire) qui *utilise* la proposition $A \Rightarrow B$? Vérifier qu'elle se trouve bien dans le cas où l'hypothèse A est satisfaite (parfois cela n'est pas directement visible, elle doit reconnaître qu'elle est dans un cas où une certaine hypothèse A' est vérifiée, ce qui lui permet de déduire que l'hypothèse A est vérifiée), puis déduire B, en vertu du *modus ponens*, parce qu'elle a à sa disposition le théorème « si A alors B ». Le jeu à jouer est presque toujours le même, qui fait dire aux élèves, connaissant le théorème « si A alors B », que « pour démontrer B il faut A ». Un seul petit pas sépare cette formulation de « pour B il faut A », qui est une autre manière de dire $B \Rightarrow A$ alors que c'est de $A \Rightarrow B$ qu'il s'agit. Contrairement à la personne qui l'utilise, la personne qui doit démontrer $A \Rightarrow B$ a ainsi à sa charge de « planter le décor », ce qui est une difficulté non négligeable pour les élèves. Cette dissymétrie se voit dans les règles de la déduction naturelle, puisqu'il y a dans la règle d'introduction de $\Rightarrow$ une hypothèse déchargée.

Je reviens encore une fois sur l'expression « le faux implique n'importe quoi » (déjà commentée page 132 et page 161). Pour prouver la proposition « P implique Q », nous devons faire une démonstration dans laquelle nous prenons P comme hypothèse et nous arrivons à la conclusion Q. Aussi, nous disons parfois « P implique Q » pour signifier que nous connaissons une telle démonstration, ou en tout cas que nous savons qu'elle existe. La maxime « le faux implique n'importe quoi » peut alors être entendue comme « à partir d'une proposition fausse A, je peux trouver une démonstration de n'importe quelle proposition B ». C'est bien sûr toujours possible en réduisant la démonstration à une application de la règle d'élimination de l'absurde, mais ça n'est généralement pas à une telle démonstration que l'on pense !

4.4 Introduction et élimination des quantificateurs

Après avoir donné des modélisations des démonstrations dans le calcul des propositions, nous allons nous placer dans le calcul des prédicats, car les mathématiques ne se réduisent pas au calcul propositionnel, et regarder les règles qui régissent le fonctionnement des quantificateurs. Je me contenterai de donner les règles d'introduction et d'élimination en déduction naturelle, c'est ce qui me semble le plus proche de la pratique mathématique, et cela m'est suffisant pour la commenter.

Le quantificateur universel

La règle de déduction correspondant à l'introduction de $\forall$ est la suivante [9] :

$$\frac{P[a/x]}{\forall x\, P[x]}$$

la variable a devant satisfaire à la condition suivante : elle ne doit pas apparaître comme variable libre dans $P[x]$ ni dans aucune des hypothèses dont P dépend (c'est-à-dire d'éventuelles propositions précédant P dans la démonstration, et intervenant dans la démonstration de P). Ce qu'on traduit parfois par « a doit être tout à fait quelconque ».

Cette règle affirme que pour prouver $\forall x\, P[x]$, il suffit de prouver $P[a]$, ce qui peut paraître surprenant, et donner l'impression que l'on prouve une proposition universelle en prenant un exemple particulier. Elle correspond pourtant effectivement à ce que l'on fait dans la pratique : pour montrer $\forall x\, P[x]$, on montre $P[a]$ pour un élément a du domaine auquel la variable x est astreinte et sur lequel on ne fait aucune hypothèse particulière (on parle parfois d'*élément générique*, remarquons que ça n'est pas tant l'élément qui est générique que l'usage qui en est fait). Le fait de n'avoir fait aucune hypothèse particulière sur l'élément a est bien sûr essentiel pour pouvoir « généraliser » ce qui a été prouvé pour cet élément. La plupart du temps, on utilise même le même nom pour la variable quantifiée universellement et pour l'élément qu'on se donne pour faire la démonstration c'est-à-dire que pour montrer $\forall x\, P[x]$ on considère un élément que l'on nomme x.

Dans la pratique, il n'est pas si fréquent qu'une tâche soit proposée sous la forme « montrer que pour tout réel x, $P[x]$ » [10]. On utilise plus souvent une formulation telle que « soit x un réel, montrer $P[x]$ », ou « considérons un réel x. Montrer $P[x]$ ». L'utilisation de « soit », ou « considérons » sert à introduire la variable a de la règle d'introduction, et à signaler une quantification universelle (il s'agit de ce que F. Rakotovoavy appelle une PUD, voir page 146). Mais depuis l'abandon des mathématiques modernes, une volonté de simplifier le discours mathématique est perceptible dans les manuels, et de telles expressions sont moins présentes. La tendance actuelle est plutôt de proposer ces tâches sous la forme suivante : « x est un réel. Montrer $P[x]$ ». Ici, plus aucun terme ne marque

9. $P[a/x]$ désigne le résultat de la substitution, dans la proposition P, de la variable a à toutes les occurrences libres de la variable x.

10. Exception faite des démonstrations par récurrence qui sont la plupart du temps présentées sous la forme « montrer que pour tout entier n, $P[n]$ ».

le rôle de présentation et de quantification universelle de variable de la phrase « x est un réel ». Il n'est alors pas facile pour les élèves de comprendre qu'ils ont en fait montré une proposition universelle, d'autant plus qu'il est rare que nos démonstrations se concluent par « nous avons montré que pour tout x, $P[x]$ », c'est-à-dire que l'application de la règle d'introduction du quantificateur universel reste généralement implicite. Par ailleurs, il arrive également que la proposition universelle à démontrer ne comporte aucune variable (par exemple « Le carré d'un entier pair est pair »). Dans ce cas, l'introduction d'une variable est à la charge du démonstrateur, étape qui peut également être une difficulté pour les élèves.

La règle de déduction correspondant à l'élimination de $\forall$ est la suivante :

$$\frac{\forall x\, P[x]}{P[a/x]}$$

Elle affirme que si on a prouvé $\forall x\, P[x]$, alors on a prouvé $P[a]$ pour n'importe quel élément a de l'ensemble auquel la variable x est astreinte (a peut être une expression plus complexe qui désigne un objet mathématique, mais alors cette expression ne doit pas comporter de variable libre qui deviendrait liée dans la proposition $P[a]$).

Il nous arrive très fréquemment en mathématiques (c'est d'ailleurs la déduction emblématique dans l'enseignement secondaire) d'utiliser conjointement l'élimination de $\Rightarrow$ et l'élimination de $\forall$, c'est-à-dire qu'on fait la déduction suivante :

$$\frac{\forall x\, (P[x] \Rightarrow Q[x]) \quad P[a]}{Q[a]}$$

Le quantificateur existentiel

La règle de déduction correspondant à l' introduction de $\exists$ est la suivante :

$$\frac{P[a]}{\exists x\, P[x]}$$

Elle affirme que pour prouver $\exists x\, P[x]$, il suffit de prouver $P[a]$ pour un élément a de l'ensemble auquel la variable x est astreinte. De même que dans la règle d'élimination de $\forall$, a peut être un nom d'objet particulier ou une variable.

On peut repérer la tendance suivante chez les élèves ou étudiants qui ont à démontrer qu'une proposition « il existe x dans E tel que $P[x]$ » est vraie : quand tous les éléments d'un sous-ensemble E' de E vérifient P, plutôt que d'exhiber une valeur particulière pour prouver que « il existe x dans E tel que $P[x]$ » est vraie, ils disent que c'est vrai pour tous les éléments de E'. Par exemple, s'ils ont à démontrer qu'il existe un réel x tel que $x^2 < x$, ils pourraient dire que tous les réels de l'intervalle $]0, 1[$ conviennent, plutôt que de dire seulement que c'est vrai pour une certaine valeur de cet intervalle. On pourrait dire que plutôt que de donner un exemple, ils donnent toute une classe d'exemples. Cela est cohérent avec la démarche de recherche pour prouver un énoncé de la forme $\exists x\, P[x]$: si il n'y a pas une valeur immédiate vérifiant P, il faut essayer de trouver des caractéristiques d'un élément qui convienne, ce qui amène souvent non pas à un seul exemple mais à plusieurs. Et s'il y a alors plusieurs valeurs qui conviennent, pourquoi en privilégier une ? Finalement, dans la démarche de recherche, on va parfois au-delà de la seule question de la vérité ou non, on cherche les éléments qui vérifient la propriété, soit en les listant, soit en les caractérisant.

La règle de déduction correspondant à l'élimination de $\exists$ est la suivante :

$$\frac{\exists x\, P[x] \qquad \begin{matrix}[P[a]]\\ Q\end{matrix}}{Q}$$

Là aussi il y a une condition sur la variable a : elle ne doit apparaître comme variable libre ni dans P, ni dans Q.

Cette règle affirme que si on a prouvé $\exists x\, P[x]$, et qu'on a prouvé Q sous l'hypothèse $P[a]$, alors on a prouvé Q.

Par exemple, dans la démonstration de « tout entier pair a un carré pair », on considère un entier n pair, c'est-à-dire pour lequel *il existe un entier* k *tel que* $n = 2k$, on montre ensuite que de $n = 2k$ on peut déduire n^2 *est pair*, et alors, de n *est pair*, on peut déduire n^2 *est pair*. Notons que, dans la manière de rédiger les démonstrations, on ne sépare pas les deux parties que sont affirmer $\exists x\, P[x]$ d'une part et montrer que de $P[a]$ on peut déduire Q d'autre part. En fait, quand on affirme *il existe un entier* k *tel que* $n = 2k$, on continue généralement la démonstration en faisant comme si effectivement l'hypothèse $n = 2k$ était vérifiée, c'est-à-dire qu'en plus d'avoir affirmé *il existe un entier* k *tel que* $n = 2k$, on a nommé k un élément vérifiant $n = 2k$, et dans la suite on travaille sous cette hypothèse. La plupart du temps, cela ne pose pas de problème, mais il faut que la variable utilisée ne soit pas déjà introduite dans la démonstration, ce qui est parfois le cas quand on utilise deux fois successives une même proposition existentielle (voir le paragraphe sur l'utilisation des propositions existentielles dans la section 3.6.3 page 149).

4.5 Divers types de raisonnement

4.5.1 Le raisonnement par contre-exemple

Le raisonnement par contre-exemple est utilisé pour montrer qu'une proposition universelle est fausse. Il a acquis dans la culture mathématique scolaire une place particulière : on parle volontiers de la « technique du contre-exemple », et moins souvent de la « technique de l'exemple » pour montrer qu'une proposition existentielle est vraie.

Pourtant, ces deux technique ne sont en fait qu'une seule : un contre-exemple est un élément a d'un ensemble E qui permet d'infirmer une proposition de la forme « pour tout $x \in E$, $P[x]$ » parce $P[a]$ est faux. C'est donc en fait un élément pour lequel $\neg P[a]$ est vraie, ce qui prouve que la proposition « il existe $x \in E$ tel que $\neg P[x]$ » est vraie. a est en fait un exemple pour la négation de la proposition à infirmer. Les deux techniques sont unies par le jeu de la négation. Nous verrons que dans les manuels actuels, ce lien n'est pas fait. Ce serait pourtant une bonne occasion de montrer l'aspect généralisateur de la logique.

4.5.2 Raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée

Le « raisonnement par l'absurde » consiste à adopter la démarche suivante : pour prouver P, on suppose $\neg P$, et on arrive à une contradiction. On a alors prouvé que $\neg P$ est impossible, ce qui prouve P.

Le « raisonnement par contraposée » diffère déjà du raisonnement par l'absurde par le fait qu'il ne peut s'appliquer que quand la proposition à montrer est une implication $P \Rightarrow Q$. On va en fait montrer la proposition équivalente $\neg Q \Rightarrow \neg P$. On fait alors l'hypothèse $\neg Q$, et on montre $\neg P$.

Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$ par l'absurde, il faut faire l'hypothèse $\neg(P \Rightarrow Q)$ [11], c'est-à-dire $P \wedge \neg Q$, et arriver à une contradiction. Cette contradiction est parfois que l'on montre $\neg P$, qui est en contradiction avec l'hypothèse P. Mais parfois, seule l'hypothèse $\neg Q$ a été utilisée pour arriver à la conclusion $\neg P$. Dans ce cas, ce raisonnement par l'absurde peut se ramener plus simplement à un raisonnement par contraposée.

On appelle aussi parfois raisonnement par contraposée ce qui est en fait une application du *modus tollens* : si A alors B, or NON B donc NON A.

4.5.3 Raisonnement par disjonction des cas

Pour montrer $P \Rightarrow Q$ en utilisant un raisonnement par disjonction des cas, nous commençons par trouver des propositions P_1, P_2,..., P_n telles que P soit équivalente à la disjonction $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ [12]. Nous montrons alors chaque implication $P_i \Rightarrow Q$, c'est-à-dire que nous montrons ($P_1 \Rightarrow Q$ ET $P_2 \Rightarrow Q$ ET ... ET $P_n \Rightarrow Q$). Nous pouvons alors conclure $P \Rightarrow Q$. Le raisonnement par disjonction des cas correspond à la règle d'élimination de $\vee$ présentée page 160, mais nous voyons mieux cette double intervention d'une disjonction et d'une conjonction en l'associant à la tautologie suivante :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (P' \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow ((P \vee P') \Rightarrow Q)$$

11. En fait, on commence souvent par se placer sous l'hypothèse P puisque l'on doit démontrer une implication, puis on suppose $\neg Q$.

12. Il n'est pas nécessaire que les différents cas soient « disjoints » (pour prouver une propriété des nombres réels, on peut regarder le cas des réels positifs, et le cas des réels négatifs, peu importe que 0 soit examiné deux fois)

4.5.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence se distingue des autres types de raisonnement présentés jusqu'alors dans la mesure où il ne s'applique qu'à des propositions relatives aux entiers naturels. On trouve généralement le principe du raisonnement par récurrence énoncé comme suit : Soit $P[n]$ une propriété portant sur des entiers.

Si :

1. *Initialisation* : la propriété P est vraie pour un certain entier n_0
2. *Hérédité* : la propriété P est héréditaire à partir du rang n_0, c'est-à-dire que pour tout $k \geqslant n_0$, $(P[k] \Rightarrow P[k+1])$

Alors la propriété P est vraie pour tout entier supérieur ou égal à n_0, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant n_0$, $P[n]$

Autrement dit, la proposition suivante est vraie quelle que soit la proposition P et l'entier n_0 :

$$\Big(P[n_0] \text{ ET pour tout } k \geqslant n_0, (P[k] \Rightarrow P[k+1])\Big) \Rightarrow \text{pour tout } n \geqslant n_0, P[n]$$

On trouve parfois l'hérédité introduite par « on suppose que la propriété $P[n]$ est vraie pour un entier n quelconque ». Cette formulation est tout à fait ambiguë et peut être interprétée comme « pour tout n, $P[n]$ ». On ne voit alors plus très bien ce qu'il y a à montrer ! Il est ainsi essentiel pour maîtriser le raisonnement par récurrence de distinguer l'étape d'hérédité dans laquelle on montre « pour tout $k \geqslant n_0$, $(P[k] \Rightarrow P[k+1]$ »), de la conclusion finale « pour tout $n \geqslant n_0$, $P[n]$ ». Ne pas utiliser la même variable, comme c'est fait ici, peut aider à faire cette distinction.

On trouve parfois dans des copies d'élèves l'étape d'hérédité introduite par l'hypothèse « supposons que pour tout n $P[n]$, montrons $P[n+1]$ ». La première remarque sur cette formulation est d'ordre syntaxique : dans la proposition « pour tout n $P[n]$ », la variable n est muette, l'hypothèse faite ne porte pas sur un objet qui s'appelle n. Or, dans la proposition $P[n+1]$, la variable n est parlante, mais on ne sait pas qui est n, aucune hypothèse n'a été faite sur cet élément. Cependant, il n'est pas nécessaire de savoir qui est n pour pouvoir conclure à la vérité de $P[n+1]$ à partir de l'hypothèse « pour tout n $P[n]$ »... Le problème syntaxique se retrouve dans une formulation telle que « supposons qu'il existe n tel que $P[n]$, montrons $P[n+1]$ ».

4.6 Synthèse de l'étude des raisonnements

La façon dont les mathématiciens rédigent leurs démonstrations est relativement éloignée de la modélisation qu'en propose la logique mathématique, que ce soit par des systèmes axiomatiques où les démonstrations formelles sont des suites de propositions, ou par la déduction naturelle où les démonstrations formelles ont une structure arborescente. Une difficulté pour les élèves et les étudiants est alors de distinguer dans un texte de démonstration les propositions mathématiques qui concernent les objets mathématiques, et les parties du texte qui permettent de suivre le cheminement du raisonnement, par exemple les introductions de variables, ou la justification d'une inférence permettant de déduire une nouvelle proposition à partir des propositions posées en hypothèses ou déjà démontrées. La confusion entre implication et déduction relève de ce type de difficulté. « si A alors B » est une proposition mathématique, et l'affirmation de sa vérité ne dit rien de la vérité des propositions A et B. Au contraire, « A donc B » n'est pas une proposition mathématique, et cette phrase ne s'utilise que dans un contexte où les propositions A et B sont vraies (la vérité de A fait partie des hypothèses ou a été préalablement démontrée, la vérité de B se déduit de celle de A).

La référence à la logique mathématique permet d'éclairer certains points complexes liés aux différents types de raisonnement : différence entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée, lien entre exemple et contre-exemple, intervention d'un « et » et d'un « ou » dans le raisonnement par disjonction des cas, gestion de la quantification universelle dans l'étape d'hérédité dans un raisonnement par récurrence.

Conclusion sur la référence pour l'enseignement de notions de logique

L'objet de cette deuxième partie de la thèse était de constituer une référence pour la réflexion sur l'enseignement de notions de logique. J'ai adopté pour la constitution de cette référence une approche à partir de trois points de vue (celui de la logique mathématique, celui des pratiques langagières, celui de la didactique des mathématiques), qui la rend opérationnelle pour la suite de mon étude didactique.

J'ai montré qu'il était pertinent de s'appuyer sur la logique mathématique pour cette référence, tout en l'associant à l'analyse du discours mathématique (comme a pu le proposer D. Lacombe), et à l'analyse didactique (comme le font déjà plusieurs chercheurs déjà cités). La logique mathématique est à la fois :

- une théorie de référence qui propose des définitions des notions de logique et en donne des propriétés. En proposant une approche des notions à partir de la logique mathématique, la référence constituée permet de vérifier que ce qui en est dit est en adéquation avec elle, que ces notions soient définies ou non dans la classe de mathématiques. Par ailleurs, la logique mathématique permet de bien distinguer les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique. L'aspect syntaxique permet un travail plus formel d'analyse et de manipulation des propositions, l'aspect sémantique permet l'interprétation des propositions dans un domaine mathématique, et l'établissement de vérités sur les éléments de ce domaine. Là encore, la logique mathématique souligne un aspect important des notions de logique.
- Un modèle pour l'analyse du discours mathématique et l'interprétation des pratiques langagières. J'ai souligné dans la référence constituée certains implicites dans des expressions couramment utilisées en mathématique, notamment dans l'expression de la quantification. La distinction quantification/quantificateur permet de bien rendre compte de ces implicites : à une proposition dans laquelle la quantification est implicite, ou marquée par des termes de la langue courante indiquant la quantité, correspond une proposition dans laquelle la quantification est exprimée par des quantificateurs. J'ai également souligné certaines ambiguïtés de mots de la langue courante fréquemment

utilisés en mathématiques : par exemple, tous les « et » ne correspondent pas à un connecteur ET, tous les « si » ne correspondent pas à une implication. La référence constituée a ainsi permis de mettre au jour un certains nombres de points sensibles reliés à l'expression des notions de logique dans le discours mathématique, et à l'utilisation de la langue courante.

– Une référence pour l'étude didactique et l'interprétation des difficultés des élèves. J'ai par exemple souligné dans la référence constituée les malentendus dus à la pratique de quantification universelle implicite des implications, la confusion entre négation et contraire, les erreurs dues à l'intervention du principe du maximum d'information.

Les études épistémologique et didactique de la première partie de la thèse ont montré la complexité des notions de logique, tant du point de vue de ce qu'elles sont en tant qu'objet, que du point de vue de leur utilisation comme outil dans l'activité mathématique. Nous pouvions alors faire l'hypothèse de difficultés concernant l'enseignement de ces notions. La référence constituée permet de regarder plus précisément certains points sensibles.

Dans la partie suivante, je reprends le fil conducteur proposé par la Théorie Anthropologique du Didactique pour l'étude de la transposition. La référence constituée, à défaut d'être un *savoir de référence* partagé par la communauté, est une référence pour l'étude du *savoir à enseigner* que je vais maintenant proposer, à travers l'analyse des programmes et des manuels. En plus des questions classiques sur ce savoir à enseigner (quels sont les choix faits par les rédacteurs des programmes, des manuels ? où vivent les notions de logique et pour quoi ?), je serai attentive à la façon dont sont pris en compte les points sensibles mis au jour (par exemple différence entre *et-propositionnel* et *et-couple*, complexité de la notion d'implication et confusion entre *si A alors B* et *A donc B*...).

Troisième partie

Étude du savoir à enseigner

J'ai proposé dans la partie précédente une étude des notions de logique (proposition, variable, connecteur, quantificateur, types de raisonnement), basée sur la façon dont la logique mathématique les définit, la façon dont elles sont exprimées dans le discours mathématique, sur de possibles difficultés d'élèves ou d'étudiants à leur propos. Un tel corpus m'était nécessaire pour avoir une référence pour l'étude didactique.

Je vais poursuivre cette étude didactique en me situant dans une institution précise, le lycée en France. Deux raisons m'ont poussée à ce choix : tout d'abord, il y a moins d'études didactiques concernant la logique à ce niveau. Et surtout, il y a une nouveauté dans les programmes de mathématiques actuellement en vigueur pour le lycée : des objectifs concernant des notions de logique sont explicitement mentionnés. Le contexte institutionnel actuel est donc particulièrement intéressant, et présente un caractère inédit puisque depuis l'époque des mathématiques modernes, sur laquelle nous reviendrons, aucun programme d'enseignement, ni pour le lycée, ni pour le supérieur, ne proposait de tels objectifs. Il y a ainsi un *savoir à enseigner* concernant les notions de logique, que je vais maintenant étudier à travers ces programmes, les textes qui les accompagnent, et les manuels. Cette étude permet de répondre à ma deuxième question de recherche : « Quel est l'ensemble de conditions et de contraintes qui pèsent sur la transposition didactique des notions de logique au lycée ? »

Y. Chevallard appelle *travail externe de la transposition didactique* la « sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme "savoir à enseigner", seront alors soumis au travail de transposition » (Chevallard, 1991, p. 30). Il s'agit d'un travail externe car il se fait en dehors des institutions où est mis en œuvre l'enseignement. Des textes sont ainsi produits (programmes, documents d'accompagnement) qui constituent la délimitation « officielle » du savoir à enseigner. Des points sensibles concernant l'enseignement de la logique ayant été repérés dans les premières parties de cette thèse, l'étude de ces textes nous renseigne sur les choix faits par rapport à des difficultés prévisibles, et sur la façon dont elles sont prises en compte. Cependant, comme le souligne G. Arsac, le savoir à enseigner ne se réduit pas aux textes officiels (d'ailleurs les professeurs se contentent rarement de cette seule lecture pour préparer leurs cours) :

> [le savoir à enseigner] ne se réduit pas au programme, nous avons remarqué en effet qu'un texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme. (Arsac, 1989, pp. 12-13)

Parmi les ressources publiées à côté des textes officiels, les manuels ont une place importante. Ils sont un élément charnière de la transposition. Tout d'abord, ils donnent à voir des choix d'organisation d'enseignement de notions de logique, c'est-à-dire une interprétation possible des programmes à l'intérieur d'un système de contraintes qui leur est propre. Mais, par leur manière de présenter les notions et par le choix et l'organisation des tâches qu'ils proposent, ils sont aussi une ressource pour les choix didactiques des professeurs.

Au moment où j'ai commencé ma recherche, seuls le programme et les manuels pour la classe de Seconde étaient publiés. Je me suis donc concentrée sur cette classe, sans mener d'étude aussi approfondie pour les autres. Il faut cependant savoir qu'en ce qui concerne les programmes, les objectifs sont presque identiques pour les classes de Seconde, Première et Terminale (on a seulement ajouté le raisonnement par équivalence en Première scientifique et le raisonnement par récurrence en Terminale Scientifique), et un seul document d'accompagnement a été publié, pour la classe de Seconde. Dans plusieurs manuels, les activités consacrées à la logique sont très ressemblantes dans les trois classes : un même type d'exercice, adapté au chapitre en cours [13]. L'élargissement de l'étude aux classes de Première et Terminale n'aurait donc pas apporté grand chose de plus, et nous pouvons faire l'hypothèse que les résultats obtenus pour les manuels de Seconde seraient valables pour les autres classes. J'ai ainsi centré l'étude sur cette classe de Seconde, qui présente l'intérêt de ne pas poser la question de l'enseignement de la logique dans le seul cas d'une filière scientifique. En effet, en France, la Seconde est une classe sans spécialisation, et le programme de mathématiques y a pour fonction, entre autres, d'assurer et de consolider les bases mathématiques nécessaires aux poursuites d'étude au lycée.

Je présente dans cette partie deux analyses classiques en didactique des mathématiques : une analyse des programmes et une analyse des manuels (pour la classe de Seconde). Le processus de transposition didactique se construit sur un temps long, ce qui justifie le point de vue historique adopté dans cette étude. L'étude du savoir à enseigner se situe donc dans une perspective évolutive : les choix actuels sont situés par rapport à ceux des périodes antérieures.

Les résultats des deux premières parties me conduisent à m'intéresser particulièrement aux points suivants dans l'analyse du savoir à enseigner :
- quelles notions de logique sont présentes dans les programmes et les manuels ?
- Comment la logique est-elle reliée à un apprentissage du raisonnement et du langage mathématiques ?
- Quel est le niveau de formalisation des notions de logique ? Notamment, est-ce que les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique sont tous les deux présents ?
- Quelles traces retrouve-t-on des points sensibles soulevés dans l'étude de chaque notion de logique ?

Ces questions se situent à deux niveaux, qui étaient déjà présents dans les premières parties : un premier niveau global, qui concerne l'enseignement de la logique des mathématiques en général, un deuxième niveau plus local, qui concerne chaque notion.

13. Il peut y avoir des variations dans certains manuels, mais elles restent marginales.

Chapitre 5

Étude de la place de la logique dans les programmes de mathématiques pour la classe de Seconde depuis 1960

Sommaire

L'étude de l'évolution des programmes et textes d'accompagnement de ces programmes présente un double intérêt pour l'étude didactique :

– d'une part, par rapport aux notions mathématiques étudiées, regarder comment leur enseignement a évolué à travers différentes époques permet de voir différentes approches possibles de ces notions dans l'enseignement.
– D'autre part, par rapport aux pratiques des enseignants, le programme qui a cours est évidemment un document de référence, mais l'expérience des programmes antérieurs qu'ils ont eu à enseigner est également influente.

Le but de l'étude est de rechercher dans ces documents les traces de la réponse de l'institution aux questions « pourquoi et comment enseigner la logique en classe de mathématiques ? » C'est-à-dire d'étudier *l'écologie* de la logique dans la classe de mathématiques, écologie au sens de l'étude des relations entre un objet et son environnement. Les outils de l'approche écologique, au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique, permettent une analyse du *texte du savoir* qui éclaire les enjeux des choix pour le *savoir à enseigner.* Ces enjeux participent d'un « système de conditions et de contraintes » auquel est soumis l'enseignant. Pour analyser les programmes, je suivrai la démarche proposée par Michèle Artaud dans son cours à la IX^e École d'Été de didactiques des mathématiques :

> un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour [de lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où on [le] trouve et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. Nous pourrons alors envisager la transposition de ces complexes d'objets dans l'enseignement secondaire. (Artaud, 1997, p. 111)

Avant les années 60, aucune notion de logique n'est vraiment présente dans l'enseignement des mathématiques au lycée, même si l'apprentissage du raisonnement est bien sûr depuis longtemps un objectif de cet enseignement. C'est dans cet esprit que les *Instructions complémentaires relatives à l'enseignement des mathématiques* de 1957 mentionnent la logique :

> Sans doute, nul ne contestera qu'il [l'enseignement des mathématiques] apporte aussi, par sa nature même, une contribution essentielle à la formation et au développement de l'esprit dans l'ordre de la logique, de la rigueur et de la précision.

Puis, plus loin :

> Les principales difficultés auxquelles se heurtent les débutants sont d'abord des difficultés techniques pour prendre pied dans le monde conventionnel des symboles, des représentations figurées et schématiques ; un peu plus tard, apparaissent les difficultés logiques pour prendre possession des idées d'ordre, d'enchaînement, de déduction.

Mais si des pistes sont suggérées pour le premier type de difficulté, ce qui concerne les difficultés logiques n'est pas évoqué à nouveau.

Gardons également à l'esprit les premières phrases de ces instructions qui signalent déjà une donnée du contexte social qui jouera un rôle important pour porter la réforme des mathématiques modernes, à savoir une demande de la société d'un nombre plus important de scientifiques :

> Des voix autorisées ne cessent, depuis quelques années, de signaler le grave danger que fait courir à notre pays, sur le plan intellectuel comme sur le plan économique, le manque de plus en plus sensible d'ingénieurs, de chercheurs, de techniciens, et de souligner l'urgente nécessité d'orienter vers des carrières scientifiques, à des niveaux variés, un nombre croissant de jeunes. Le même souci se manifeste, à des niveaux variés, à peu près partout dans le monde.

Je commencerai l'analyse des programmes et textes d'accompagnement avec les textes de 1960. Les *Instructions du 19 juillet 1960. Programmes de mathématiques des classes de Seconde A', C, M, M* donnent des « indications d'ordre général pour attirer l'attention sur des points particulièrement importants » et le premier paragraphe concerne *L'initiation au raisonnement logique.* L'extrait suivant se situe à la fin de ce paragraphe :

> C'est donc à l'enseignant du second cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait ; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles.

Avant d'entrer plus en avant dans l'analyse, comparons tout de suite cet extrait avec un extrait du *Programme de mathématiques. Classe de Seconde* de 2009 :

> Le développement de l'argumentation et **l'entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la Seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme.

Bien sûr, nous retrouvons dans ces extraits deux conceptions différentes de l'enseignement : le professeur de 1960 a la charge d'une « initiation », tel un maître spirituel, là où celui de 2009 a la charge d'organiser un « entraînement », tel un entraîneur sportif. Nous retrouvons une conception plus magistrale de l'enseignement en 1960, et une conception dans laquelle l'élève est voulu acteur de ses apprentissages en 2009.

Au delà de ces différences de ton, je voudrais souligner la proximité des contenus de ces deux extraits. La logique a sa place dans l'enseignement des mathématiques au lycée, pas enseignée pour elle même dans un exposé à part, mais intégrée à l'activité mathématique dans son ensemble. Dans la suite je présenterai une analyse plus fine des ces programmes : les similarités et les différences seront ainsi mieux caractérisées.

L'objet de ce chapitre est de comprendre ce qui s'est passé entre ces deux époques concernant l'enseignement de notions de logique au lycée. Je divise cet aperçu historique en 4 périodes :

– de 1960 à 1969 : en 1960, la logique fait une entrée dans les programmes. Et dans les années qui suivent, des expériences sont faites sur le terrain, certaines pratiques d'enseignement sont débattues, notamment en ce qui concerne l'emploi des symboles logiques.
– de 1969 à 1981 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1969 est celui des mathématiques modernes. C'est une période dans laquelle la logique est objet explicite d'enseignement. Mais cette réforme donne rapidement lieu à de vives critiques.
– de 1981 à 1999 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1981 est celui de la contre-réforme. La logique en est exclue, accusée de participer au formalisme excessif reproché aux mathématiques modernes. Cette exclusion se poursuit dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1990.
– depuis 1999 : la logique fait un timide retour dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1999, puis dans le programme pour la classe de Première de la section littéraire en 2004, puis finalement un retour plus explicite dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009, où figure un tableau d'objectifs concernant « notations et raisonnement mathématiques » (voir page 200).

Pour connaître le contexte dans lequel est écrit chacun de ces programmes, je m'appuie notamment sur différents textes publiés par l'A.P.M.E.P.[1] Je fais l'hypothèse qu'ils reflètent les interrogations de la communauté de l'enseignement des mathématiques. Des positions diverses s'y expriment, pas seulement celles prises officiellement par l'association. Je fais ainsi des aller-retour entre analyses des programmes à l'aide des outils de l'analyse écologique qui permettent de préciser la demande institutionnelle, et analyses des bulletins de l'APMEP, qui aident à en comprendre l'évolution, en montrant le point de vue des acteurs de la mise en œuvre de cette demande.

J'ai finalement utilisé la méthodologie d'analyse suivante :

(1) j'ai reperé dans les textes de programmes et d'accompagnement de ces programmes où était présente la logique (son *habitat*), et quelle était sa fonction (sa ou ses *niche(s)*) (les textes étudiés sont listés page 439).

1. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

(2) J'ai ensuite recherché dans les textes de l'A.P.M.E.P. des éléments du contexte de chaque période qui pouvaient caractériser le rôle attribué à la logique dans l'enseignement des mathématiques :
   – j'ai relevé tous les textes consacrés à la logique dans les *Bulletins de l'APMEP* (les articles cités sont listés page 441),
   – j'ai étudié certains textes dans lesquels l'A.P.M.E.P. affiche ses positions pédagogique et didactique, notamment la Charte de Chambéry de 1968 et la Charte de Caen de 1972.

(3) J'ai finalement étudié plus en détail ce qui était dit pour chaque notion de logique dans les documents qui accompagnent les programmes de 1969 et de 2009.

5.1 Analyse globale des programmes

5.1.1 1960-1969 : l'avant mathématiques modernes

Les textes officiels : importance affirmée de la maîtrise du raisonnement, entrée discrète de notions de logique associées au travail sur le langage

Le contexte mathématique Les mathématiques françaises sont en train de vivre des changements importants. Le groupe de mathématiciens N. Bourbaki publie en 1939 un premier fascicule de résultats sur la Théorie des Ensembles, édité chez Hermann, dans la collection *Actualités scientifiques et industrielles*, et en 1954 un fascicule comportant les deux premiers chapitres des *Éléments de mathématique* intitulés *Description de la mathématique formelle* et *Théorie des ensembles*. Les mathématiciens du groupe Bourbaki ne sont pas des spécialistes de logique mathématique, et leur but n'est pas d'exposer les résultats importants déjà obtenus dans cette nouvelle branche des mathématiques. Mais ils veulent construire leur exposé de la mathématique sur des bases logiques rigoureuses. Ils présentent alors quelques notions de logique mathématique, qui fondent le langage et les raisonnements utilisés dans leur présentation axiomatique de la mathématique. Les mathématiciens français de l'époque sont surtout influencés par la notion de structure, sur laquelle Bourbaki fonde son traité. Mais ils sont moins concernés par ce qui y est dit de la logique. Malgré tout, le symbolisme logique utilisé par Bourbaki va rapidement s'imposer dans la communauté mathématique et plus tard dans l'enseignement (symboles d'implication, d'équivalence, des quantificateurs universel et existentiel). En France, ce que l'on appelle *les mathématiques modernes* sont directement d'inspiration bourbakiste. Elles sont basées sur l'étude des structures, leur langage et leurs raisonnements sont fondés sur la logique mathématique et la théorie des ensembles, et elles sont exposées selon la démarche axiomatique. L'introduction de notions de logique mathématique dans l'enseignement va être fortement liée à ces mathématiques modernes.

Par ailleurs, en sciences humaines, le structuralisme continue de se développer. Il trouve son origine dans le *Cours de linguistique générale* de F. Saussure (1916), où celui-ci envisage d'étudier la langue comme un système dans lequel chacun des éléments n'est définissable que par les relations d'équivalence ou d'opposition qu'il entretient avec les autres. Il s'étend ensuite à d'autres sciences humaines (un des représentants les plus célèbres de ce courant est l'anthropologue Claude Lévi-Strauss), et le langage mathématique des structures est volontiers utilisé au sein de ce courant.

Dans l'enseignement, une modification profonde des contenus est en germe dès les années 50, et commence à l'université. Un moment important de ce renouveau est l'année 1954, quand G. Choquet remplace G. Valiron pour le cours de calcul différentiel et intégral à l'université de Paris. Dans un article pour la *Gazette* de la S.M.F. [2] (M. Rogalski, 2007), Marc Rogalski parle de « l'aspect révolutionnaire » de ce cours, qui ouvre la porte à une réforme de la licence de mathématique en 1958. Bien qu'émettant des réserves sur l'entreprise bourbakiste, G. Choquet est un fervent partisan de l'axiomatique, notamment au sein de l'A.P.M.E.P., comme le soulignent E. Barbazo et P. Pombourcq dans *100 ans d'APMEP* :

> Le débat sur l'axiomatique, qui soulève la question pédagogique de l'introduction des mathématiques dès le plus jeune âge, prend forme dans certains contenus de manuels scolaires écrits pour les nouveaux programmes [de 1960]. [...] L'engouement pour l'axiomatique et ses vertus pédagogiques, dégagé par les travaux de la commission *Axiomatique et redécouverte*, est avéré au sein de l'A.P.M.E.P. et surtout de ses dirigeants. Vu le nombre de ses conférences publiées dans le Bulletin, Gustave Choquet est, sans conteste, celui qui va être l'un des plus influents au sein de l'association pour que cette conception d'apprentissage des mathématiques convainque la population enseignante. (Barbazo & Pombourcq, 2010, p. 71)

Le renouveau de l'enseignement des mathématiques va peu à peu gagner l'enseignement secondaire. Voyons maintenant la trace de cette évolution dans les textes officiels.

Les programmes et instructions complémentaires En 1960, le programme de mathématiques qui est appliqué est celui de 1959. Aucune notion de logique n'y est évoquée. Mais des instructions publiées en juillet 1960 veulent « attirer l'attention sur des points particulièrement importants » dont certains sont reliés à la logique [3].

Le premier paragraphe de ces instructions est intitulé *L'initiation au raisonnement logique*. Il y est rappelé l'importance de l'enseignement des mathématiques pour l'apprentissage du raisonnement, qu'il s'agisse de le comprendre ou de le produire. L'extrait déjà cité page

2. Société Mathématique de France
3. On trouvera en annexe l'intégralité des paragraphes en relation avec la logique, voir page 515.

180 assigne au professeur la tâche d'une « initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression ». Raisonnement et langage sont ainsi également associés à la logique, à travers des notions qui « ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait ; [mais] doivent être dégagées et précisées peu à peu ». Il y a donc des notions de logique à transmettre, mais qui ne doivent pas être l'objet d'un enseignement spécifique. Par ailleurs, ces notions doivent « être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles ». Ainsi, les notions de logique ne sont pas particulièrement en relation avec certaines autres notions mathématiques, mais sont présentes partout.

Un autre paragraphe de ces instructions est relié à la logique, intitulé *Les notions « modernes ». Le vocabulaire et le symbolisme*. Il y est question des notions et notations ensemblistes (réunion, intersection, ensembles complémentaires, appartenance, inclusion). Il y a une certaine audace vis-à-vis du renouvellement du vocabulaire mathématique, les instructions proposent « ne serait-ce qu'à titre d'essai, et pour les mettre à l'épreuve, d'en employer certains dans les classes secondaires », mais elles invitent à la prudence dans cette démarche :

> Il paraît prudent de ne proposer aux débutants (en dehors des signes élémentaires qu'ils connaissent déjà et qu'ils ont appris à manier) qu'un nombre raisonnable de symboles nouveaux, liés à la présentation de certaines notions susceptibles d'être correctement assimilées ; on peut citer, par exemple, et sans vouloir établir ainsi une liste limitative : quelques signes relatifs aux ensembles (réunion, intersection, inclusion, appartenance) ; ainsi que les « flèches » marquant une déduction ou une équivalence logique [4].

Mais verbalisme et formalisme sont présentés comme un double danger, et les instructions mettent en garde contre les mots et les signes qui « ont pour le néophyte, l'attrait de la nouveauté ou du pittoresque », mais qui « risquent souvent de masquer la pensée. » Ici, les mots et les symboles sont vus comme étant un moyen d'expression de la pensée. Le fait que leur utilisation puisse, en retour, façonner la pensée, n'est pas évoqué.

Nous verrons plus loin avec les bulletins APMEP que cette ouverture concernant un nouveau vocabulaire et de nouveaux symboles suscite des débats. Une note du 29 janvier 1963 intitulée *Emploi de certains termes et de certains symboles dans l'exposé d'une question de mathématiques* a pour objet de « répondre à quelques préoccupations qui se sont manifestées récemment à propos de la présentation d'un texte de mathématiques, notamment en ce qui concerne l'emploi de certains termes ou de certains symboles ». Les définitions et les symboles relatifs aux notions élémentaires sur les ensembles, à l'implication et à l'équivalence logique, ainsi que les symboles des quantificateurs, sont explicitement mentionnés dans le programme de 1962 pour la classe Terminale de Mathématiques Élémentaires.

4. Nous pouvons voir ici la confusion décrite page 163 entre le connecteur IMPLIQUE marqué par une flèche et la déduction.

Cette note rappelle qu'il n'y a pas d'exigence en dehors de cette classe, ce qui a pour conséquence que lors d'examens ou de concours, aucune question ne peut les faire intervenir, mais elle précise également que puisque certains élèves ont pris l'habitude, parfois dès le premier cycle, de les utiliser, il faut que leur emploi correct soit accepté.

Un décret de juin 1965 vient modifier les filières de la classe de Seconde, qui sont maintenant réparties en une section littéraire A, une section scientifique C, une section technique industrielle T. Une circulaire d'août 1965 fixe les programmes de mathématiques pour ces sections. Il n'y est pas fait mention explicitement de notions de logique, mais le programme pour la section C contient une *Note préliminaire* qui indique que :

> Le professeur s'attachera, tant en algèbre qu'en géométrie, à l'aide des nombreux exemples que fournissent les divers chapitres, à préciser quelques notions déjà rencontrées dans les classes précédentes : proposition réciproque, condition nécessaire, condition suffisante, propriété caractéristique. L'étude systématique de problèmes spéculatifs [...] permettra de dégager un certain nombre d'idées générales concernant la conduite logique d'un raisonnement : analyse, synthèse, emploi de conditions à la fois nécessaires et suffisantes, transformation d'un problème en un problème équivalent.

Ces indications sont dans la continuité des instructions de 1960, elles rappellent qu'en classe de Seconde, le raisonnement devient un objet d'étude et n'est plus seulement mis en œuvre.

Nous allons voir maintenant à travers l'étude de textes de l'A.P.M.E.P. que celle-ci se positionne plus explicitement en faveur d'un renouveau de l'enseignement des mathématiques, et que, sur le terrain, des expériences vont dans ce sens.

Les textes de l'A.P.M.E.P. : la préparation des mathématiques modernes sur le terrain

Dès 1946, des textes en faveur d'une réforme profonde de l'enseignement des mathématiques paraissent dans les Bulletins de l'APMEP. Il ne s'agit pas seulement de propositions pour déplacer telle notion d'une classe à une autre mais d'une modification globale des contenus.

Les débats sur la méthode axiomatique commencent dès cette époque, avec des opposants tels que M. Weber (textes dans les Bulletin n° 112 de 1946 et n° 165 de 1954) et des défenseurs tels que G. Thovert (texte dans le Bulletin n° 128 de 1949)

La charte de Chambéry (A.P.M.E.P., 1968) est une synthèse des textes de la *Commission Recherche et Réforme* créée par l'association en 1966. Elle s'intitule *Étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques.* L'A.P.M.E.P. prend clairement position pour la nécessité d'une réforme de l'enseignement des mathématiques :

> Que l'enseignement des mathématiques soit analysé dans son contenu, dans sa forme pédagogique, ou dans son rôle social ou économique, il est certainement très remarquable que les conclusions soient convergentes ; ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques, fruit de l'évolution des idées, s'adapte « comme un gant » nous permettrons-nous de dire, à la formation de la jeunesse de notre temps. Il est important que tous les citoyens et en premier lieu tous les éducateurs en comprennent bien les raisons et dans quelle voie favorable cela conduit l'enseignement. (A.P.M.E.P., 1968, p. 5)

Cette réforme des contenus doit s'accompagner d'une réforme pédagogique mettant en œuvre une pédagogie active, et dans cette même charte, les auteurs « tiennent à souligner que l'introduction d'un nouveau contenu dans l'enseignement des mathématiques serait inopérante, voire néfaste, si elle ne s'accompagne d'une pédagogie appropriée : active, ouverte, le moins dogmatique possible, faisant appel au travail par groupe et à l'imagination des enfants. » (A.P.M.E.P., 1968, p. 7)

À partir de 1956, l'A.P.M.E.P. organise avec la S.M.F. une série de conférence sur les mathématiques modernes. La logique mathématique n'y est pas particulièrement abordée. Par contre, un article de logique mathématique écrit par J. Balibar, intitulé *Un exemple d'abstraction, de formalisme et de métathéorie. La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu avec les axiomes de la théorie des ensembles*, est publié dans les Bulletins n° 217 en 1961 et n° 222 en1962. On trouve aussi des articles théoriques de logique mathématique de M. Glaymann, *Fonctions caractéristiques des connecteurs* dans le Bulletin n° 258 en 1967, et *Introduction à la logique* dans le Bulletin n° 260 en 1968. Ces deux articles sont écrits dans l'optique de la formation des professeurs à la réforme qui se prépare. L. Schwartz publie quant à lui *Le modèle d'une théorie des ensembles* dans le Bulletin n° 261 en 1968. La présence de ces articles théoriques montre la volonté de former les professeurs en matière de logique, la référence explicite pour l'enseignement de notions de logique étant la logique mathématique.

D'autres articles dans les Bulletins concernent le vocabulaire et les notations. L'utilisation des symboles ensemblistes et logiques se répand dans l'enseignement secondaire. Dans le Bulletin n° 198 en 1959, on trouve un paragraphe intitulé *Quelques termes et symboles de plus en plus employés* dans lequel figurent les symboles suivants, dans une rubrique *Logique* :

> $\Rightarrow$ " entraîne " ; déduction logique
>
> $\Leftrightarrow$ " équivaut à " ; équivalence logique

$\forall$ “ quel que soit ” ou “ pour tout ” ; quantificateur universel
$\exists$ “ il existe au moins un ... tel que ” ; quantificateur existentiel

Mais l'utilisation de ces symboles divise la communauté des professeurs. Ainsi, dans le Bulletin n° 217 d'octobre-novembre 1961, trois commentaires sont publiés dans une rubrique *A propos des quantificateurs* $\forall$ *et* $\exists$. Le premier, intitulé *L'opinion d'un professeur d'université*, signé J. Dixmier, se termine par :

> Conclusion, il faudrait, à mon sens, interdire purement et simplement l'emploi des quantificateurs dans les copies, en expliquant que ce qui est permis au tableau ne l'est pas toujours dans une rédaction. En fait, cette nuance me paraît trop subtile pour les élèves, et, pour ma part, je n'emploie plus jamais ces signes, même au tableau.

Dans le deuxième, intitulé *L'opinion d'un professeur de lycée*, J.-L. Audirac, défend l'idée que « serait légitime tout symbole possédant une algèbre » et précise que ça ne peut pas être le cas pour les symboles de quantificateurs en classe de Seconde, mais que « naturellement, rien n'empêche d'utiliser des abréviations en spécifiant leur signification, à condition d'agir avec prudence ».

Le troisième commentaire, *L'opinion du troisième homme*, signé G. Walusinski, défend une autre position :

> L'évolution de la langue mathématique vers une symbolique spéciale qui aurait, entre autres, l'avantage d'être universelle, n'est pas exclue. Dans l'état actuel des choses, l'usage alternatif des propositions exprimées en français puis en symboles, en symboles puis en français, renouvelle l'exercice classique du thème et de la version. En ce sens, les symboles $\exists$ et $\forall$ ont une valeur pédagogique, non pas « malgré » les fautes qu'ils font commettre, mais peut-être à cause de celles-ci. Ces fautes mettent en évidence la richesse de ces symboles, supérieure peut-être à celle que leur attribuaient les inventeurs (au fait : qui sont les inventeurs ?).

Suit un exemple où une quantification universelle implicite masque une erreur dans la négation d'une proposition. G. Walusinski conclut alors :

> *Implicitement*, là réside le noeud de la question. Les quantificateurs disent tout haut ce que tout le monde pense tout bas.
>
> Vivent donc les quantificateurs.

Nous pouvons voir que le débat est réel, les positions idéologiquement tranchées, non seulement à propos des symboles de quantificateurs, mais aussi sans doute sur ce que sont les mathématiques. Le débat sur les symboles se poursuit dans d'autres bulletins, avec notamment de longues lettres de D. Lacombe (Bulletins n° 239, n° 240 et n° 241 en 1964), dans une rubrique intitulée *Les mots et les symboles*. Nous comprenons mieux alors, en lisant ces positions divergentes sur le terrain, la mise au point ministérielle faite à travers la note de janvier 1963 évoquée page 184.

Les évolutions du vocabulaire conduisent à la création, en 1960, d'une *Commission du Dictionnaire*. Elle produira de très nombreuses notices publiées jusqu'en 1980 dans une rubrique du Bulletin intitulée *Matériaux pour un dictionnaire*. Les articles *Déduire* publié dans le Bulletin n° 217 en 1961 par J. Balibar et *Implication* publié dans le Bulletin n° 231 en 1963 par G. Walusinski s'appuient sur la logique mathématique.

La période entre 1960 et 1969 prépare la réforme des mathématiques modernes, notamment sur le terrain. L'A.P.M.E.P. est favorable à une réforme et publie des récits d'expériences d'enseignement des notions modernes. Ainsi, dans le n° 217 en 1961, C. Pair, enseignant de Mathématiques Spéciales, relate l'expérience faite au Lycée Henri Poincaré de Nancy d'un « Cercle de mathématiques modernes ». Il passe chaque semaine une heure avec 19 élèves de Seconde et 3 de Première qu'il essaie d'initier aux notions modernes, selon le schéma de travail suivant :

> (1) examen d'un ou plusieurs exemples ; (2) de ces exemples, on déduit la définition d'une notion générale (application d'un ensemble E dans un ensemble F, associativité d'une opération ...) ; (3) puis, sur de nouveaux et nombreux exemples, on regarde si cette définition s'applique ou non (l'opération milieu de deux points est-elle associative ?).

Ce schéma d'organisation du travail est représentatif du fait que les partisans d'un enseignement des notions modernes ne sont pas seulement pour un renouvellement des contenus mais aussi pour un renouvellement des méthodes d'apprentissage, même si selon C. Pair le schéma présenté ici a encore un inconvénient :

> Les élèves sont certes actifs, plus sans doute que dans l'enseignement classique, mais dans une étroite ligne tracée par le professeur : ils ne sont réellement découvreurs que d'exemples. Cela risque de donner une idée fausse de la mathématique, qui fait plus que codifier des notions.

C. Pair affiche son parti pris d'un renouvellement du langage à travers une formalisation bénéfique, et voit dans la logique un langage clair pour les raisonnements : « l'utilisation du symbolisme logique élimine au contraire impitoyablement toutes les insuffisances du raisonnement ».

Les avantages d'une telle formalisation sont également soulignés dans le texte de A. Z. Krygowska [5], *Éléments de logique dans l'enseignement secondaire des mathématiques*, paru dans le Bulletin n° 251 en 1966. L'auteur se démarque ainsi de la prudence affichée dans les instructions de 1960. Elle relate un enseignement explicite de notions de logique, et

5. Anna Zofia Krygowska (1904-1988) est une logicienne polonaise qui s'est beaucoup investie dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Elle a travaillé sur l'enseignement de la logique, mais au-delà, elle a considéré tous les aspects de l'enseignement des mathématiques où une « analyse » logique peut être éclairante, et notamment tout ce qui concerne le langage et la communication dans la classe de mathématiques.

explique quels sont les buts qui lui sont assignés :

> Une des conditions pédagogiques les plus importantes d'une modernisation rationnelle de l'enseignement des mathématiques nous semble donc consister : 1° dans la révélation expresse des idées logiques les plus simples sous-jacentes au contenu mathématique ; 2° dans la création d'un langage approprié - ces deux postulats étant dans des relations réciproques très serrées, *car si le langage reflète la pensée, il la structure aussi à son tour.*

Nous retrouvons dans ces postulats les deux piliers de la logique que sont le raisonnement et le langage. Comme nous l'avons vu dans l'étude épistémologique, la logique s'occupe de la validité des raisonnements, mais elle a besoin pour le faire d'un travail préalable sur le langage. Et finalement, on ne peut pas vraiment dissocier ce qui tient au langage de ce qui tient au raisonnement, puisque le raisonnement s'exprime dans un langage qui à son tour structure le raisonnement. La logique joue un rôle essentiel puisqu'elle fournit un langage de référence permettant une expression claire des idées, langage de référence signifiant non pas qu'il doive être forcément utilisé, mais qu'il est un outil d'analyse et de présentation de notre discours. La logique est effectivement présente dans ce but durant la période des mathématiques modernes.

5.1.2 1969-1981 : Les mathématiques modernes

Les textes officiels : la réforme des mathématiques modernes effectivement mise en place de l'école élémentaire à l'université

La commission Lichnérowicz En octobre 1966 est créée la *Commission ministérielle sur l'Enseignement des Mathématiques* présidée par A. Lichnérowicz, mathématicien et physicien théoricien, professeur au Collège de France. Cette création s'inscrit dans une triple logique de la part du ministère : promouvoir un enseignement des mathématiques modernes adapté à l'efficacité nouvelle des mathématiques à travers la notion de structure, assurer la démocratisation de l'enseignement moyen, mettre en place une rénovation pédagogique, ces deux derniers points ayant pour but de faire réussir *tous* les élèves. À sa création, la Commission compte dix-huit membres, essentiellement des mathématiciens : professeurs du supérieur, du secondaire, inspecteurs généraux. L'A.P.M.E.P. y est bien représentée.

La Commission rédige un rapport préliminaire publié dans le Bulletin n° 258 en 1967. Il y est réaffirmé la nécessité d'une réforme de l'enseignement des mathématiques :

> Il nous faut désormais préparer nos enfants et nos étudiants à comprendre et à *utiliser* ce que sont devenues les mathématiques de notre temps. Cela n'est pas nécessaire, seulement, pour les futurs mathématiciens, ce l'est aussi pour les futurs citoyens quels qu'ils soient, si nous voulons qu'ils se meuvent

> avec naturel et sans méfiance dans le monde d'aujourd'hui, qu'ils se servent des instruments nouveaux et puissants mis à leur disposition, qu'ils recourent aux schèmes de pensée qui peuvent conduire utilement leurs démarches.

C'est cette commission qui rédige les programmes pour la classe de Seconde de 1969 que je vais maintenant analyser.

Programme et instructions complémentaires de 1969 Dans le programme pour les classes de Seconde (il y a encore à l'époque trois sections A, C, T) apparaît un nouveau chapitre intitulé *Langage des ensembles* en chapitre I. Sa première partie est :

> 1. Emploi du vocabulaire de la logique : négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence ; réciproques de certaines assertions. Quantificateurs « quel que soit » et « il existe » ; négation d'assertions comportant éventuellement des quantificateurs.

Puis vient une partie sur les ensembles :

> 2. Ensembles : appartenance, inclusion, sous-ensemble, ensemble vide ; intersection, réunion, sous-ensembles complémentaires. Lien avec la logique. Produit cartésien de deux ensembles.

Dans ce programme, des notions de logique mathématique sont explicitement objets d'enseignement. On y utilise des termes « techniques » de la logique mathématique. Les notions listées sont les éléments du langage mathématique : connecteurs et quantificateurs. Ceci confirme ce qui est annoncé dans le titre du chapitre : le but est un apprentissage du langage mathématique.

Ce nouveau programme est accompagné en février 1970 d'un *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde*[6]. Ce nouveau chapitre est notamment l'objet d'un long commentaire dont « les lignes, rédigées en termes techniques, dépassent largement le développement qu'il est possible d'en faire dans les classes. » L'objet de ce commentaire est donc notamment la formation des professeurs, ces notions étant, pour certains d'entre eux, complètement nouvelles. Par ailleurs, il est précisé que « le chapitre I tout entier fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, *à tout moment*, dans la suite du cours. » Ainsi, même s'il est préconisé que les notions de logique soient étudiées dans un chapitre particulier, leur présence et leur utilité dans tout le cours de mathématiques sont réaffirmés, comme cela était déjà le cas en 1960. Toujours dans la continuité du discours de 1960, la classe de Seconde reste celle où les élèves adoptent une position réflexive par rapport à leurs raisonnements, ce qui est rappelé dans l'extrait suivant :

> Les élèves qui arrivent en Seconde ont déjà fait bien des raisonnements et appliqué ainsi des règles de logique, d'une manière peut-être plus spontanée

6. On trouvera en annexe page 517 l'intégralité de ce commentaire concernant les notions de logique.

> que réfléchie ; il convient de leur apprendre désormais, sur des exemples, à exprimer les raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique.

La différence avec le programme de 1960 est surtout que la logique est plus fortement associée au langage. Le commentaire souligne l'existence d'un langage mathématique particulier et l'intérêt pour les élèves de le connaître :

> La logique introduit, pour représenter les êtres sur lesquels elle raisonne, des symboles qu'elle soumet à un calcul formel ; l'emploi de ces symboles n'est pas indispensable en mathématiques et de très bons auteurs contemporains n'en font pas usage ; néanmoins, il a paru opportun d'initier à leur emploi, de façon juste et modérée, les élèves du second cycle : ils pourront ainsi s'exprimer de façon plus précise et éviter de commettre des incorrections, voire des contresens ; bien entendu, ils devront s'abstenir de parsemer de symboles, comme de sténogrammes, une rédaction à faire « en bon français ».

En 1973, un nouveau programme pour la classe de Seconde est publié. Cela avait été de toutes façons prévu par la Commission Lichnérowicz : il fallait tenir compte de l'arrivée en Seconde d'élèves ayant suivi le programme de mathématiques modernes dès la Sixième [7]. Malgré les contestations qui se sont déjà élevées, ce programme reste axé sur les mathématiques modernes, mais le chapitre *Langage des ensembles* a disparu, il n'y a plus qu'un court paragraphe d'introduction qui précise :

> À l'occasion des divers énoncés rencontrés, les élèves auront leur attention attirée sur le rôle joué en mathématiques par les principaux « connecteurs » (*et, ou, non, si... alors* et ses synonymes, *équivaut* et ses synonymes) et « quantificateurs » (*quel que soit, il existe*). Ils noteront leurs règles d'emploi, tant pour formuler les énoncés que pour conduire les raisonnements.

Cette disparition peut être interprétée de deux façons : la première est que ce chapitre a été jugé trop abstrait et formel. La deuxième est que les élèves arrivant en Seconde en 1973 sont déjà familiers des notions ensemblistes et logiques qu'ils sont censés avoir rencontrées au collège. Deux arguments plaident pour la deuxième interprétation : le premier est que d'autres notions abstraites et formelles restent au programme, comme les espaces vectoriels ; le deuxième est que les manuels continuent de proposer un chapitre 0 sur les notions ensemblistes et logiques.

Durant la décennie des mathématiques modernes, des notions de logique mathématique sont ainsi explicitement au programme, elles sont définies, il en est donné des propriétés. Il est cependant bien précisé qu'il ne s'agit pas d'enseigner ces notions pour elles-mêmes. Elles servent à l'apprentissage du langage mathématique et du raisonnement, et leur étude doit être réinvestie dans d'autres chapitres. Mais si le commentaire du programme de 1970

7. Il y a eu également des nouveaux programmes de mathématiques modernes pour le collège à partir de 1969.

donne des connaissances théoriques sur ces notions de logique, afin que les professeurs qui n'en sont pas familiers se les approprient, il ne donne guère d'indications sur les retours possibles sur ces notions dans d'autres chapitres. Il y a cependant un réinvestissement naturel à travers la compréhension d'énoncés de définitions, de théorèmes, qui utilisent pour la plupart un langage formalisé.

La réforme des mathématiques modernes : ambitieuse et rapidement contestée

La réforme se met en place en 1969, en Sixième et en Seconde. Elle s'appuie sur des expérimentations préalables et ne soulève pas de contestation de la part de l'A.P.M.E.P., pas plus d'ailleurs que le nouveau programme mis en place en Cinquième l'année suivante. Mais des désaccords apparaissent à propos du nouveau programme de Quatrième. Des équipes expérimentales, travaillant notamment dans les IREM [8] naissants, réunies à Orléans, publient le 03 juin 1970 une lettre dans laquelle ils expriment des réticences vis-à-vis du projet pour les programmes de Quatrième qui « possèdent de nombreuses lacunes, ils sont notamment trop longs dans les contenus et trop ambitieux dans l'utilisation de raisonnements déductifs exigés par la géométrie proposée » (Barbazo & Pombourcq, 2010, p. 87). Un nouveau texte affirmant la ligne de l'A.P.M.E.P., la Charte de Caen, est rédigée durant l'année scolaire 1971-1972. Contrairement à la Charte de Chambéry, celle de Caen ne revendique pas de modification des contenus, puisque celle-ci est en cours, mais l'A.P.M.E.P. y exprime des réticences sur la réforme des mathématiques modernes :

> Parmi les réformes, certaines étaient des succès, d'autres exigeaient des critiques, toutes pouvaient et devaient être améliorées. Des polémiques de presse, des remarques d'éminentes personnalités, tout aussi bien que le goût accru de la jeunesse pour une action et une réflexion plus vite autonome, mettaient en évidence des insuffisances ou des lacunes. Et il y avait des incompréhensions qu'il fallait s'attacher à réduire, des orientations à préciser. (A.P.M.E.P., 1972, p. 2)

L'accent est mis sur la finalité des mathématiques, qui doivent participer à la formation d'un individu épanoui et autonome, sur une organisation scolaire permettant expérimentations et recherche, et sur la formation des maîtres. L'A.P.M.E.P. revendique également dans cette charte que l'apprentissage des mathématiques et les réformes qui le concernent soient un objet d'expérimentation et de recherche « scientifique », l'organisation scolaire, la recherche, l'expérimentation « doivent s'inspirer du désir de promouvoir un nouveau style éducatif allant dans le sens d'une plus grande responsabilité des maîtres et des élèves et de leur épanouissement. Il s'appuiera sur une pédagogie plus scientifiquement élaborée et contrôlée, et incitera à une créativité et à une auto-formation accrues. » (A.P.M.E.P., 1972, pp. 11-12)

8. Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Dans cette période, on trouve dans le Bulletin des articles sur l'apprentissage de notions de logique avant le lycée. Par exemple, dans un article intitulé *Insertion de la logique dans l'enseignement élémentaire* paru dans le Bulletin n° 292 en 1974, M. Carmagnole propose « d'insérer une pensée logique avant onze ans, non seulement en heure de mathématique, mais surtout en toute heure de la journée ». Il s'agit essentiellement de discuter avec les élèves de la compréhension de phrases ayant des structures logiques particulières : que peut-on dire sur l'activité des filles et des garçons quand le maître dit « cet après-midi les filles dessineront » ? Quelle différence entre les phrases « tous les jours il y a un enfant qui se fait punir » et « Il y a un enfant qui se fait punir tous les jours. » Josette Adda participe activement à la réflexion sur l'enseignement de la logique. Elle est, avec W. Faivre, auteur de la brochure APMEP n° 5 *Éléments de logique pour servir à l'enseignement des mathématiques*, et elle publie dans le Bulletin n° 301 en 1975, dans la Rubrique Échanges, un article intitulé *Une manière d'intégrer des éléments de logique dans l'enseignement des mathématiques en classe de Sixième*. Elle y défend la pertinence de l'étude d'énoncés quantifiés dès le collège :

> C'est une aberration de prétendre limiter l'introduction de la logique au calcul des propositions : en effet, personne ne peut faire de mathématiques, à quelque niveau que ce soit, même en Sixième, sans quantifications (je dis bien « quantifications » ; l'introduction du symbolisme des quantificateurs, qui, par ailleurs ne me semblerait pas aussi scandaleuse qu'on le dit, n'est pas l'essentiel, loin de là, et on peut très bien, en Sixième, tant que les énoncés ne sont pas très longs, expliciter les quantifications en toutes lettres).

Le groupe de recherche pédagogique en Sixième-Cinquième de l'IREM de Bordeaux publie quant à lui un article intitulé *Des simulateurs logiques en classe de Sixième* dans le Bulletin n° 300 en 1975.

Un important Dossier Second Cycle est publié dans le Bulletin n° 323 en avril 1980, qui présente des documents majeurs élaborés pour guider l'action de l'A.P.M.E.P. Une partie concerne les *finalités du second cycle, objectifs mathématiques et didactiques*. Dans une rubrique *Quelques types fondamentaux d'activités mathématiques*, « l'exploration de diverses modalités du raisonnement mathématique » est indiquée comme activité transversale. On trouve dans le même paragraphe le passage suivant sur la logique :

> Il convient ici d'éviter tout exposé de logique mathématique (partie des mathématiques qui a pour objet une réflexion théorique sur l'activité mathématique) ; un tel exposé serait vide de sens pour les élèves, précisément par manque de pratique mathématique antérieure ; en outre la description d'un raisonnement mathématique, même très simple, est souvent d'un niveau de complexité assez grand, et on fausserait le jugement des élèves en se bornant à des aspects très partiels (tables de vérité, etc.) Il sera par contre judicieux de souligner les différentes formes du raisonnement mathématique, au fur et à mesure de leur emploi dans les situations étudiées.

On le voit ici clairement : l'enseignement des notions de logique dans le style des mathématiques modernes n'a pas convaincu.

Dans cette période des mathématiques modernes, la logique mathématique était clairement la référence pour l'enseignement de notions de logique. Mais cette logique mathématique était souvent méconnue des professeurs, malgré les efforts de formation dans les IREM. La plupart des professeurs n'avaient sans doute pas suffisamment de recul pour réinvestir ces notions dans d'autres parties du programme, limitant ainsi les notions de logique à un enseignement formel et fermé sur lui-même. Rappelons que telle n'était pas la volonté des rédacteurs du programme. Quoiqu'il en soit, les programmes de 1981 marqueront une rupture claire avec les mathématiques modernes, et la logique en est rejetée en même temps que bon nombre de concepts jugés trop abstraits.

5.1.3 1981-1999 : La contre-réforme

Programmes et instructions complémentaires de 1981, de 1990

Le programme de 1981 affiche ainsi la rupture :

> Le présent programme est celui d'une *classe de Seconde pour tous*[9] ; il convient de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures, et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement ; mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit-il ; sa tâche essentielle est d'entraîner ses élèves, devant des situations saisies dans leur complexité naturelle, à la réflexion et à l'initiative personnelle.

Il n'y a plus de notions de logique explicitement au programme et le programme met même en garde contre l'exposé de ces notions qui se faisait dans la décennie précédente, en reprenant l'extrait du Dossier Second Cycle du Bulletin n° 323 cité page 193. Il y est toujours question de cette attitude réflexive par rapport au raisonnement, mais ici le terme « logique » n'est utilisé que pour exclure la logique mathématique. Par ailleurs, l'utilisation d'un langage mathématique spécifique et l'étude de ce langage, qui était un axe important des mathématiques modernes, est ici clairement rejeté. On ne peut donc plus vraiment parler pendant cette période d'enseignement de notions de logique.

Le programme de 1990 est dans la même ligne. Le paragraphe *Formation scientifique* précise :

> La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants. Cependant, la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective

9. Il n'y a plus qu'une classe de Seconde, les sections ont été reportées à la classe de Première.

> de **progression ; on se gardera donc de toute exigence prématurée de formulation**, aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le **vocabulaire** et les **notations** ne sont pas imposés *a priori* ; ils s'introduisent en cours d'étude selon un critère d'utilité.

Puis suit un paragraphe *Vocabulaire et notations* dans lequel la logique est mentionnée, toujours pour subir le même sort qu'en 1981, l'exclusion :

> Certaines questions (traitement des équations, emploi de propriétés caractéristiques en géométrie...) amènent à utiliser des **équivalences logiques ;** on observera qu'au collège seule la formulation en deux énoncés séparés est au programme. L'emploi des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ n'est pas un objectif du programme. **Tout exposé de logique mathématique est exclu.**

Dans cette période, l'apprentissage du raisonnement est toujours un objectif affiché, mais le terme « logique » n'y est plus rattaché. Celui-ci n'est utilisé que pour évoquer la « logique mathématique », qui constitue encore une référence bien identifiée par le programme, mais qui ne doit plus être enseignée. Le « langage mathématique » est mentionné dans le programme de 1990. Cependant, nous avons vu qu'à l'époque des mathématiques modernes, l'apprentissage du langage mathématique dans son expression formelle, voire symbolique, était un but de l'enseignement en Seconde, avec l'idée que ce langage spécifique participait à la conceptualisation et la compréhension des mathématiques. En 1990, l'expression dans un langage mathématique plus formalisé est vue comme un obstacle à la compréhension, il ne doit donc pas venir trop tôt, et il n'est plus question d'étudier le fonctionnement de ce langage. Les notions de logique mathématique qui sont des éléments du langage (variable, proposition, connecteur, quantificateur) sont par conséquent moins présents dans le discours mathématique scolaire.

L'élève acteur de ses apprentissages, la logique trop formelle

La période 1981-1999 est marquée par deux grands principes : l'élève doit être acteur de ses apprentissages, et les mathématiques participent à une formation scientifique pluridisciplinaire.

Les textes institutionnels préconisent alors que la résolution de problèmes devienne une activité centrale dans la classe de mathématiques. Dans les ressources qu'ils publient, différents groupes (dans les IREM, les IUFM [10], l'A.P.M.E.P...) s'attachent à construire des situations donnant du sens aux concepts qui y interviennent comme outils de résolution d'abord, avant de devenir objets d'enseignement (on peut voir l'influence de la didactique des mathématiques naissante, à travers la notion de situation de G. Brousseau, ou la dialectique outil/objet de R. Douady). Pour la logique, construire de telles situations n'est pas si simple, parce que les outils qu'elle propose, qui peuvent intervenir dans la

10. Instituts Universitaires de Formation des Maîtres, créés en 1990, en charge de la formation des enseignants.

résolution de problèmes au niveau de l'expression et du raisonnement, doivent être dégagés d'une situation particulière pour que leur validité soit établie. Ce n'est pas pour montrer la vérité de telle ou telle proposition que la théorie du syllogisme a été élaborée, mais pour montrer qu'il est possible d'établir la vérité d'une proposition en fonction de sa forme en s'appuyant sur d'autres propositions connues pour vraies et sur un schéma de raisonnement reconnu valide. Dans les programmes de 1981 et de 1990, l'accent est mis sur l'acquisition de méthodes, avec une préoccupation pratique : les connaissances doivent pouvoir être utilisées dans la résolution de problèmes. La justification de ces méthodes a un aspect plus théorique et occupe moins de place. Dans le corpus des savoirs à institutionnaliser, la logique présente un aspect trop général et abstrait qui n'a pas sa place.

En 1990, la première intention majeure du nouveau programme est d'« entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. » À l'époque des mathématiques modernes, le lien entre les mathématiques et les autres disciplines était également important. La mathématique était un élément essentiel de la formation scientifique, notamment en proposant un modèle « unificateur » pour les sciences, et un langage spécifique pour l'expression de leurs résultats. La théorie du syllogisme se voulait également un instrument au service des sciences. Mais de la même manière que tous les raisonnements ne peuvent pas se ramener à une forme syllogistique, tout n'est pas structure dans le monde qui nous entoure. Dans la formation scientifique évoquée dans les textes institutionnels entre 1981 et 1999 (et encore aujourd'hui), c'est surtout l'aspect « utilitaire » des mathématiques vis-à-vis des autres sciences qui ressort. Les mathématiques restent un lieu privilégié d'apprentissage de la rigueur, notamment de la rigueur du raisonnement, nécessaire dans la démarche scientifique. Mais ce qui concerne plus spécifiquement la logique (par exemple ce qui touche au langage mathématique, ou qui dans le raisonnement est relatif à l'usage des variables et de la quantification) est quasiment absent, au profit d'une démarche scientifique plus générale.

Un enseignement de notions de logique n'est pourtant pas contradictoire avec les deux principes évoqués qui marquent cette période. J'ai essayé de donner ici des explications possibles de sa disparition des programmes, sachant que ce qui y a sans doute le plus contribué est la volonté de marquer une rupture avec les mathématiques modernes. Mais il est assez naturel qu'une fois la rupture consommée, la logique puisse réapparaître dans les programmes, d'abord timidement, puis de manière plus explicite bien qu'assez floue, comme nous allons maintenant le voir.

5.1.4 1999 puis 2009 : un retour d'abord timide, puis plus marqué

Programmes et instructions complémentaires de 1999 et 2009

Dans le programme de 1999 nous pouvons lire une certaine réhabilitation de la logique :

> Chaque chapitre est l'occasion de constater l'économie de pensée qu'apportent des notations adaptées et d'éprouver la nécessité d'avoir à ce propos des conventions claires. Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la Seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.

La « logique formelle » (j'interprète cette expression comme synonyme ici de « logique mathématique ») retrouve ainsi droit à être citée autrement que pour signaler son exclusion du programme. Ce texte se contente d'évoquer les principes de cette logique, et n'y associe pas des notions particulières qui sont à étudier. Certaines notions sont cependant mentionnées dans le document *Accompagnement des programmes* d'octobre 2000 dans un paragraphe *Rédaction, logique, notations* :

> En classe de Seconde, les problèmes de logique mathématique concernent essentiellement l'implication et l'équivalence, la manipulation du contre-exemple, le *ou* et le *et*. Il ne s'agit pas bien sûr de faire des cours de logique formelle, mais on n'hésitera pas à aborder les problèmes de logique lorsqu'ils se présentent, notamment lors du travail écrit. On n'oubliera pas qu'au collège seule l'implication est utilisée : toute équivalence logique y est formulée en deux énoncés séparés en termes de *si... alors ...*; en Seconde, on abordera le *si et seulement si*. On pourra utiliser les symboles $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$ mais avec prudence et modération.
>
> Les symboles $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$ et $\{\ldots\}$ seront employés à bon escient et sans excès. Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ ne sont pas au programme de la Seconde ; on soulignera cependant l'universalité de la plupart des énoncés mathématiques ; à propos d'une propriété portant sur un ensemble E, on insistera sur le fait que la seule exhibition d'un contre-exemple suffit à démontrer qu'elle est fausse et que si E est un ensemble infini, aucune liste finie de cas où elle est vraie n'en constitue une démonstration.

Dans ce texte, la logique mathématique est de nouveau explicitement citée, et des éléments du langage mathématique sont évoqués, réaffirmant ainsi le rôle de la logique dans l'apprentissage de celui-ci. Notons cependant que les termes employés marquent tout-de-même une distance par rapport à la logique mathématique : les connecteurs logiques ET et OU par exemple ne sont pas appelés « connecteurs », la négation ne figure pas. Quand aux quantificateurs, ils sont assimilés à leurs symboles. Ces notions ne sont pas abordées comme des notions mathématiques. Ainsi, la position par rapport au langage est différente de celle de l'époque des mathématiques modernes. Il n'y a pas ici description d'un langage mathématique spécifique et définition de ses éléments mais plutôt précision d'une utilisation spécifique du langage ordinaire en mathématiques (même s'il est question des symboles d'implication et d'équivalence, ces connecteurs sont ici reliés au raisonnement, et ne sont donc pas forcément vus comme des éléments du langage mathématique).

Mon étude ne concerne que les programmes de la classe de Seconde. Il me paraît pourtant important de signaler le programme pour l'enseignement obligatoire au choix de la classe de Première de la série littéraire de 2004 [11], dans une perspective plus globale d'étude de l'évolution de la place de la logique dans les programmes pour le lycée. La logique y est évoquée comme un domaine à part entière, qui doit être traité de manière transversale, tout comme l'algorithmique :

> Deux domaines transversaux viennent irriguer l'ensemble du programme : il s'agit de la logique et de l'algorithmique, qui trouvent toutes deux des terrains d'application pertinents dans plusieurs des contenus abordés. Ils ne feront pas l'objet d'un exposé théorique isolé.
>
> **Pour ce qui concerne la logique**
>
> L'arithmétique semble un domaine privilégié pour travailler le raisonnement, car les notions de base qu'on y rencontre sont depuis longtemps familières aux élèves et ne nécessitent que peu de connaissances techniques.
>
> [...] Ce travail [en arithmétique] devrait permettre de faire dégager *en situation* le domaine de validité de certaines phrases *a priori* « ouvertes » pour eux, de faire distinguer les notions de condition nécessaire et de condition suffisante et de poser comme question centrale celle de la vérité ou non de propositions générales, comportant si nécessaire de façon explicite des quantifications existentielles et universelles et des connecteurs (« et », « ou », négation).
>
> [...]
>
> Des compétences élémentaires de logique sont visées par ce travail transversal *sur les deux années* de cette formation. Les élèves devront être capables de les utiliser *dans un champ de connaissances qui leur est familier*. Ce travail d'appropriation de quelques règles de logique ne peut se faire que progressivement, par petites touches, et de façon non dogmatique.

La tonalité de ce texte préfigure ce que nous verrons dans le programme de 2009. Mais certains éléments particuliers que l'on ne retrouvera pas sont à dégager :

– il y est question de « phrases « ouvertes » », de propositions à propos desquelles on se pose la question centrale de leur vérité, des quantificateurs et des connecteurs comme

11. L'intégralité de ce qui concerne la logique dans ce programme se trouve en annexe page 519.

éléments de ces propositions. Nous retrouvons l'idée de description d'un langage mathématique spécifique, même si cela n'est pas explicitement présenté comme un objectif. Cependant, la compréhension et l'utilisation d'un langage formalisé ne sont pas visés, puisque l'explicitation des quantificateurs et des connecteurs n'est pas jugée toujours nécessaire. La question de la définition de ces notions n'est pas évoquée, mais nous pouvons penser que les « quelques règles de logique » mentionnées dans le dernier paragraphe concernent leur utilisation.
– il est préconisé de travailler la logique dans un domaine où les connaissances mathématiques sont assurées, de manière à pouvoir la déceler plus facilement.

La réhabilitation de la logique se poursuit avec le programme de 2009. Y figure le paragraphe *Raisonnement et langage mathématiques* suivant :

> Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la Seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne doivent pas être fixés d'emblée ni faire l'objet de séquences spécifiques mais doivent être introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité. Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire mathématiques sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ. Pour autant, ils font pleinement partie du programme : les objectifs figurent, avec ceux de la logique, à la fin du programme.

Une partie de ce paragraphe reprend le texte de 1999. Nous retrouvons notamment cette idée que l'élève doit acquérir « une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ». Mais à la différence du programme de 1999, celui de 2009 contient un tableau des objectifs, donné ci-après, qui précise les notions à étudier.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Figure 5.1 – Tableau des objectifs

Les connaissances en jeu sont quelque peu précisées, elles concernent des notions qui sont des objets d'étude de la logique mathématique. Mais elles sont présentées ici avec un ancrage très fort dans la dimension outil : les élèves sont « entraînés, sur des exemples » à les utiliser. La formulation de ces connaissances, qui est une question délicate, semble presque exclue. Le programme précise bien qu'il est exclu de faire un cours de logique, et que ces connaissances doivent être construites à travers l'étude d'autres notions mathématiques.

Même s'il est question de ce qui concerne le « raisonnement logique », les connaissances visées sont très liées au langage. Mais comme nous l'avons déjà vu à propos du programme de 1999, l'idée semble être d'apprendre à bien manier le langage ordinaire en mathématiques plutôt que d'apprendre un langage spécifique.

On peut signaler une nuance apparue dans les programmes de Première et de Terminale. Ils indiquent qu'« il convient de prévoir des temps de synthèse. » La formulation des connaissances concernant la logique est ainsi explicitement demandée, mais sans indication de la manière de le faire. Les programmes de Première et de Terminale de la filière scientifique mentionnent de plus qu' « il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation. » Cette institutionnalisation qui n'est demandée que dans la filière scientifique est peut-être une ouverture vers le traitement plus formel de ces notions que fait la logique mathématique.

5.1.5 Résumé de l'évolution des programmes

Le programme de 1960 marque l'apparition de la logique mathématique dans l'enseignement secondaire. Elle n'est pas explicitement mentionnée, mais est présente notamment à travers l'introduction des flèches d'implication et d'équivalence, et des symboles des quantificateurs.

Pour les partisans des mathématiques modernes, il faut enseigner aux élèves un langage mathématique spécifique permettant de proposer une vision unifiée de la mathématique qui joue ainsi « un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social » (rapport préliminaire de la commission Lichnérowicz publié dans le bulletin APMEP n° 258, 1967). La logique, associée à la théorie des ensembles, est un élément essentiel de l'apprentissage de ce langage et le programme de 1969 comporte un chapitre intitulé « Langage des ensembles » dont la première partie étudie le vocabulaire de la logique, et demande de faire le lien entre le langage des ensembles et le langage de la logique. Des instructions parues en 1970 proposent un rapide cours concernant ces notions qui sont nouvelles pour beaucoup de professeurs ayant eu une formation universitaire « classique. »

En 1981, le programme de la contre-réforme prend une position radicalement opposée : la logique en est exclue, rejetée avec tout ce qui paraissait trop formel et trop abstrait dans les mathématiques modernes. L'activité de l'élève est mise au cœur de l'enseignement ; celui-ci doit être acteur de ses apprentissages. C'en est alors fini de « l'illusion langagière » (Bkouche, 1992) associée aux mathématiques modernes. Ce bannissement continue dans le programme de 1990.

C'est en 1999 que l'on voit une timide réapparition de la logique, confirmée dans le programme de 2009 qui affiche des objectifs en matière de notations et raisonnement.

Finalement, il n'y a un savoir à enseigner concernant des notions de logique que dans les programmes de 1969 et de 2009. Les notions visées par ce savoir sont les mêmes dans les deux programmes, mais les objectifs y sont donnés de manière très concise. Cependant, chacun de ces programmes est accompagné d'un document destiné aux enseignants dans lequel les objectifs sont précisés : celui de 1969 par un *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* publié en 1970 (dénommé ci-après *Commentaire de 1970*), celui de 2009 par un document *Notations et raisonnement mathématiques* faisant partie d'une série de documents *Ressources pour la classe de Seconde* (dénommé ci-après *Document ressource de 2009*). Je vais maintenant analyser plus en détail ce qui y est mentionné pour chaque notion. Cette analyse plus locale permet de regarder plus finement dans quelle mesure la logique mathématique est une référence, et ce qui est pris en compte de la complexité des notions de logique identifiée dans la référence proposée dans la deuxième partie de la thèse.

5.2 Analyse par notion de logique des documents qui accompagnent les programmes

Je commencerai par trois remarques sur des considérations générales de ces deux documents avant d'examiner la manière dont ils traitent chaque notion :

– les deux documents rappellent que l'étude des notions de logique doit se faire tout au long des autres chapitres. Cependant, en 1970, ce commentaire accompagne un programme dans lequel figure un chapitre spécifique consacré à la logique. Mais il précise que « le chapitre I tout entier fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, *à tout moment*, dans la suite du cours ». En 2009 au contraire, le programme stipule qu'il n'est pas question d'un cours de logique, ce que reprend le document ressource : « cette acquisition doit être répartie tout au long de l'année, lorsque les situations étudiées en fournissent l'occasion et il n'est pas question de traiter la logique dans un chapitre spécifique ».
– Par ailleurs, le commentaire de 1970 affiche clairement dès son introduction la référence à la logique mathématique pour ce chapitre du programme et défend l'aspect fécond de la formalisation du langage (voir citation page 191), ce qui n'est pas du tout présent dans le document ressource de 2009, même si le langage symbolique y est mentionné : « la langue naturelle et le langage symbolique doivent coexister tout au long de l'année, l'apprentissage du langage symbolique devant être étalé sur le cycle terminal ».
– Enfin, le commentaire de 1970 a clairement une visée de formation des enseignants en logique mathématique, et il précise que ce qu'il expose est « rédigé en termes techniques », et « dépasse largement le développement qu'il est possible d'en faire en classe ». Le document ressource de 2009 propose surtout des exemples d'activités, et aucune considération théorique sur les notions de logique. Ces activités sont présentées dans deux grandes parties : la première s'intitule *Programme et éléments de logique ou de raisonnement* et propose des activités dans les trois grands domaines du programme : fonctions, géométrie, statistiques et probabilité ; la seconde partie s'intitule *Langage courant et langage mathématique*.

5.2.1 Proposition et variable

Dans le programme de 1969 il est question d'« assertions ». Dans le commentaire de 1970, on trouve la définition suivante de la notion de proposition :

> On appelle ici *proposition* une phrase, ou une partie de phrase ayant un sens en soi, à laquelle on peut attacher, dans la théorie où l'on se place, une valeur de vérité, soit V soit F (vrai, faux, la logique est celle du tiers-exclu) ; le programme a appelé *assertion* l'association proposition-valeur, le mot n'est pas reçu partout en ce sens, il est loisible de l'éviter.

La distinction signalée page 112 entre proposition et assertion est ici évoquée. Cependant, c'est une distinction subtile sur laquelle les auteurs du commentaire ne s'attardent pas, ils suggèrent surtout de préférer le mot « proposition », qui est celui que eux utilisent. Cette notion de proposition est définie en préalable à toute la suite, posant ainsi son caractère d'élément fondamental du langage mathématique.

Cette définition est suivie d'un passage sur les connecteurs, puis la notion de variable est introduite :

> Si la proposition est un élément de base du raisonnement, celui-ci fait intervenir, même sous ses formes les plus simples, ce qu'on pourrait appeler d'abord des « propositions dépendant d'une variable x parcourant un ensemble E, de deux variables (x, y), etc. », soit $p(x)$, $p(x, y)$, etc. Un langage plus précis qualifiera $p(.)$ $p(., .)$, de prédicat (fonction propositionnelle) à une ou plusieurs places ; à chaque x, ou (x, y) donné, est associé une proposition $p(x)$, $p(x, y)$, puis une valeur de vérité.

Le terme de « variable libre » n'est pas utilisé, mais c'est bien cette notion qui est sous-jacente à l'idée de « propositions dépendant d'une variable x ». Les quantificateurs sont introduits tout de suite après, et la notion de variable muette est alors explicitement signalée.

Le terme « proposition » est utilisé dans le programme et dans le document ressource de 2009, mais aucune définition n'en est donnée. Le mot « variable » n'a qu'une seule occurrence dans ce document, quand il est question du domaine de définition de la variable à propos de l'énoncé « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ ».

5.2.2 Connecteurs ET et OU

Le commentaire de 1970 donne une définition générale de ce qu'est un connecteur :

> Quand on fait opérer un *connecteur* sur deux propositions, ou sur une seule dans le cas de la négation, on obtient une nouvelle proposition dont la valeur de vérité dépend uniquement de celles des propositions composantes ; on caractérisera chacun des connecteurs par sa table de vérité. On peut recommander les notations suivantes, où A et B désignent deux propositions : $\neg A$ ou $\overline{A}$ (négation), $A \wedge B$ (conjonction), $A \vee B$ (disjonction), $A \Rightarrow B$ (implication), $A \Leftrightarrow B$ (équivalence). Mais on peut se borner à utiliser les mots *non*, *et*, *ou*, *implique*, *équivaut*, si on le juge prudent.

Dans ces commentaires, les deux aspects syntaxique (les connecteurs sont des opérateurs sur les propositions) et sémantique (le comportement des connecteurs par rapport aux valeurs de vérité) des connecteurs sont présents, même si il n'y a pas une séparation explicite entre ces deux aspects. Pour ce qui est des notations, le commentaire précise qu'« on peut recommander les notations $\vee$ et $\wedge$ ». Il est également demandé de « dégager, au moyen des tables de vérité, certaines propriétés utiles des connecteurs, la commutativité et l'associativité pour $\wedge$ et $\vee$ ».

Les connecteurs ET et OU sont associés à l'intersection et à la réunion d'ensembles à travers la correspondance entre une proposition $p(x)$ contenant une variable libre x astreinte à une ensemble E et l'ensemble des éléments de E vérifiant p, noté $\varphi(p)$. Les propriétés suivantes sont données : $\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \cap \varphi(q)$ et $\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \cup \varphi(q)$.

Dans le document ressource de 2009, les connecteurs ET et OU sont mentionnés à deux endroits. Tout d'abord dans la première partie, *Programme et éléments de logique ou de raisonnement*, ils sont reliés à la réunion et l'intersection. Puis, dans la deuxième partie, *Langage courant et langage mathématique*, une rubrique s'intitule *« ou, et, un »*, et son objet est de préciser les similitudes et différences d'utilisation de ces mots dans ces deux domaines. La distinction inclusif/exclusif à propos du « ou » est bien sûr évoquée avec l'exemple classique « fromage ou yaourt ». La distinction entre *et-connecteur* et *et-couple*, que j'ai introduite page 118, n'est pas évoquée. Elle aurait pourtant été bien utile dans l'exemple suivant :

Le lien entre les connecteurs « et » et « ou » nécessite aussi d'être explicité.

Exemple 14

Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.
1. Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?
2. Les deux phrases suivantes : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>ou</u> l'option danse » et « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>et</u> tous ceux qui suivent l'option danse » désignent-elles les mêmes élèves ?

La première question met en évidence que l'intersection de deux ensembles est incluse dans leur réunion.
La seconde question montre une utilisation du mot « et » en langue naturelle qui correspond à une réunion.
Une analogie peut être faite avec l'emploi des mots « et » et « ou » dans la phrase suivante :
« A(x) = 0 si et seulement si x = 1 **ou** x = 2
donc les solutions de l'équation A(x) = 0 sont 1 **et** 2. ».

FIGURE 5.2 – Exercice proposé par le document ressource de 2009 sur les connecteurs ET et OU

Nous avons déjà vu (page 119) que le « et » de la proposition « les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont 1 et 2 » n'est pas un connecteur logique ET. Le premier exemple ne relève pas de la même confusion. Tout d'abord, le « et » et le « ou » de la question 2 ne sont pas directement identifiables comme des connecteurs logiques car ils n'interviennent pas dans des propositions (ce qui est entre guillemets ne sont même pas des phrases). Complétons alors pour avoir les deux propositions (1) : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle » et (2) : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre et tous ceux qui suivent l'option danse participeront au spectacle ». Nous allons exhiber la structure logique de ces propositions, pour cela considérons :

- une variable E qui pourra prendre ses valeurs dans l'ensemble des élèves

- un symbole de prédicat $T(E)$ qui signifie « E suit l'option théâtre »

- un symbole de prédicat $D(E)$ qui signifie « E suit l'option danse »

- un symbole de prédicat $S(E)$ qui signifie « E participera au spectacle »

Une modélisation de la structure logique de la proposition 1 est alors :

$$\text{Pour tout } E, \text{ [si } \Big(T(E) \text{ OU } D(E)\Big) \text{ alors } S(E)].$$

Nous retrouvons dans la modélisation de la structure logique de la proposition 1 le « ou » comme connecteur logique entre deux propositions.

Une modélisation de la structure logique de la proposition 2 est la suivante :

$$\text{Pour tout } E, \text{ [}\Big(\text{ si } T(E) \text{ alors } S(E)\Big) \text{ ET } \Big(\text{ si } D(E) \text{ alors } S(E)\Big)].$$

Là encore la modélisation de la structure logique de la proposition 2 permet de voir un connecteur logique, ici un « et », entre deux propositions.

Ce passage d'un « ou » à un « et » n'est donc pas dû, comme dans l'exemple concernant les solutions d'une équation, au passage d'un connecteur logique à une conjonction de coordination suite à une reformulation, mais à l'équivalence entre les deux propositions $((A \text{ OU } B) \Rightarrow C)$ et $((A \Rightarrow C) \text{ ET } (B \Rightarrow C))$. La modélisation de la structure logique des propositions a permis ici d'éclairer ces phénomènes de la langue. Mais cet éclairage n'est pas proposé dans le document ressource de 2009.

5.2.3 Négation

Le commentaire de 1970 suggère d'utiliser pour la négation d'une proposition les notations $\neg A$ et $\overline{A}$, sans donner préférence à l'une ou l'autre (la deuxième notation n'est pas pratique quand il s'agit d'écrire la négation d'une longue proposition, avec la première, le parenthésage suffit). La négation est associée au complémentaire d'un ensemble, et la propriété suivante est donnée : $\varphi(\neg p) = \complement_E \varphi(p)$ (en reprenant les notations de la page 204).

Le document ressource de 2009 mentionne très brièvement la négation dans la première partie, associée au complémentaire. Dans la deuxième partie, il précise qu'« expliciter des événements contraires peut être l'occasion de nier des propositions » et que « ce type d'exercice, nouveau et délicat, pourra faire l'objet d'un entraînement tout au long de l'année ». Deux exemples sont donnés, avec des phrases de la vie courante. Le document ressource ne suggère aucune notation ou formulation pour la négation d'une proposition.

5.2.4 Implication

Dans le commentaire de 1970, plusieurs passages sont consacrés à l'implication :

– dans les propriétés des connecteurs sont données 4 propositions équivalentes : $A \Rightarrow B$, $(\neg A) \vee B$, $\neg[A \wedge (\neg B)]$, $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$. La transitivité de l'implication est également donnée, avec la mise en garde contre l'écriture $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ qui « évoquerait une associativité fallacieuse. »

– elle est associée à deux usages dans les raisonnements :

> (a) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, alors B est vrai ;
> (b) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si B est faux, alors A est faux ;

– Le cas de la prémisse fausse est par ailleurs envisagé :

> Lorsque A est faux, l'implication $[A \Rightarrow B]$ ne donne pas de renseignement sur B, mais elle reste vraie ; ainsi, l'énoncé :
>
> « tout entier divisible par 6 est divisible par 2 »
>
> se traduit par l'implication, vraie que 6 divise n ou non :
>
> $$[\forall n \in \mathbb{Z} : 6 \text{ divise } n \Rightarrow 2 \text{ divise } n].$$

On remarquera ici l'ambiguïté due au fait de n'avoir qu'un seul terme pour l'implication entre deux propositions et l'implication universellement quantifiée : la vérité de « $\forall n \in \mathbb{Z}$: 6 divise $n \Rightarrow 2$ divise n » ne dépend pas du fait que « 6 divise n ou non », puisque la variable n y est muette.

– Il est signalé l'importance de signifier la présence d'une quantification universelle quand c'est le cas :

> On n'omettra pas les quantificateurs dans des énoncés qui contiennent des implications portant sur des prédicats ; x parcourant E, les implications
>
> $$(1) : [p(x) \Rightarrow q(x)] \text{ et } (2) : [\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)],$$
>
> ont des sens très différents, car la valeur de vérité de (1) dépend de x, celle de (2) n'en dépend pas.

– L'implication entre deux propositions closes quelconques est mentionnée, et il est précisé qu'elle n'est pas intéressante pour l'activité mathématique :

> La logique fait de l'implication un usage plus étendu que les mathématiques ; on n'insistera pas sur le fait qu'une implication vraie, comme :
> « 2 est pair $\Rightarrow$ trois points non alignés déterminent un cercle »,
> n'est pas utilisée en mathématiques.

– Elle est reliée à l'inclusion : « la relation dans $\mathscr{P}(E)$ $\varphi(p) \subset \varphi(q)$ est équivalente à la vérité de la proposition $[\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)]$. »

L'implication est ainsi présentée sous les multiples aspects qui participent à sa compréhension : connecteur IMPLIQUE entre deux propositions closes, entre deux propositions ouvertes, propriétés de ce connecteurs, implication universellement quantifiée, inférences possibles à partir d'une implication vraie, lien avec l'inclusion.

Le document ressource de 2009 propose plusieurs exercices sur l'implication. Celui qui suit est proposé dans la première partie pour « faire émerger les conceptions des élèves sur l'implication, terme utilisé fréquemment dans la langue naturelle » :

1.3. Implication et équivalence

Exemple 6[1]

A. Voici deux propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $(a+b)^2 = 0$ $\boxed{2}$ $a = 0$ et $b = 0$

Si a et b sont des nombres réels tels que la proposition $\boxed{2}$ est vraie, alors la proposition $\boxed{1}$ est vraie. On note : pour a et b réels, $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ et on dit que, pour a et b réels la proposition $\boxed{2}$ implique la proposition $\boxed{1}$.

Est-il vrai que pour a et b réels, la proposition $\boxed{1}$ implique la proposition $\boxed{2}$?

B. Voici quelques propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $a^2 = b^2$	$\boxed{2}$ $a = b$	$\boxed{3}$ $a = -b$
$\boxed{4}$ $(a+b)(a-b) = 0$	$\boxed{5}$ $a = b$ ou $a = -b$	$\boxed{6}$ $a = 0$ ou $b = 0$

a. Quelles sont les implications du type $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{..}$, vraies pour a et b réels ?

b. Quelles sont les implications du type $\boxed{..} \Rightarrow \boxed{1}$, vraies pour a et b réels ?

c. Quelles sont les propositions équivalentes pour a et b réels ?

d. Application : résoudre l'équation $(2x-3)^2 = (2x+9)^2$.

Cet exemple peut être traité en utilisant la représentation de la fonction carré et des fonctions polynômes de degré 2. Un débat oral, par groupes ou collectivement, permet de faire prendre conscience de la signification des termes « et » et « ou ».
Le plus important est de faire émerger les conceptions des élèves sur l'implication, terme utilisé fréquemment dans la langue naturelle (s'impliquer dans une démarche, impliquer les autres membres d'un groupe dans un travail, par exemple). Une fois assimilé, cet exemple peut devenir un exemple de référence pour les résolutions d'équations.

FIGURE 5.3 – Exercice proposé par le document ressource de 2009 sur l'implication

Un des éléments essentiels des implications en jeu ici est qu'elles sont universellement quantifiées. Or, cette quantification est exprimée à travers l'expression « pour a et b réels », dans laquelle l'idée que l'on s'intéresse à tous les réels n'est pas présente, sinon à travers le caractère quelconque de ces réels. Nous avons déjà vu que de telle ambiguïtés pouvait amener les élèves à répondre différemment de ce qui est attendu, par exemple ici ils pourraient considérer que la réciproque est vraie pour certains réels a et b et fausse pour d'autres. Par ailleurs, il est dommage de prendre à la question A une implication dont la prémisse n'est vérifiée que dans un cas, cela diminue la pertinence d'exprimer cette information à l'aide d'une implication universellement quantifiée : on dira plutôt « quand $a = 0$ et $b = 0$ on a $(a+b)^2 = 0$ », voire seulement $(0+0)^2 = 0$, plutôt que « pour tout nombres réels a, b, si $a = 0$ et $b = 0$ alors $(a+b)^2 = 0$ ».

Dans les exemples donnés dans le document ressource, aucune implication n'est explicitement universellement quantifiée. Dans la première partie, il est question de l'énoncé « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ », par rapport auquel il faut « faire prendre conscience de la nécessité de préciser le contexte de la proposition conditionnelle, c'est-à-dire l'ensemble auquel appartient x pour pouvoir donner la valeur vraie ou fausse à cet énoncé. » Dans l'explication de cette nécessité sont allègrement mélangées variables et valeurs que l'on peut leur substituer, implication entre propositions ouvertes et implication universellement quantifiée : « En effet, si x est un nombre positif, l'énoncé est vrai, si x est un réel, l'énoncé est faux et un contre-exemple est facilement trouvé. » Les enseignants n'auront bien sûr aucun mal à comprendre cette explication, mais ce vocabulaire confus masque toute la complexité des notions sous-jacentes.

Dans la deuxième partie du document ressource de 2009, un exercice classique, issu [12] de l'article *Les cosmonautes*, de M. Legrand (Legrand, 1983), est proposé :

Exemple 11[3]

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.
1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
Est-il cosmonaute américain?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
Est-il cosmonaute américain?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
Porte-t-il une chemise rouge ?

Figure 5.4 – Exercice des cosmonautes

Il en est également proposée une version dans un contexte géométrique. Mais là encore les questions de quantification, importantes dans ces exercices, ne sont pas soulignées.

Le document ressource signale également, à travers un exemple mathématique et un exemple de la vie courante, la possible différence entre la façon dont les élèves entendent « si A, B » (comme une implication), et la façon dont il entendent « B si A » (comme une équivalence).

12. La référence est précisée.

5.2.5 Les quantificateurs

Dans les commentaire de 1970, les quantificateurs sont introduits comme éléments dans la construction des propositions :

> Les *quantificateurs*, qui permettent d'introduire de nouvelles propositions à partir de $p(x)$, $p(x, y)$ ... seront présentés sur des exemples : si le référentiel est $\mathbb{N}$,
>
> « il existe x tel que $x < 5$ », « quel que soit x, $x < 5$ »
>
> sont deux propositions, la première vraie, la seconde fausse, notées respectivement :
>
> $$[\exists x \in \mathbb{N} : x < 5] \qquad [\forall x \in \mathbb{N} : x < 5]$$
>
> les symboles $\exists$ et $\forall$ sont dit quantificateurs *existentiel* et *universel* ; les propositions qu'ils introduisent ont une valeur de vérité *indépendante de la variable x quantifiée* (variable muette).
>
> On prendra soin, en employant les quantificateurs, de préciser d'abord le référentiel et d'écrire leurs symboles en tête de formules.

L'aspect sémantique des quantificateurs (valeur de vérité d'une proposition quantifiée) n'est pas donné dans un cadre général, mais sur un exemple particulier.

Le lien avec les ensembles est fait (en reprenant les notations présentées page 204) :

> Quant aux relations suivantes dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$,
>
> $$\varphi(p) = E, \qquad \varphi(p) \neq \emptyset, \qquad \varphi(p) \subset \varphi(q), \qquad \varphi(p) = \varphi(q)$$
>
> elles sont équivalentes à la vérité de propositions comportant l'emploi de quantificateurs, savoir :
>
> $$[\forall x \in E : p(x)], \qquad [\exists x \in E : p(x)],$$
> $$[\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)], \qquad [\forall x \in E : p(x) \Leftrightarrow q(x)]$$

Nous avons vu également dans la partie sur l'implication qu'il était considéré comme important de signaler la quantification universelle généralement associée à une implication.

Dans le programme de 2009, « les élèves sont entraînés, sur des exemples, à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ».

Dans la première partie du document ressource de 2009, un paragraphe s'intitule *Explicitation des quantifications* :

1.2. Explicitation des quantifications

Les élèves ont fréquemment rencontré au collège des énoncés comportant des quantifications implicites. C'est le cas, par exemple :

- dans l'énoncé de règles de calcul dans le programme de 5[e]
- dans la présentation des identités remarquables

En classe de seconde, l'explicitation des quantifications doit être faite dans l'optique d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés. Elle ne doit pas être systématique mais doit être faite dès qu'il peut y avoir ambiguïté de la situation proposée. Il est inutile de compliquer les notations lorsque ce n'est pas utile à la compréhension.

Les quantificateurs seront introduits en situation progressivement tout au long de l'année, la langue naturelle et le langage symbolique devant coexister pendant toute l'année.

Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes ; la dernière étant un objectif de fin de lycée et non de la classe de seconde.

Il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande.

FIGURE 5.5 – Extrait du document ressource de 2009 sur les quantificateurs

Alors que le programme demande d'entraîner les élèves à repérer les quantifications implicites particulièrement dans les propositions conditionnelles, cette forme de proposition n'est pas évoquée ici. Pourtant les propositions en « si. . .alors . . . » non explicitement quantifiées sont fréquentes au collège (c'est le cas de presque toutes les propriétés de géométrie) !

La compréhension de la notion de quantificateurs est vue comme nécessitant une progression dans laquelle trois étapes sont distinguées : « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications », « être capable de rédiger avec les quantificateurs ». Il est précisé que la dernière étape est un objectif de fin du lycée. C'est le seul endroit où une progression est mentionnée. Trois exemples d'exercices sont ensuite donnés, le premier illustre la deuxième étape :

Exemple 3

Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.
(*Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à* $2x + 5$)
L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
(*Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels* $f(x)$ *et* $2x + 5$ *sont égaux ?*)
Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
(*Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels* $f(x)$ *et* $2x + 5$ *sont égaux*)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

FIGURE 5.6 – Exercice du document ressource de 2009 sur les quantificateurs (1)

Les quantificateurs sont des éléments du langage mathématique, intervenant dans la formulation des expressions mathématiques que sont les noms et les propositions. Ici, aucun des trois énoncés proposés n'est une proposition. Nous avions déjà vu que rien n'était dit sur la notion de proposition, ni dans le programme, ni dans le document ressource de 2009. Cet exemple renforce l'idée que cela n'est pas un objectif que les élèves aient une idée claire de cette notion. Il amène à douter que cela soit une notion claire pour les auteurs, qui en tout cas ne semblent pas soucieux de la distinction entre les phrases qui sont des propositions et celles qui n'en sont pas.

Cherchons alors à formuler des propositions faisant intervenir l'expression « $f(x) = 2x + 5$ », qui est effectivement quantifiée différemment selon le contexte. Pour le premier exemple, il suffit de se contenter de la proposition « la fonction f est définie par $f(x) = 2x + 5$ », dans laquelle le prédicat « être définie par », appliqué à une fonction, masque effectivement une quantification universelle. Pour le deuxième, il suffit de ne pas le proposer sous forme interrogative, et de se contenter de la proposition « l'équation $f(x) = 2x + 5$ a au moins une solution », dans laquelle le prédicat « avoir au moins une solution », appliqué a une équation, masque une quantification existentielle. Quant au dernier énoncé, si on cherchait à y associer une expression mathématique, cela pourrait être le nom « l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 2x + 5$ », qui peut s'écrire « $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + 5\}$ », où n'intervient aucune quantification !

Le deuxième exemple est donné pour « faire prendre conscience de la nécessité de préciser le contexte de la proposition conditionnelle » :

Exemple 4

L'énoncé : « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ » est-il vrai ?

FIGURE 5.7 – Exercice du document ressource de 2009 sur les quantificateurs (2)

Le troisième exercice est du type Vrai ou Faux :

Exemple 5

Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$.
En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propriétés suivantes, si elle est vraie ou fausse.
a. Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-3\,;3]$ qui a une image par f strictement inférieure à 0.
b. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3\,;3]$ ont une image par f négative.
c. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3\,;3]$ ont une image par f strictement inférieure à 3.

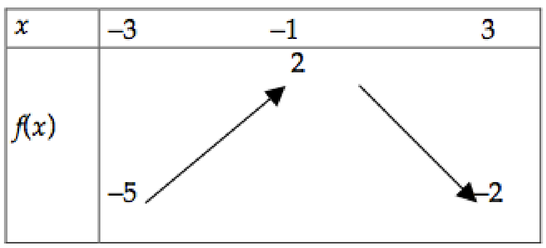


FIGURE 5.8 – Exercice du document ressource de 2009 sur les quantificateurs (3)

Cet exercice permet de travailler sur des propositions quantifiées et sur la lecture d'un tableau de variation. Dans la question c, le choix du nombre 3 est une variable didactique intéressante : ici c'est un majorant, et pas le maximum qui est facilement identifiable grâce au tableau de variations. Cela permet de travailler la différence entre ces deux notions (même si la notion de majorant n'est pas au programme de Seconde). Certains élèves pourraient répondre que cette proposition est fausse, parce qu'ils peuvent dire quelque chose de « plus fort » que la proposition c (à savoir que tous les réels de l'intervalle [-3 ; 3] ont une image par f inférieure ou égale à 2), suivant ainsi le principe du maximum d'information (voir page 120). Ce principe, pourtant mentionné ailleurs dans le document ressource [13], ne l'est pas ici.

Dans ce document, le seul endroit où l'on voit un quantificateur appliqué à une variable est le premier exercice (figure 5.6). Il y a une méfiance affichée vis-à-vis de l'explicitation des quantificateurs, qui n'est pas jugée toujours nécessaire mais seulement « quand la compréhension le demande » et « sans formalisme excessif » (voir extrait 5.5 page 210). Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas du tout mentionnés.

5.2.6 Les différents types de raisonnement dans les programmes et textes d'accompagnement

Les différents types de raisonnement ne sont pas mentionnés dans le commentaire de 1970, ce qui confirme l'ancrage fort de la logique à l'étude du langage.

Le document ressource de 2009 renvoie au document *Raisonnement et démonstration* pour le collège en ce qui concerne les raisonnements. Dans ce document, on trouve plusieurs exemples des différents types de raisonnement mentionnés dans le tableau des objectifs pour le lycée : raisonnement par disjonction des cas, démonstration par contre-exemple, raisonnement par l'absurde, mais aucune justification de la validité de ces raisonnements. Il n'y a par contre pas d'exemple de raisonnement par contraposée, car le document préconise que « le raisonnement par l'absurde [soit] pratiqué par le professeur comme forme plus simple d'un raisonnement par contraposée, par exemple pour démontrer la réciproque du théorème de Pythagore ». La distinction entre ces deux types de raisonnement est cependant complexe (voir page 168), et puisqu'au lycée ces deux types de raisonnement sont à connaître, le seul commentaire du document pour le collège semble insuffisant.

13. À propos du fait que dans la vie courante, certaines phrases en *si... alors* sont entendues comme des équivalences.

5.3 Synthèse de l'étude des programmes et documents d'accompagnement

La perspective historique sur la place de la logique dans les programmes de mathématiques pour le lycée a montré que la position actuelle vient à la suite de deux situations extrêmes : la logique est présente comme une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de 1969 à 1981, mais est ensuite totalement exclue de 1981 à 1999. Nous pouvons ainsi parler d'un *retour* de la logique dans les programmes, et en retenir deux conséquences importantes en ce qui concerne les enseignants :
– rien n'a été inscrit dans le temps à un niveau collectif (il n'y a pas les annales ni les habitudes prises que mentionne G. Arsac dans la citation page 175), et le professeur d'aujourd'hui se retrouve donc, sans doute plus que pour d'autres domaines, à devoir faire des choix didactiques qui seront très influencés par une composante personnelle.
– les enseignants actuels n'ont pas tous reçu le même type de formation sur les notions de logique, et n'ont pas les mêmes connaissances, ce qui accroît l'importance de cette composante personnelle.

Nous pouvons alors faire l'hypothèse de pratiques actuelles variées quant à l'enseignement de notions de logique.

Les textes publiés par l'A.P.M.E.P. que nous avons étudiés témoignent des débats qui ont accompagné la période des mathématiques modernes, et notamment la présentation axiomatique dans l'enseignement des mathématiques. S'agissant plus particulièrement des notions de logique, le débat sur l'utilisation ou non des symboles de quantificateur a été particulièrement vif. Notons qu'aujourd'hui, personne ne prend publiquement position en leur faveur avec la même force que G. Walusinski en 1961. Les expériences d'enseignement de notions de logique qui sont relatées mettent en avant le travail sur le langage que permet la logique. La formalisation est défendue par plusieurs enseignants comme un élément fécond pour la conceptualisation des notions mathématiques.

Dans tous les textes institutionnels étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais la logique mathématique n'est une référence pour cet apprentissage que durant la période des mathématiques modernes (1969-1981), et, à un degré moindre, depuis 1999. Nous pouvons donc parler, dans ces deux périodes, de deux niches pour la logique, qui correspondent aux deux piliers déterminés dans l'étude épistémologique : une *niche raisonnement* et une *niche langage*. Ces deux niches sont bien sûr imbriquées : le raisonnement se communique à travers le langage, le langage structure le raisonnement, dans l'organisation d'un texte de démonstration, mais aussi dans l'organisation de la pensée. Dans la période des mathématiques modernes, l'ancrage dans la niche langage est plus fortement affirmé : la formalisation du langage mathématique est vue comme bénéfique, structurante pour l'activité mathématique, et la logique donne les bases d'utilisation d'un langage formalisé beaucoup plus largement utilisé au lycée qu'aujourd'hui.

Dans ces deux périodes nous pouvons également parler d'un *habitat flou* pour la logique : elle doit être présente partout, son étude accompagne celle des notions vues dans les autres chapitres. Il y a cependant une différence notable sur ce point entre les deux périodes : pendant la période des mathématiques modernes, un chapitre spécifique était consacré à la logique, dans le but de poser des bases qui seraient ensuite réinvesties à de multiples occasions, mais où les notions de logique étaient tout de même abordées dans leur dimension objet. Dans le programme pour la classe de Seconde de 2009, il est précisé qu'il ne faut pas faire de cours. L'idée de rencontrer d'abord les notions en situation vaut pour toutes les notions dans les programmes actuels, dans lesquels l'accent est mis sur l'entrée par la résolution de problèmes. Mais pour les notions de logique, celles-ci ayant été absentes des programmes entre 1981 et 2009, il y a peu de ressources proposant de telles situations d'introduction. D'où peut-être la crainte des auteurs des programmes, qui pourrait expliquer qu'ils insistent sur ce point concernant la logique, que les professeurs se réfèrent à ce qui se faisait à l'époque des mathématiques modernes. Le travail suggéré par le programme sur les notions de logique ne les aborde alors que dans leur dimension outil.

L'étude de documents accompagnant les programmes de 1969 et de 2009 montre que, si les deux programmes mentionnent à peu près les mêmes notions de logique à étudier, les approches sont très différentes, notamment dans la façon dont la logique mathématique est prise comme référence. Dans la période des mathématiques modernes, le *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* de 1970 propose un très synthétique cours de logique mathématique, en précisant que ce qui est exposé est surtout à visée de formation des professeurs plutôt que directement destiné aux élèves. La proposition est la première notion présentée, et l'aspect syntaxique des connecteurs et des quantificateurs est présent, le but étant vraiment de décrire les principes de la construction du langage mathématique. L'aspect syntaxique est articulé avec l'aspect sémantique qui relève plus de l'utilisation de ce langage dans l'activité mathématique. La complexité épistémologique de l'implication est prise en compte, mais essentiellement d'un point de vue logique, et non en lien avec des pratiques langagières (implication entre deux propositions et implication universellement quantifiée sont ainsi distinguées, mais rien n'est dit sur la pratique de quantification universelle implicite). D'une façon générale, l'exposé n'est pas relié à l'activité mathématique, le commentaire de 1970 ne donne pas d'exemples d'activités faisant intervenir des notions de logique.

À l'inverse, le document ressource *Notations et raisonnement mathématiques* de 2009 propose une série d'exercices sur les notions de logique au programme, mais aucune considération théorique sur ces notions. Il n'est ainsi pas question de les présenter, ni pour les élèves, ni même pour les professeurs, à partir de l'approche de la logique mathématique.

Plusieurs signes de la complexité de l'expression de ces notions de logique dans le discours mathématiques sont relevés (quantifications implicites, sens des mots « et », « ou », « un », principe du maximum d'information), sous l'angle des différences à souligner entre le langage courant et le langage mathématique, semblant ainsi opposer ces deux langages qui sont pourtant présents dans l'activité mathématique. Nous avons vu dans la deuxième partie de la thèse comment la logique mathématique pouvait être une référence pour expliquer ces points complexes. Dans le document ressource, ils sont simplement soulignés, aucune explication n'est donnée.

Pour cette étude des programmes, nous avons regardé le savoir à enseigner comme produit auquel aboutit la transposition didactique externe, en soulignant les choix fait par les auteurs et en les situant par rapport à la référence proposée dans la deuxième partie. Revenons maintenant à la caractérisation du savoir à enseigner proposée par G. Arsac (voir citation page 175) : « ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner ». Dans cette optique, le savoir à enseigner est vu plutôt comme le point de départ de la transposition didactique interne, qui aboutit au savoir enseigné. Bien sûr, les enseignants se réfèrent aux programmes pour préparer leurs cours, mais ils consultent également d'autres ressources. Parmi celles-ci, les manuels ont une place importante, peut-être particulièrement dans ce contexte de nouveauté pour les notions de logique. J'en propose l'analyse dans le chapitre suivant. Je les regarde notamment du point de vue de l'interprétation des programmes. Pour les manuels de 1969, nous avons vu qu'il y avait dans le programme une référence claire à la logique mathématique, et nous pouvons faire l'hypothèse d'une certaine uniformité dans ce qui est proposé. L'étude de quelques manuels de cette époque est surtout intéressante en comparaison avec les manuels actuels, et parce qu'elle nous renseigne sur ce qui a pu être enseigné alors. Avec l'étude des manuels actuels, je cherche à mesurer les effets de l'absence de référence claire à la logique mathématique dans le programme de 2009.

Chapitre 6

Analyse des manuels

Sommaire

L'étude des programmes nous a permis de voir les grandes lignes des instructions officielles concernant l'enseignement de notions de logique. À partir de ces grandes lignes, les auteurs des manuels scolaires, par ailleurs soumis à des contraintes d'écriture, vont proposer une matière plus directement utilisable par l'enseignant, comme le souligne L. Ravel dans sa thèse [1] :

> Ces grandes lignes sont ensuite mises en texte dans les manuels scolaires. Les auteurs de manuels, sujets de l'institution scolaire, vont apprêter les objets de savoir à enseigner afin de les rendre "utilisables" par les enseignants et les élèves. [...] Ils vont donc faire des choix pour mettre en texte les directives du programme et proposer à leurs sujets des activités préparatoires, un cours et des exercices. Ils vont alors construire des organisations mathématiques autour de ces objets de savoir pour pouvoir les mettre en place. (Ravel, 2003, pp. 39-40)

L'étude des manuels, dans laquelle je porterai une attention particulière à la conception de la logique et de son lien avec les mathématiques, est guidée par les questions suivantes :

– quel investissement de la niche langage ? de la niche raisonnement ?
– Les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique sont-ils présents tous les deux ?
– Quelle position prise par rapport à la formalisation des notions ?
– Comment sont pris en compte les points sensibles identifiés dans la deuxième partie de la thèse ?
– L'organisation des activités permet-elle que la logique soit effectivement « présente partout » ?

Elle se fera en deux temps :

– tout d'abord une étude des « pages logiques » des manuels, c'est-à-dire des pages où sont présentées les notions de logique. Pour cette étude, j'ai choisi de regarder l'ensemble des manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010, ainsi que 3 manuels de Seconde publiés en 1969 (nous avons vu que nous pouvions faire l'hypothèse d'une certaine homogénéité dans les manuels de 1969, qui fait qu'il n'est pas nécessaire de proposer une étude de tous les manuels de cette époque ; ceux choisis étaient d'ailleurs très largement utilisés). Pendant la période des mathématiques modernes, la logique avait une place importante, et pouvoir comparer ce qui est proposé aujourd'hui et ce qui a été proposé à cette époque permet de mieux identifier les particularités actuelles en les mettant en parallèle avec d'autres choix faits dans un autre contexte. Je commencerai par une description globale de la présentation des notions dans les pages logiques, puis je proposerai une étude notion par notion.

1. Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique.

– Ensuite une étude des tâches proposées dans les manuels actuels, complément indispensable de l'étude des pages logiques car c'est dans la résolution des tâches que sont construites ou utilisées les connaissances. Je ne proposerai pas d'étude complète des praxéologies. L'étude des types de tâches, qui donne un panorama des exercices, me suffit pour répondre aux questions listées ci-dessus.

La liste des manuels utilisés est donnée page 438. Dans ce chapitre, chaque manuel est appelé par son nom, noté en italique.

6.1 Analyse des pages « Logique » des manuels de Seconde

6.1.1 Présentation de l'organisation des pages consacrées à la logique dans les manuels de 1969 et de 2010

Les sommaires des pages concernant la logique sont donnés pour chaque manuel en annexe page 521.

Dans les manuels de 1969

Conformément au programme, les trois manuels de 1969 analysés traitent des notions de logique à part, dans un premier chapitre. *Queysanne-Revuz* justifie ainsi de commencer par là :

> À partir de résultats considérés comme acquis le **raisonnement mathématique** permet d'en démontrer d'autres. Ce raisonnement s'effectue à l'aide de certaines règles que vous utilisez consciemment ou non depuis plusieurs années et qui sont les **règles de la logique.** Il nous faut donc commencer, en utilisant des exemples mathématiques que vous connaissez, par mettre en évidence certaines de ces règles.

Queysanne-Revuz est le plus complet et le plus rigoureux. Il présente les notions de logique en lien avec l'activité mathématique, elles sont illustrées par de nombreux exemples, et des commentaires relevant de la logique sont présents en dehors de ce chapitre.

Aleph 0 propose une introduction plus axée sur le langage, qui n'est pas sans rappeler certaines préoccupations de Frege. Mais s'il met en garde contre les ambiguïtés du langage courant, il n'en défend pas pour autant un symbolisme total :

> L'étude d'un problème de Mathématiques nécessite une réflexion, préalable à toute recherche, sur le contenu de l'énoncé. Il convient d'abord de discerner avec précision quelle est la question posée, puis quels sont les renseignements qui permettront d'aborder le problème. Ensuite, il conviendra de mettre en jeu

> un certain nombre de mécanismes de déduction qui permettront de démontrer le résultat cherché à partir des hypothèses données.
>
> Ces renseignements sont donnés à l'aide de mots, et, en Mathématiques, on emploie des mots techniques que l'on a soigneusement définis comme *exposant, proportion, bissectrice,* etc., et des mots ou expressions du langage courant. [...]
>
> Mais les mots du langage courant présentent souvent des ambiguïtés ou des obscurités. Ainsi, dans le proverbe « un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire », le premier article *un* veut dire un [sot] *quel qu'il soit* (et non pas *un seul* sot, ni *un certain* sot) ; on pourrait remplacer cet article par l'adjectif indéfini *tout.* Le second article *un* signifie *au moins un* (pas nécessairement *un seul*, mais pas *n'importe lequel.*
>
> En Mathématiques, il convient de distinguer entre ces acceptions de l'article *un* et, plus généralement, entre les diverses significations des mots-outils.
>
> Pour éviter ces ambiguïtés et obscurités du langage courant, on précise la rédaction des raisonnements à l'aide de quelques symboles et termes logiques spécialisés.

Ce manuel a une approche beaucoup moins formelle de la logique (nous n'y trouvons pas les tables de vérité, par exemple), ici aussi mise en relation avec l'activité mathématique globale. Par contre, la logique est cantonnée à ce chapitre initial.

Lespinard, quant à lui, donne l'impression de suivre le programme à la lettre, sans qu'il y ait de réflexion sur les enjeux de la présence de ces notions dans ce programme. La logique y est moins reliée au reste des mathématiques.

Dans les trois manuels est d'abord présentée la notion de proposition. Ils proposent également une étude de tous les connecteurs, et des quantificateurs. Ils présentent les notions ensemblistes en lien avec ces notions, à travers l'association entre une proposition contenant une variable libre et l'ensemble des éléments d'un ensemble E vérifiant cette proposition. *Queysanne-Revuz* et *Aleph 0* parlent également de divers types de raisonnement.

Dans les manuels de 2010

La plupart des manuels de 2010 (sauf *Pixel*) ont choisi de consacrer quelques pages aux notions de logique, mais pas comme un chapitre (ils font de même pour l'algorithmique apparue également dans ces programmes), au début ou à la fin du manuel, ou de manière disséminée. Le tableau de la page suivante résume les caractéristiques pour chaque manuel.

Manuel	Titre des pages consacrées aux notions de logique	Combien et où	Avec les notions sur les ensembles	Traitent des connecteur ET et OU	Traitent de la négation	Traitent de l'implication	Traitent des quantificateurs	Traitent des différents types de raisonnement
Transmath	Le vocabulaire de la logique	6 pages à la fin	NON	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Math'x	Raisonnement logique	4 pages à la fin + 1 page d'exercices	OUI, mais deux titres différents	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Hyperbole	Vocabulaire de la logique	4 pages à la fin	NON	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Symbole	Notations et raisonnement	4 pages à la fin	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Indice	Ensembles - Raisonnement logique	6 pages au début + 1 page d'exercices	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	NON
Odyssée	Le raisonnement logique	3 pages au début	NON	OUI	NON	OUI	OUI	OUI
Travailler en confiance	Notations et raisonnements mathématiques	9 pages au début	OUI	NON	OUI	OUI	OUI	OUI
Repères	Pages raisonnement et logique	8 pages disséminées	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Déclic	Notations et logique	1 page à la fin	OUI	OUI	NON	NON	NON	NON

Nous voyons que le mot « logique » apparaît dans presque tous les titres, hormis dans deux manuels qui reprennent le titre « Notations et raisonnement mathématiques » du tableau des objectifs du programme (voir page 200). Les manuels se démarquent ainsi du programme qui ne mentionnait pas la logique dans un titre de paragraphe, mais seulement dans le corps du texte.

Tous les manuels ne traitent pas de toutes les notions, qui sont pourtant toutes présentes dans le tableau des objectifs.

La lecture de ce tableau montre déjà des différences d'un manuel à l'autre qui seront précisées avec une analyse plus fine.

6.1.2 Proposition et variable

Proposition et variable dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Les manuels de 1969 commencent effectivement tous leurs pages consacrées à la logique par une définition de la notion de proposition, mais il n'y a pas accord sur cette définition :

– *Lespinard* appelle *assertion* un « énoncé tel qu'il soit possible de dire s'il est vrai ou s'il est faux », puis « proposition » un énoncé qui « peut être vrai dans certains cas, faux dans d'autres ». Ainsi, « une assertion est une proposition **toujours** vraie ou **toujours** fausse. »
– *Queysanne-Revuz* fait cette même disctinction [2]. Il commence par définir les notions de « termes » et « énoncés » comme des assemblages cohérents (auxquels on peut donner un sens mathématique) de mots du langage courant et de signes mathématiques. Puis plus loin il appelle « **assertion** tout énoncé pour lequel on répondra sans ambiguïté et sans renseignement complémentaire à la question *est-il vrai ou bien est-il faux ?* » Un énoncé tel que $x < 2$ n'est ainsi pas une assertion. Il est dit que « les logiciens appellent un tel énoncé un **prédicat** ou une **fonction propositionnelle** ; il nous arrivera de dire **proposition** à la place de fonction propositionnelle, bien que certains emploient proposition avec le sens que nous avons donné au mot assertion »
– *Aleph 0* appelle « **proposition** tout affirmation concernant un ou plusieurs objets. Une telle affirmation peut avoir ou non une signification. » Dans les exemples, il y a une proposition contenant des variables libres. Plus loin, il est précisé qu'« une proposition peut être **vraie** ou **fausse** selon les objets auxquels elle s'applique, et selon la théorie dans laquelle elle s'insère. »

2. Il ne s'agit pas de la distinction proposition/assertion que j'ai faite dans la deuxième partie de la thèse, voir page 112, mais de la distinction entre propositions closes (ce que ces manuels appellent *assertion*), et propositions ouvertes, voir page 114 (ce que ces manuels appellent *proposition*).

Aucun des trois manuels ne se contentent de parler des propositions closes, c'est-à-dire sans variables, ou dans lesquelles les variables sont mutifiées. Seul *Queysanne-Revuz* parle des variables, qui sont « des lettres qui représentent des objets à la place de chacun desquels on peut substituer un symbole représentant un objet spécifié ». Mais même si ces manuels n'évoquent pas la distinction entre variable parlante et variable muette, des exemples de propositions sont donnés pour les deux cas. Ces manuels ancrent ainsi l'étude de la logique dans l'étude du fonctionnement du langage mathématique : la proposition, élément de base de ce langage, est posée avant toute chose.

Proposition et variable dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Les cases vides des tableaux récapitulatifs ci-après le montrent bien : les notions de proposition et de variable sont quasiment absentes des manuels actuels. Seuls quatre manuels (*Math'x, Hyperbole, Symbole, Transmath*) définissent la proposition : c'est une phrase qui est soit vraie, soit fausse. Et seuls *Math'x* et *Hyperbole* utilisent le terme « variable ». Nous ne trouvons une proposition ouverte que dans *Math'x*, qui donne « $x > y$ » comme exemple de proposition, en précisant qu'elle « dépend de variables », et est « vraie ou fausse selon les valeurs données à ces variables, jamais vraie et fausse en même temps. » Cela montre qu'à la différence de 1969, l'étude du fonctionnement du langage mathématique n'est pas un objectif visé.

Tableaux récapitulatifs de l'analyse sur proposition et variable

Dans les tableaux récapitulatifs, un OUI signale un aspect présent dans le manuel, une case vide signale une absence.

Pour la notion de variable : J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique
  (1) Caractérisation du statut libre ou liée d'une variable dû à la présence d'un signe mutificateur.
  (2) La variable comme marque-place dans une proposition

– Aspect sémantique
  (1) Notion de substitution d'un objet déterminé à la variable
  (2) La variable comme représentant d'un élément quelconque d'un ensemble
  (3) Pas de valeur de vérité déterminée pour une proposition comportant des variables libres, elle dépend des valeurs attribuées aux variables
  (4) distinction entre le statut libre et liée d'une variable selon la dépendance ou l'indépendance de la valeur de vérité de la proposition par rapport à cette variable

	Dimension syntaxique		Dimension sémantique			
	1 : statut de la variable	2 : marque-place	1 : Substitution	2 : représentant un élément quelconque	3 : pas de valeur de vérité déterminée s'il y a des variables libres	4 : statut des variables selon la dépendance de la valeur de vérité
Aleph0					OUI*	
Queysanne Revuz	OUI**	OUI	OUI	OUI	OUI	
Lespinard					OUI ***	
Déclic						
Hyperbole						
Indice						
Math'x					OUI	
Odyssée						
Pixel						
Repères						
Symbole						
Transmath						
Travailler en confiance						

* Parle des « objets », pas des « variables », ** statut de variable muette quand elle est dans le champ d'un quantificateur, *** Sans utiliser le terme « variable », par des exemples.

Pour la notion de proposition : J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique de cette notion ou de l'aspect sémantique :

– Aspect syntaxique :
  (1) Une proposition est un assemblage de signes bien formé (respectant certaines règles syntaxiques)
  (2) Utilisation de variables propositionnelles pour identifier la structure logique des propositions
– Aspect sémantique :
  (1) Une proposition a une valeur de vérité vraie ou fausse (éventuellement distinction entre proposition close et proposition ouverte)
  (2) Si le terme « proposition » n'est pas ou peu employé, termes synonymes employés
  (3) Lien avec les ensembles par la définition en compréhension de l'ensemble des éléments vérifiant $P[x]$

	Dimension syntaxique		Dimension sémantique		
	1 : assemblage de signes	2 : utilisation de variables propsitionnelles	1 : a une valeur de vérité	2 : synonymes	3 : lien avec les ensembles
Aleph0		OUI	OUI		OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI		OUI
Lespinard		OUI	OUI		OUI
Déclic				affirmation, énoncé	
Hyperbole		OUI	OUI		
Indice		OUI *		phrase, énoncé	
Math'x		OUI	OUI		
Odyssée		OUI**		phrase, propriété	
Pixel		OUI (une fois)		affirmation	
Repères		OUI			
Symbole		OUI	OUI		
Transmath		OUI	OUI		
Travailler en confiance		OUI			

* Seulement dans les paragraphes sur l'implication et la négation. ** Seulement dans le paragraphe sur l'implication.

6.1.3 Connecteurs ET et OU

Les connecteurs ET et OU dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Seul *Queysanne-Revuz* présente la notion générale de connecteur, sous ses deux aspects syntaxique et sémantique :

> Considérons simultanément une assertion p et une assertion q, nous allons leur associer d'autres assertions dont la valeur logique (V ou F) est liée à celle de p et à celle de q.
>
> Ce procédé est appelé un **connecteur logique** à *deux places*.

Les trois manuels de 1969, *Queysanne-Revuz, Aleph 0* et *Lespinard* proposent chacun deux sections, l'une intitulée « conjonction » sur le connecteur ET, l'autre intitulée « disjonction » sur le connecteur OU. Dans la présentation de *Queysanne-Revuz* et *Lespinard* les deux aspects syntaxique et sémantique sont présents et imbriqués : il y a l'idée d'obtention d'une nouvelle proposition à partir de deux propositions données, et la détermination de la valeur de vérité de la proposition ainsi obtenue en fonction des valeurs de vérité des propositions qui la composent, récapitulée dans une table de vérité. Par exemple dans *Queysanne-Revuz* nous trouvons la définition suivante :

> On appelle **conjonction** de l'assertion p et de l'assertion q l'assertion notée *(p et q)* vraie uniquement si p et q le sont.

Ces deux aspects syntaxique et sémantique sont également présents dans *Aleph 0*, mais sans table de vérité[3].

Concernant la conjonction, *Lespinard* et *Aleph 0* font un lien avec le « et » du langage courant, le premier en donnant un exemple situé dans un contexte de vie courante, le deuxième en disant explicitement que la notion de conjonction ainsi définie « coïncide parfaitement avec le sens intuitif attribué à la conjonction **"et"** ». *Queysanne-Revuz* et *Lespinard* évoquent des propriétés de la conjonction : commutativité et associativité dans le premier, principe de non-contradiction (quelle que soit la proposition P, la proposition (P ET NON P) est fausse) dans les deux.

Concernant la disjonction, les trois manuels distinguent à partir d'exemples situés dans un contexte de vie courante un sens inclusif et un sens exclusif du mot « ou ». *Queysanne-Revuz* et *Lespinard* précisent qu'en mathématiques, le « ou » est toujours utilisé dans le sens inclusif. *Queysanne-Revuz* évoque aussi les propriétés de commutativité et d'associativité de la disjonction.

3. Notons que dans le manuel d'analyse de 1973 de la collection Aleph 1 chez le même éditeur que la collection Aleph 0, les tables de vérité des connecteurs ET et OU sont données.

Les lois de Morgan (négation d'une conjonction, d'une disjonction), sont proposées en exercice dans *Lespinard*. *Aleph 0* les évoque en donnant des exemples. *Queysanne-Revuz* les donne dans une section *Lois logiques* qui suit les sections sur les connecteurs logiques, et où figurent aussi les propriétés de distributivité des connecteurs ET et OU l'un par rapport à l'autre.

Les connecteurs ET et OU dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Parmi les manuels de 2010, seuls *Hyperbole* et *Symbole* utilisent les termes « conjonction » et « disjonction ». *Symbole* est le seul à présenter les connecteurs ET et OU en écrivant explicitement une définition :

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

FIGURE 6.1 – Connecteurs ET et OU dans le manuel Symbole

Je voudrais souligner ici le manque de rigueur dans les exemples donnés. Alors que le manuel s'applique à définir la conjonction et la disjonction de deux propositions, ce qui est donné en exemple mélange allègrement proposition (« le triangle ABC est rectangle et isocèle »), prédicat (« être rectangle », qui n'est pas une proposition), et adjectif (« isocèle », qui n'en est pas une non plus).

La présentation dans *Hyperbole* est très semblable, mais l'appellation « définition » n'est pas utilisée. La différence n'est peut-être pas anodine dans la mesure où les indications du programme, ainsi que l'éventuelle crainte d'un formalisme comme celui qui avait cours pendant les mathématiques modernes, agissent comme pressions fortes pour que les notions de logique ne soient pas présentées comme dans un cours, format auquel peut faire penser le fait d'utiliser des définitions. Dans ces présentations, l'utilisation des termes « conjonction » et « disjonction » m'amène à considérer que l'aspect syntaxique de construction d'une nouvelle proposition est présent.

Dans deux autres manuels, *Repères* et *Math'x*, cet aspect syntaxique de construction d'une nouvelle proposition n'est pas présent, on y trouve seulement l'aspect sémantique de comportement par rapport aux valeurs de vérité. Par exemple, dans *Math'x* :

En mathématiques, « **OU** » et « **ET** » ont des significations très précises !
« *A* ET *B* » est vraie quand *A* et *B* sont toutes les deux vraies et uniquement dans ce cas.
« *A* OU *B* » est vraie quand au moins l'une des deux est vraie (l'une ou l'autre, voire les deux)

FIGURE 6.2 – Connecteurs ET et OU dans le manuel Math'x

Notons que ce manuel est le seul à utiliser une typographie différente pour les connecteurs logiques ET et OU qu'il note en majuscule, ce qui permet de les identifier. Dans ces quatre manuels, des lettres majuscules sont utilisées pour désigner les propositions. Cette présentation est finalement assez proche de la présentation dans les manuels de 1969. Mais aucun manuel de 2010 ne donne de table de vérité, celles-ci ne constituant pourtant qu'une manière de récapituler le comportement par rapport aux valeurs de vérité. Cette absence est sans doute liée ici aussi aux contraintes du programme de ne pas être trop formel, comme si les tables de vérité étaient un ostensif symbole d'un trop grand formalisme. Je qualifierai cette présentation de « propositionnelle ».

Trois autres manuels, *Indice, Odyssée, Transmath*, présentent les connecteurs ET et OU en occultant l'aspect syntaxique. Ils situent seulement le sens des mots « et » et « ou » en mathématiques par rapport à leur sens dans le langage usuel. Par exemple dans *Indice* :

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

- Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :
- « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
- « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :
- « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.
- « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

- On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».
Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».
Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)
« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)
La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

FIGURE 6.3 – Connecteurs ET et OU dans le manuel Indice

Je qualifierai cette présentation de « naturelle » dans le sens où elle ne distingue pas du tout l'aspect syntaxique spécifique des connecteurs, c'est-à-dire ne prend pas en compte un objet « connecteur ». Il n'y a pas d'idée de construction d'un langage mathématique. On se contente de donner les précisions nécessaire pour garantir l'univocité du sens des mots employés. Remarquons que, dans l'extrait ci-dessus, les exemples donnés servent à illustrer le comportement par rapport aux valeurs de vérité. Mais toute la dimension qui concerne la structure des propositions est implicite. La mise en facteur dans la proposition « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3 » est passée sous silence, et les auteurs la présentent sans souci d'explication comme conjonction des deux propositions « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 ». Admettons qu'ici cela ne présente pas une difficulté majeure pour les élèves de reconstituer ces deux propositions. Mais il n'en va pas de même pour la proposition $(*)$ « 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3 ». Ici, il y a utilisation de virgules à la place de conjonctions « et », ce qui est regrettable dans un paragraphe consacré au connecteurs ET et OU. Par ailleurs, il y a une ambiguïté sur la lecture possible de cette proposition. D'une part comme :

Proposition 1 :

(0 est un nombre pair OU 0 est un multiple de 3)

ET (2 est un nombre pair OU 2 est un multiple de 3)

ET (3 est un nombre pair OU 3 est un multiple de 3)

ET (6 est un nombre pair OU 6 est un multiple de 3)

et d'autre part comme :

Proposition 2 :

(0 est un nombre pair ET 2 est un nombre pair ET 3 est un nombre pair ET 6 est un nombre pair)

OU

(0 est un multiple de 3 ET 2 est un multiple de 3 ET 3 est un multiple de 3 ET 6 est un multiple de 3)

Ces propositions ne sont pas équivalentes : la proposition 1 est vraie, la proposition 2 est fausse. Rien ne permet de dire qu'une lecture est plus correcte que l'autre, même si dans la pratique c'est très majoritairement comme équivalente à la proposition 1 que la proposition $(*)$ va être lue.

Pixel et *Travailler en confiance* n'abordent que le fait que le « ou » a un caractère inclusif en mathématiques, le premier dans le cadre d'un exercice corrigé, le deuxième à l'occasion d'une section *Logique mathématique et logique du langage courant* qui clôt les pages *Notations et raisonnements mathématiques*.

Enfin, *Déclic* propose dans son unique page consacrée à *Notations et logique* un très court descriptif :

> "et" entre deux propositions, deux événements : les deux doivent être simultanément vraies ; les événements réalisés tous les deux.
>
> "ou" entre deux propositions, deux événements : au moins l'un(e) des propositions, des événements (et peut-être les deux) doit être vraie (réalisé).

Je considère que cet extrait veut donner le comportement par rapport aux valeurs de vérité des connecteurs ET et OU, même si cela est fait de manière très ambiguë, en mélangeant propositions et événements, c'est-à-dire propositions et ensembles. Par ailleurs, il y a un écrasement entre les propositions et l'affirmation de leur vérité : les propositions « doivent »prendre une certaine valeur de vérité, sous-entendu pour que la disjonction ou la conjonction soit vraie.

La relation avec intersection et réunion donne aussi lieu à deux approches. Dans certains manuels, le lien est explicite. Par exemple, *Math'x* dit que :

> Du point de vue des **ensembles** :
> – ET est associé à l'intersection : « $x \in I$ ET $x \in J$ » signifie « $x \in I \cap J$ »
> – OU est associé à la réunion : « $x \in I$ OU $x \in J$ » signifie « $x \in I \cup J$ »

D'autres manuels associent intersection et réunion aux termes « et », « ou », mais pas vraiment aux connecteurs, comme par exemple *Déclic* dans lequel ces mots ne sont pas placés entre deux propositions :

> – **L'intersection de** I **et** J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I **et** à J.
> – **La réunion de** I **et** J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des éléments appartenant à I **ou** à J.

Tableau récapitulatif de l'analyse sur les connecteurs ET et OU

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :

(1) Ces connecteurs permettent de construire, à partir de deux propositions, une nouvelle proposition

(2) Lois de Morgan [4]

(3) Lois de distributivité

– Aspect sémantique :

(1) Comportement par rapport aux valeurs de vérité

(2) Lien avec les ensembles : intersection et réunion (indiqué seulement quand il est vraiment explicite)

(3) Commentaires sur les similitudes et les différences avec l'utilisation des termes « et » et « ou » dans le langage courant (je précise quand cela ne concerne que le caractère inclusif du connecteur OU)

4. Dans ces tableaux récapitulatifs sur les connecteurs et les quantificateurs, je classe le fait de donner des règles qui énoncent l'équivalence de certaines propositions comme un aspect syntaxique. En effet, bien que justifiées de façon sémantique, je veux souligner que de telles règles permettent ensuite une manipulation des propositions indépendante de leur sens.

	Dimension syntaxique			Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Lois de Morgan	Distributivité	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Lien avec intersection et réunion	Commentaires sur similitudes et différences avec le langage courant
Aleph0	OUI	OUI*		OUI	OUI	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI (ou inclusif)
Lespinard	OUI	OUI**		OUI	OUI	OUI (ou inclusif)
Déclic				OUI		
Hyperbole	OUI	OUI***		OUI		OUI
Indice					OUI	OUI
Math'x		OUI		OUI	OUI	OUI
Odyssée					OUI	OUI****
Pixel						OUI (ou inclusif)
Repères				OUI	OUI	OUI
Symbole	OUI			OUI		
Transmath		OUI			OUI	OUI
Travailler en confiance						OUI (ou inclusif)

* Avec des exemples, ** En exercice, *** En préambule d'un exercice

6.1.4 Négation

La négation dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Les trois manuels de 1969 ont une présentation très différente de la notion de négation :

– Dans *Queysanne-Revuz*, la négation est présentée comme un connecteur, sous les deux aspects syntaxique et sémantique : « à toute assertion p nous pouvons associer une nouvelle assertion appelée **négation** de p qui s'écrit *(non p)* et qui est *fausse* quand p est *vraie* et *vraie* si p est *fausse.* » La table de vérité est ensuite donnée, puis deux exemples qui sont commentés par ce qui peut s'apparenter à des règles de formation de la négation de propositions élémentaires (ne comportant qu'une relation) :

> 1. La négation de l'assertion vraie « $4 = 2 + 2$ » est l'assertion fausse « $4 \neq 2 + 2$ »
>
> 2. La négation de l'assertion fausse « $5 < 3$ » est l'assertion vraie « $5 \geqslant 3$ »
>
> Comme dans le premier exemple ci-dessus si l'assertion p s'écrit avec un certain signe (ici $=$) la négation de p s'obtient en remplaçant ce signe par le même signe barré (ici $\neq$) ; nous en verrons des exemples ($\in$ et $\notin$).
>
> Il peut arriver comme dans le deuxième exemple ci-dessus qu'au signe utilisé par p (ici $<$) soit associé un signe pour la négation de p (ici $\geqslant$).

Plusieurs lois logiques associées à la négation sont données : équivalence entre p et *non*(*non p*), tiers-exclu, principe de non-contradiction. Le lien avec le complémentaire est fait :

> Et si $\mathscr{A}$ est une propriété caractéristique de la partie A de E on a :
>
> $$\complement_E A = \{x \in E \mid \text{non}\mathscr{A}(x)\}$$

– *Aleph 0* donne une définition pour le moins compliquée tout en disant qu'elle correspond à l'idée intuitive de négation :

> Soit une proposition P ne faisant pas intervenir plusieurs objets simultanément (une telle proposition sera appelée *proposition simple*). Les objets qui rendent P *fausse* sont, par définition, les objets qui rendent vraie la proposition *nonP* (que nous noterons $\overline{P}$). Nous n'insisterons pas sur cette première opération logique qui coïncide avec la notion intuitive de négation d'une propriété, et dont une propriété est :
>
> *La négation de la négation de P ($\overline{\overline{P}}$) coïncide avec P.*

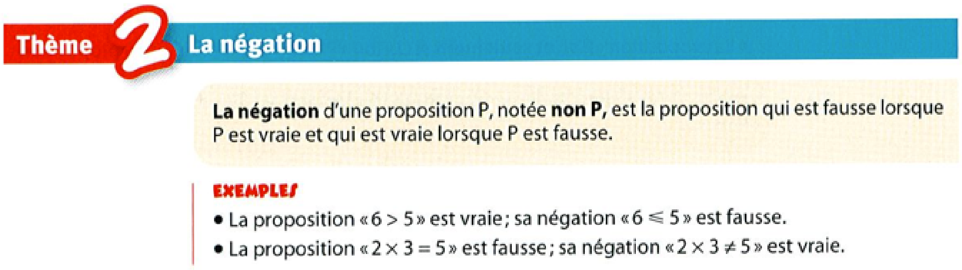
– *Lespinard* donne aussi un définition étrange dans laquelle l'aspect syntaxique ne vient qu'après une sémantique incomplète :

> Si nous voulons exprimer que la proposition p est fausse, on écrit « non p », ou $\neg p$. $\neg$ est le symbole de la négation. On dit que « non p » est la **négation** de la proposition p.

La négation dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

La plupart des manuels donnent comme caractéristique de la négation d'une proposition son comportement par rapport aux valeurs de vérité, et notent « non P » cette négation (seul *Math'x* parle de « négation de P »). Plusieurs d'entre eux utilisent le terme « contraire » associé à la négation. Nous avons pourtant vu une distinction entre ces deux notions (voir page 125), dont la confusion pouvait être à l'origine d'erreurs d'élèves.

C'est essentiellement dans les exemples qui illustrent la notion que les manuels diffèrent. Par exemple, dans *Hyperbole* :



Thème 2 La négation

La négation d'une proposition P, notée **non P,** est la proposition qui est fausse lorsque P est vraie et qui est vraie lorsque P est fausse.

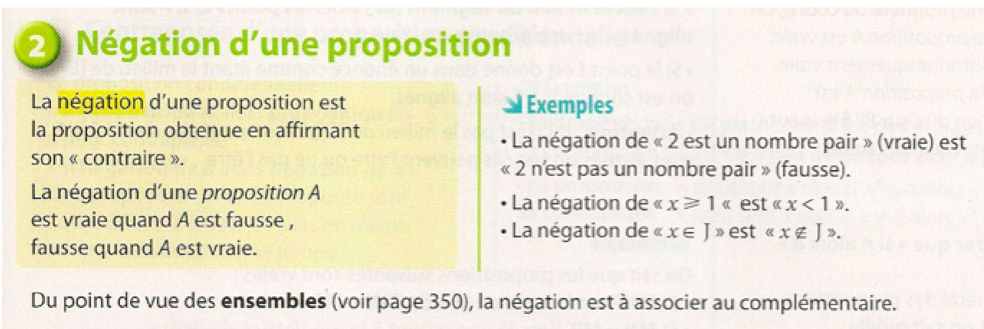
EXEMPLES

- La proposition « $6 > 5$ » est vraie ; sa négation « $6 \leqslant 5$ » est fausse.
- La proposition « $2 \times 3 = 5$ » est fausse ; sa négation « $2 \times 3 \neq 5$ » est vraie.

FIGURE 6.4 – Négation dans le manuel Hyperbole

Dans la définition donnée ici, il est implicitement dit que chaque proposition ne possède qu'une négation. Or, si la seule caractéristique de la négation est le comportement par rapport aux valeurs de vérité, alors la négation d'une proposition close vraie pourrait être n'importe quelle proposition close fausse. Ici, les exemples sont dans le domaine mathématique, et ce sont deux propositions closes. Mais en fait, il faut plutôt les voir comme des propositions contenant des variables libres, auxquelles on a attribué des valeurs. Par exemple, le premier exemple concerne la proposition $x > y$ dans laquelle on a attribué la valeur 6 à la variable x et la valeur 5 à la variable y. La négation de cette proposition est $x \leqslant y$, et on obtient la négation de la proposition close en attribuant les mêmes valeurs aux variables libres. Tout ce processus est implicite et si un élève proposait comme négation de la deuxième proposition « $2 \times 3 = 6$ », son professeur serait bien en peine de le contredire avec la seule définition, et sans rendre explicite le processus sous-jacent décrit précédemment.

Math'x donne des exemples de négation de propositions élémentaires :



2 Négation d'une proposition

La négation d'une proposition est la proposition obtenue en affirmant son « contraire ».

La négation d'une *proposition A* est vraie quand *A* est fausse, fausse quand *A* est vraie.

Exemples

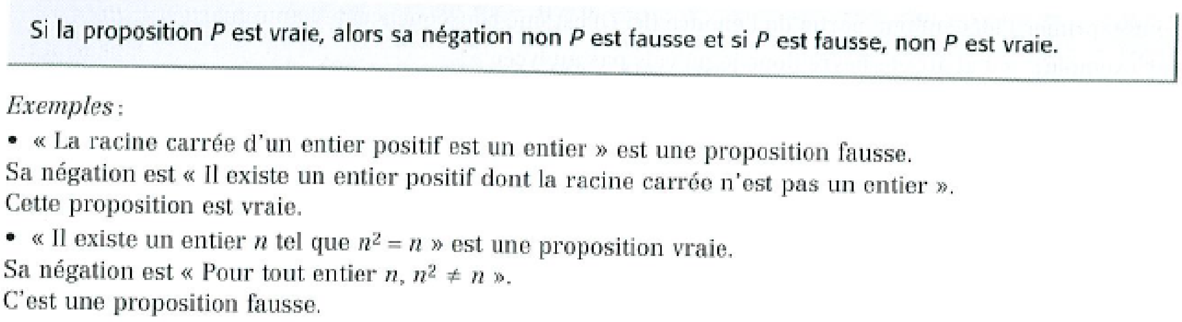
- La négation de « 2 est un nombre pair » (vraie) est « 2 n'est pas un nombre pair » (fausse).
- La négation de « $x \geqslant 1$ « est « $x < 1$ ».
- La négation de « $x \in J$ » est « $x \notin J$ ».

Du point de vue des **ensembles** (voir page 350), la négation est à associer au complémentaire.

FIGURE 6.5 – Négation dans le manuel Math'x

Ici, les propositions ne sont pas toutes closes. Trois cas sont évoqués pour la négation d'une proposition élémentaire :
– la négation est formulée par la langue en utilisant « ne ... pas »
– la négation est formulée de manière symbolique en utilisant un autre symbole adéquat
– la négation est formulée de manière symbolique en utilisant le même symbole barré
Mais les différences ne sont pas commentées, et le fait que ça soit parfois possible de donner plusieurs formulations de la négation n'est pas précisé (on aurait pu pour le premier exemple donner aussi « 2 est impair »).

Indice donne des exemples de négation de propositions closes quantifiées :



Si la proposition P est vraie, alors sa négation non P est fausse et si P est fausse, non P est vraie.

Exemples :
- « La racine carrée d'un entier positif est un entier » est une proposition fausse.
Sa négation est « Il existe un entier positif dont la racine carrée n'est pas un entier ».
Cette proposition est vraie.
- « Il existe un entier n tel que $n^2 = n$ » est une proposition vraie.
Sa négation est « Pour tout entier n, $n^2 \neq n$ ».
C'est une proposition fausse.

FIGURE 6.6 – Négation dans le manuel Indice

Les règles concernant la négation d'énoncés quantifiés doivent sans doute, pour les auteurs, se déduire de cet exemple. Mais il est alors malvenu d'utiliser pour le cas d'un énoncé universellement quantifié une proposition dans laquelle la quantification est implicite !

Nous avons vu que les lois de Morgan étaient données dans deux manuels, *Math'x* et *Transmath*. Les règles concernant la négation de propositions quantifiées sont évoquées plus ou moins précisément dans trois manuels, *Pixel, Odyssée* et *Transmath*, nous le verrons dans la partie sur les quantificateurs.

Le lien avec le complémentaire d'un ensemble n'est vraiment explicite que dans *Indice* : « si les éléments d'un sous-ensemble A d'un ensemble E sont caractérisés par la propriété P, les éléments de $\overline{A}$ sont caractérisés par la propriété non$P$. » Dans *Math'x* et *Repères*, le lien est évoqué, mais moins explicitement.

Tableau récapitulatif de l'analyse sur négation

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :

(1) Ce connecteur permet de construire, à partir d'une proposition, une nouvelle proposition

(2) Règles de « fabrication » de la négation d'une proposition élémentaire (symbole de relation barré ou autre symbole exprimant la négation du symbole initial) [5]

– Aspect sémantique :

(1) Comportement par rapport aux valeurs de vérité

(2) Principe du tiers-exclu (P OU NON P)

(3) Principe de non-contradiction (NON(P ET NON P))

(4) Équivalence entre NON(NON P) et P

(5) Lien avec les ensembles : complémentaire

5. La présence ou non des lois de Morgan figure dans le tableau sur les connecteurs ET et OU, la présence des règles concernant négation et quantificateurs sera vue dans le tableau sur les quantificateurs.

	Dimension syntaxique		Dimension sémantique				
	Permet de construire une nouvelle proposition	« Règles de fabrication » de la négation	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Tiers exclu	Non-contra-diction	Équivalence entre NON-(NON P) et P	Lien avec le complémentaire d'un ensemble
Aleph0	OUI		OUI			OUI	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Lespinard				OUI	OUI	OUI	OUI
Déclic							
Hyperbole			OUI				
Indice			OUI				OUI
Math'x			OUI				OUI*
Odyssée							
Pixel							
Repères							**
Symbole			OUI				
Transmath			OUI				
Travailler en confiance			***				

* : il est juste précisé que « du point de vue des ensembles, la négation est à associer au complémentaire. »

** : la négation est associée à la notion d'événement contraire dans le titre d'un encadré.

*** : la négation d'une proposition « dit le contraire » de cette proposition.

6.1.5 L'implication

L'implication dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Là encore les présentations des trois manuels sont très différentes :

– Dans *Queysanne-Revuz*, l'implication est présentée comme un connecteur, défini par sa table de vérité. Il donne des exemples d'implication entre propositions closes qui n'ont pas de lien sémantique (par exemple « (4 est un nombre premier) $\Rightarrow$ (6 est pair) » ou « (4 est un nombre premier) $\Rightarrow$ (Lyon est la capitale de la France) ») pour montrer que « dans la définition de l'implication logique, considérée seule, il n'y a aucune idée de déduction ». Il fait cependant ensuite le lien avec la déduction en s'appuyant sur les tables de vérité pour conclure :

> Si l'on sait que $(p \Rightarrow q)$ est vraie et si l'on sait que p est vraie, on peut affirmer que q est vraie.
>
> Si l'on sait que $(p \Rightarrow q)$ est vraie et si l'on sait que q est fausse, on peut affirmer que p est fausse.

Puis plus loin :

> Pour démontrer que $p \Rightarrow q$ est vraie il suffit de démontrer que p étant vraie, alors q est vraie.

La forme disjonctive[6] et la transitivité[7] sont ensuite établies.

– *Alpeh 0* propose une approche à partir d'exemples :

> Les opérations précédentes [conjonction et disjonction] faisaient intervenir deux propositions de façon symétrique. Mais il peut se faire que la valeur de vérité attribuée à l'une des deux propositions puisse influer sur le jugement de vérité que l'on peut être amené à émettre sur l'autre.
>
> « S'il pleut sur mon jardin, mon gazon est arrosé »
> « Pour $x = 1$, le nombre $x^2 - 3x + 2$ est nul »
>
> Le simple bon sens pour la première, une vérification pour la seconde, montrent que les phrases précédentes expriment des vérités.
>
> Bien que ces phrases diffèrent par leur contenu, on reconnaît qu'elles sont coulées dans le même moule. Nous écrirons :
>
> Il pleut sur le jardin $\Rightarrow$ le gazon est arrosé
> $$x = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$
>
> Le signe $\Rightarrow$ traduit *une implication au sens courant.*
>
> D'une façon générale, désignons par h et t deux affirmations qui peuvent, selon le cas, se réaliser ou non, être vraies ou fausses.

6. $p \Rightarrow q$ est équivalent à NON(p) OU q.
7. $((p \Rightarrow q \text{ ET } q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ est une tautologie.

> Écrire $h \Rightarrow t$, c'est dire que, quand h se produit (quand h est vrai), t se produit (t est vrai)

L'implication dont il est question ici est en fait l'implication universellement quantifiée, puisqu'il y a l'idée que les valeurs de vérité de la prémisse et de la conclusion peuvent changer.

– La présentation de *Lespinard* est plus proche de celle de *Queysanne-Revuz*. L'implication des propositions p et q y est définie comme étant la disjonction $\neg p$ OU q, la table de vérité est donnée. La possibilité de déduire la vérité de la conclusion à partir de la vérité de l'implication et de la prémisse est également déduite de la table de vérité, et illustrée par l'exemple suivant :

> Considérons l'implication vraie : Les hommes sont mortels. Si nous avons la proposition vraie p : Jean est un homme, on peut en déduire que la proposition q : Jean est mortel, est vraie.

Dans cet exemple, non seulement la formulation n'est pas explicitement une implication, mais en plus il s'agit d'une implication universellement quantifiée. Dans le raisonnement décrit, il n'y a pas seulement l'application du *modus ponens* mais également une instanciation de l'implication universellement quantifiée par l'élément particulier « Jean. » Ce manuel donne aussi des exemples d'implications entre propositions closes sans lien sémantique (« (Paris est en Allemagne) $\Rightarrow$ (4 est un nombre pair) » et « (Paris est en Allemagne) $\Rightarrow$ (4 est un nombre impair) »), mais uniquement pour dire « qu'une proposition fausse implique une proposition vraie ou fausse par une implication vraie ». Les auteurs font la remarque classique : « on dit en logique que du faux on peut déduire n'importe quoi. », sur laquelle j'ai déjà proposé un commentaire page 132)

Les trois manuels traduisent l'inclusion par une implication, qui n'est universellement quantifiée que dans *Queysanne-Revuz*.

L'implication dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Dans les manuels de 2010, l'implication [8] est essentiellement une proposition de la forme « si A alors B », et non un connecteur comme c'était le cas en 1969. Le terme « implique » est également présent dans tous les manuels sauf un. Puisqu'il ne s'agit pas d'un connecteur, il n'est pas question de donner son comportement par rapport aux valeurs de vérité. Pourtant, les valeurs de vérités sont présentes dans certains manuels, à travers l'idée que l'on affirme « si A alors B » pour signifier que « si A est vraie alors B est vraie » (*Repères, Transmath, Symbole* utilisent la même expression « si… alors … », *Math'x* et *Travailler en confiance* utilisent l'expression « lorsque »). Ces présentations ne prennent en compte

8. C'est essentiellement ce terme qui est utilisé dans les manuels, seuls 2 manuels utilisent le terme « proposition conditionnelle » du programme

que les cas où la prémisse est vraie. *Repères* précise dans son encadré sur la contraposée que la proposition $A \Rightarrow B$ est fausse lorsque A est vraie et B est fausse.

La plupart des manuels partent d'un exemple, comme dans *Transmath* :

2 L'implication : si..., alors...

Le mot **proposition** désigne, à notre niveau, une phrase **qui est soit vraie, soit fausse.**
Une proposition sera notée (P) ou notée (Q).

2.1 Un exemple pour comprendre

La proposition « **Si** ABC est un triangle isocèle en A, **alors** AB= AC » est une **implication.**
Elle affirme ceci :
s'il est vrai que le triangle ABC est isocèle en A, **alors il est vrai que AB = AC.**
Autrement dit, lorsque la proposition (P) : « **ABC est un triangle isocèle en A » est vraie, alors la** proposition (Q) : « Dans le triangle ABC, AB = AC » **est vraie aussi.**

On dit alors que **l'hypothèse (P) implique la conclusion (Q).**
Ce qui se traduit par **Si** (P), **alors** (Q) ou aussi par **(P) donc (Q) ou encore par (P) ⟹ (Q).**

Figure 6.7 – L'implication dans le manuel Transmath

Comme dans les autres manuels présentant l'implication de cette façon, l'exemple donné est une implication universellement quantifiée dans laquelle la quantification universelle est implicite. Cependant, c'est la présence de variables qui permet de considérer différentes valeurs de vérité de la prémisse « ABC est isocèle en A », mais cela n'est pas signalé. Nous voyons ici qu'implication et déduction sont mises sur le même plan, et que « si A alors B » et « A donc B » sont considérées comme des formulations équivalentes. Là encore, il s'agit d'une distinction délicate que nous avons vue dans la deuxième partie de la thèse (voir page 163), la confusion pouvant conduire à des erreurs d'élèves. Les mots « hypothèse » et « conclusion » sont les plus souvent utilisés (*Repères* utilise les termes « condition » et « conséquence »).

D'autres manuels ont une approche plus formelle, qui laisse entrevoir le connecteur IMPLIQUE permettant de construire une nouvelle proposition $A \Rightarrow B$ à partir de deux propositions A et B, comme par exemple *Symbole* :

1 L'implication

Définition 7

Si P et Q sont des propositions, la proposition « si P, alors Q », appelée **implication,** exprime que si P est vraie alors Q est vraie aussi.

Remarque : – on dit indifféremment « P implique Q », « si P, alors Q », « P donc Q »... Dans ce contexte, P est appelée l'hypothèse et Q la conclusion ;
– on dit aussi que P est vraie est une condition suffisante pour que Q soit vraie.

Exemple : « si n est un entier supérieur à 1 alors $k = n^3 - n$ est un multiple de 3 » est une implication. La proposition P est « être un entier $k = n^3 - n$ avec $n \geqslant 1$ » et Q est la proposition « être un multiple de 3 » et P implique Q. En effet $n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$ et parmi les trois entiers consécutifs $n - 1$, n et $n + 1$ l'un est un multiple de 3.
Ainsi être de la forme $n^3 - n$ est une condition suffisante pour être multiple de 3.

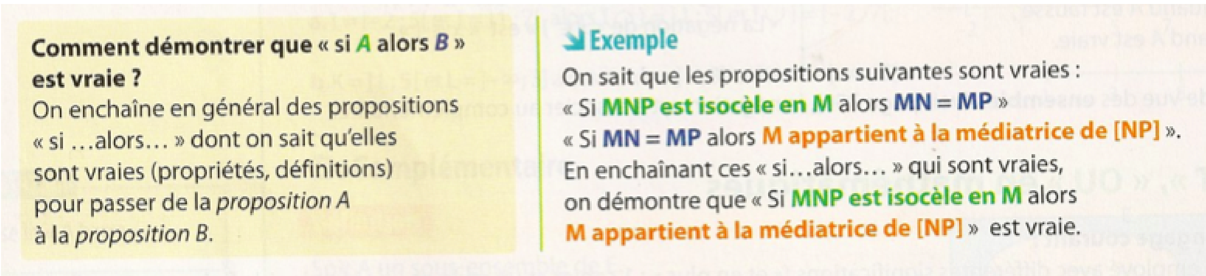
Figure 6.8 – L'implication dans le manuel Symbole

Malheureusement, ce manuel confond *si. . .*, *alors. . .* et *donc* et les exemples sont également des implications implicitement universellement quantifiées.

Les manuels qui précisent que $A \Rightarrow B$ [9] signifie que lorsque A est vraie, B est vraie font ainsi le lien entre implication et déduction. Mais ils ne donnent pas de schémas de déduction, qui correspondraient aux règles du *modus ponens* et du *modus tollens*. Seul *Math'x* précise que « lorsque la proposition A est fausse, on ne peut rien dire sur B ! Elle peut être, indifféremment, vraie ou fausse ».

Certains manuels posent ensuite la question de la démonstration de la vérité d'une implication $A \Rightarrow B$. Plusieurs techniques sont données :

1. simplement montrer B sous hypothèse A. Par exemple dans *Repères* il est dit que « pour démontrer que l'implication « $A \Rightarrow B$ » est vraie, on suppose que A est vraie et on montre que B est alors vraie. » Dans une telle présentation, le premier pas de la démonstration, supposer que A est vrai, est explicite. Nous avons vu (page 164) que ce premier pas n'est pas forcément facile pour des élèves de lycée, car au collège ceux-ci ont surtout été en position d'utiliser une implication, ce qui ne demande pas de prendre soi même l'initiative de se « placer sous hypothèse ».
2. Utiliser des implications successives. Par exemple dans *Math'x* :


Comment démontrer que « si *A* alors *B* » est vraie ?
On enchaîne en général des propositions « si …alors… » dont on sait qu'elles sont vraies (propriétés, définitions) pour passer de la *proposition A* à la *proposition B*.

Exemple
On sait que les propositions suivantes sont vraies :
« Si **MNP est isocèle en M** alors **MN = MP** »
« Si **MN = MP** alors **M appartient à la médiatrice de [NP]** ».
En enchaînant ces « si…alors… » qui sont vraies, on démontre que « Si **MNP est isocèle en M** alors **M appartient à la médiatrice de [NP]** » est vraie.

Figure 6.9 – L'implication dans le manuel Math'x

9. il faudrait rigoureusement dire, comme c'est le cas dans certains manuels, que l'affirmation de $A \Rightarrow B$ signifie . . .

La transitivité de l'implication est ici sous-jacente, mais une démonstration n'est généralement pas rédigée comme une succession d'implications, en utilisant la transitivité, mais plutôt comme une succession de déductions, comme le propose *Travailler en confiance* :

3 Comment démontrer une implication

a) Par implications successives

EXEMPLE

a et b sont deux réels tels que $a < 4$ et $b < 1$. Démontrez que $5a + b < 21$.
Il s'agit de démontrer l'implication suivante :

si $\underbrace{a < 4 \text{ et } b < 1}_{(P)}$, alors $\underbrace{5a + b < 21}_{(Q)}$.

Une solution : on sait que $a < 4$. Or $5 > 0$. **Donc**, en multipliant les deux membres de l'inégalité « $a < 4$ » par 5, on obtient $5a < 20$ [1]. Or : $b < 1$ [2]. **D'où**, en ajoutant membre à membre les inégalités [1] et [2], on obtient : $5a + b < 21$.

FIGURE 6.10 – L'implication dans le manuel Travailler en confiance (1)

3. Montrer une conclusion équivalente. Seul *Travailler en confiance* propose cette technique :

b) En transformant la conclusion

Pour démontrer que (P) implique (Q), il est parfois très commode de procéder ainsi : on commence par remplacer (Q) par une proposition (Q') qui lui est équivalente; puis on démontre que (P) implique (Q').

EXEMPLE

Démontrez que, x étant un réel,
si $\underbrace{x^2 > 2}_{(P)}$, alors $\underbrace{(x + 3)(x + 2) > 5x + 7}_{(Q)}$.
Une solution : $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$.
Donc la conclusion (Q) équivaut à : $x^2 + 5x + 6 > 5x + 7$,
c'est-à-dire à $\underbrace{x^2 > 1}_{(Q')}$.
Or, par hypothèse, $x^2 > 2$; d'où $x^2 > 1$.

FIGURE 6.11 – L'implication dans le manuel Travailler en confiance (2)

Enfin, *Math'x, Repères* et *Indice* précisent qu'on utilise un contre-exemple pour montrer qu'une implication est fausse, c'est-à-dire un élément pour lequel A est vraie et B est fausse. Là encore, le fait qu'un élément suffise montre que ces manuels considèrent le cas d'implications universellement quantifiées.

Je ne détaillerai pas ici ce qui est dit dans les manuels à propos de notions liées à l'implication (réciproque, contraposée, équivalence, condition nécessaire, condition suffisante). Notons seulement que tous les manuels donnent l'équivalence entre une implication et sa contraposée, mais que seuls trois d'entre eux donnent une justification : si B est fausse, A ne peut pas être vraie sinon on aurait B vraie.

Tableaux récapitulatifs de l'analyse sur l'implication

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :
  (1) Ce connecteur permet de construire, à partir de deux propositions, une nouvelle proposition
  (2) Forme disjonctive de l'implication
  (3) Transitivité de l'implication
– Aspect sémantique :
  (1) Comportement par rapport aux valeurs de vérité
  (2) Termes utilisés
  (3) Lien avec les ensembles : inclusion

J'ai également regardé le lien fait entre implication et déduction en retenant les critères suivants :

(1) Confusion entre *si... alors* et *donc* (cette information est déjà donnée dans les différents termes utilisés, mais elle me paraît suffisamment importante pour faire l'objet d'une colonne particulière dans ce tableau)
(2) $A \Rightarrow B$ signifie que lorsque A est vraie, B est vraie (ceci aurait pu se trouver dans la partie « aspect sémantique », mais dans les manuels cette donnée est souvent reliée à la possibilité de pouvoir faire une déduction)
(3) Schéma de déduction correspondant au *modus ponens*
(4) Schéma de déduction correspondant au *modus tollens*
(5) Techniques pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vraie
(6) Techniques pour montrer que $A \Rightarrow B$ est fausse

	Dimension syntaxique			Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Forme disjonctive	Transitivité	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Termes utilisés	Lien avec inclusion
Aleph0		OUI*			si...	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	Si ... alors, implique, entraîne	OUI
Lespinard	OUI	OUI**	OUI	OUI	Implique, entraîne	OUI
Déclic						
Hyperbole	OUI				Si ... alors	
Indice					Si ... alors, implique, donc, conséquence, entraîne	
Math'x					Si ... alors, donc, formulations implicites	

	Dimension syntaxique			Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Forme disjonctive	Transitivité	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Termes utilisés	Lien avec inclusion
Odyssée					Si … alors, implique, entraîne	
Pixel						
Repères					Si … alors, implique	
Symbole	OUI				Si … alors, implique, donc	
Transmath					Si … alors, formulations implicites	
Travailler en confiance					Si … alors, implique, donc	

* en exercice, ** par définition

	Liens avec la démonstration					
	Confusion avec donc	Signifie que « si A est vraie alors B est vraie »	Schéma *modus ponens*	Schéma *modus tollens*	Montrer que $A \Rightarrow B$ est vraie	Montrer que $A \Rightarrow B$ est fausse
Aleph0			OUI	OUI		
Queysanne Revuz			OUI	OUI	Montrer B sous hypothèse A	
Lespinard			OUI			
Déclic						
Hyperbole					Montrer B sous hypothèse A	
Indice	OUI			*	Montrer B sous hypothèse A	Contre-exemple
Math'x		OUI			Passer de A à B par des implications successives	Contre-exemple
Odyssée						
Pixel						
Repères		OUI			Montrer B sous hypothèse A	Contre-exemple
Symbole	OUI				Montrer B sous hypothèse A	
Transmath	OUI					
Travailler en confiance		OUI			Passer de A à B par des implications successives, Montrer une conclusion équivalente	

* Sous entendu, sans parler de « vrai ».

6.1.6 Les quantificateurs

Les quantificateurs dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Dans *Aleph 0*, chaque quantificateur est introduit par des exemples. Le manuel propose plusieurs énoncés, dont il souligne la structure commune, et présente les quantificateurs comme un moyen d'exprimer cette structure. Par exemple pour le quantificateur universel :

> Voici des énoncés relevant de domaines divers :
> « Les cétacés sont adaptés à la vie aquatique. »
> « Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment. »
> « Chaque partie de cet ouvrage peut-être lue indépendamment des autres. »
> « L'homme est mortel. »
> Le quantificateur universel. - Au moyen d'expressions grammaticales différentes, chacune de ces propositions affirme que les objets d'une certaine théorie possèdent **tous** une certaine propriété. On pourrait uniformiser ces énoncés en adoptant une formulation du type : « Quel que soit x, s'il appartient à la théorie T, il possède la propriété $\mathscr{P}$ ». L'abréviation consacrée pour noter ce *quel que soit* est :
> $$\forall x[(x \text{ appartient à } T) \Rightarrow (x \text{ possède } \mathscr{P})].$$
> Le signe $\forall$ se lit : *quel que soit* ou *pour tout* (x).
> On l'appelle le **quantificateur universel.**

Queysanne-Revuz et *Lespinard* présentent tous deux les quantificateurs après les notions ensemblistes car ils le font à partir du lien entre une proposition $\mathscr{A}(x)$ et l'ensemble A des éléments x d'un ensemble E vérifiant $\mathscr{A}(x)$. Par exemple, dans *Queysanne-Revuz* :

> Considérons l'énoncé suivant :
> $$\textit{« pour tout élément } x \textit{ de } E \textit{ on a } \mathscr{A}(x) \textit{ »}$$
> Si on a $A = E$ cet énoncé est *vrai.*
> Si on a $A \neq E$ cet énoncé est *faux.*

Dans ce manuel, la construction d'un énoncé quantifié (l'aspect syntaxique) est préalable au sens qu'on lui donne (l'aspect sémantique). Il précise ensuite que la valeur de vérité de cet énoncé « ne dépend pas de la valeur attribuée à la variable x », et qu'il est équivalent au même énoncé dans lequel on a remplacé la variable x par la variable y (sans préciser comme il faudrait le faire que la variable y ne doit pas être libre dans $\mathscr{A}$, mais les auteurs considérent sans doute que $\mathscr{A}$ n'a pas d'autres variables libres que x). Les auteurs introduisent le terme de « lettre muette ».

Lespinard emploie des termes sensiblement différents :

> Si $A = E$, tous les éléments de E possèdent la propriété. On exprime cela en disant « **pour tout** x**, la propriété** $\mathscr{A}$ **est vérifiée. »**

Dans ce manuel, comme dans *Aleph 0*, la formulation avec les quantificateurs est d'abord vue sous l'aspect sémantique, c'est une façon de reformuler certaines propositions, et l'aspect syntaxique n'est pas présent.

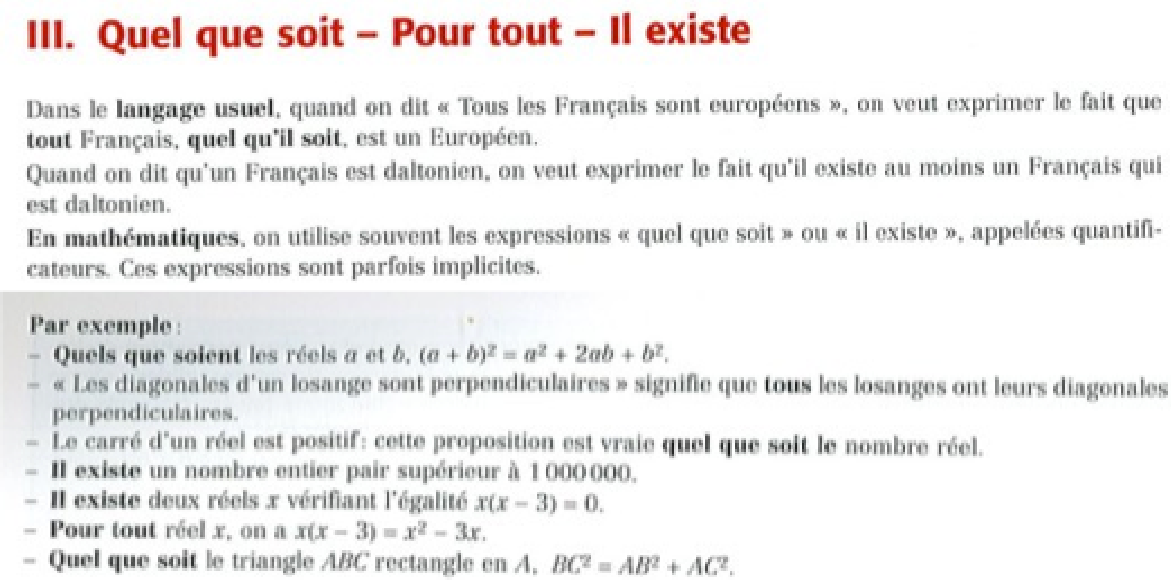
Les trois manuels donnent les règles de négation des propositions quantifiées. À la différence des deux autres, *Aleph 0* le fait sans utiliser le connecteur NON :

> Pour qu'une affirmation universelle soit fausse, il suffit qu'il existe un cas où elle est en défaut.
>
> La négation de l'énoncé :
>
> $$(\forall x \text{ de } A),\ x \text{ possède la propriété } \mathscr{P}$$
>
> est donc :
>
> $$(\exists x \text{ de } A),\ x \text{ ne possède pas la propriété } \mathscr{P}$$

Aleph 0 est le seul à proposer un paragraphe sur la distinction entre $\forall\exists$ et $\exists\forall$.

Les quantificateurs dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Dans les huit manuels de 2010 qui traitent des quantificateurs, ceux-ci sont introduits par des exemples. Sept de ces huit manuels ne donnent que des exemples de propositions quantifiées vraies, comme ci-dessous dans *Indice* :



III. Quel que soit – Pour tout – Il existe

Dans le **langage usuel**, quand on dit « Tous les Français sont européens », on veut exprimer le fait que **tout** Français, **quel qu'il soit**, est un Européen.
Quand on dit qu'un Français est daltonien, on veut exprimer le fait qu'il existe au moins un Français qui est daltonien.
En mathématiques, on utilise souvent les expressions « quel que soit » ou « il existe », appelées quantificateurs. Ces expressions sont parfois implicites.

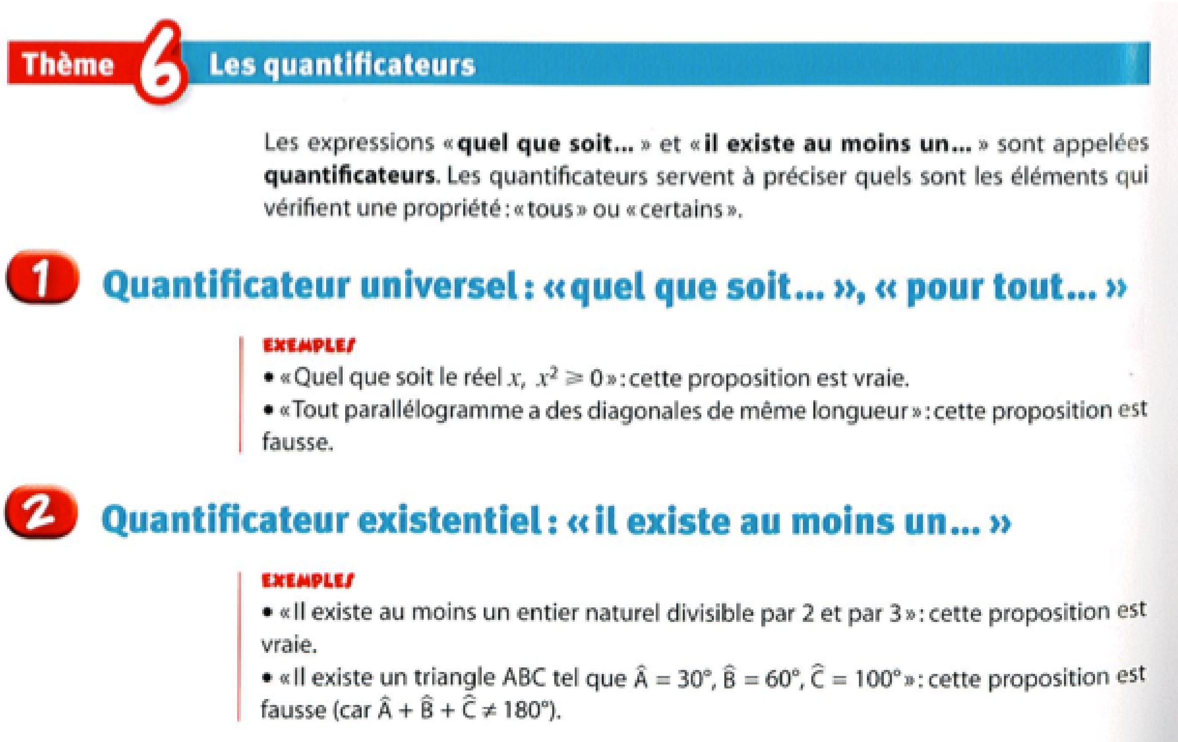
Par exemple :
- **Quels que soient** les réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- « Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » signifie que **tous** les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires.
- Le carré d'un réel est positif : cette proposition est vraie **quel que soit le** nombre réel.
- **Il existe** un nombre entier pair supérieur à 1 000 000.
- **Il existe** deux réels x vérifiant l'égalité $x(x-3) = 0$.
- **Pour tout** réel x, on a $x(x-3) = x^2 - 3x$.
- **Quel que soit** le triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

FIGURE 6.12 – Les quantificateurs dans le manuel Indice

Dans une telle présentation, l'aspect syntaxique des quantificateurs n'est pas du tout présent. On ne se sert des quantificateurs que pour affirmer quelque chose, il n'y a pas du tout l'idée d'une proposition construite avec un quantificateur dont on peut se demander si elle est vraie ou fausse. Les auteurs comptent sur la compréhension des expressions utilisées pour signifier la quantification à partir de leur utilisation dans le langage courant.

Par ailleurs, il y a dans ces exemples un mélange de propositions où la quantification porte sur une variable et de propositions quantifiées sans variable. Cela montre que l'objet quantificateur n'est pas bien identifié, et est confondu avec l'idée de quantification (voir distinction page 140), ce qui renforce l'absence de référence à un langage mathématique ayant ses spécificités. Dans l'exemple « il existe deux réels x vérifiant l'égalité $x(x-3) = 0$ », s'il y a bien quantification, il ne s'agit pas d'une simple utilisation du quantificateur existentiel. En effet (en interprétant « il existe deux » comme « il existe au moins deux »), en se contentant du quantificateur existentiel, on doit reformuler ainsi la proposition, en introduisant deux variables : « il existe un réel x, il existe un réel y tels que $(x(x-3) = 0 \text{ ET } y(y-3) = 0 \text{ ET } x \neq y)$ ». Nous avons finalement une proposition d'une structure assez complexe.

Hyperbole est le seul qui donne pour chaque quantificateur un exemple d'une proposition vraie et un exemple d'une proposition fausse :


Thème 6 Les quantificateurs

Les expressions «**quel que soit...**» et «**il existe au moins un...**» sont appelées **quantificateurs**. Les quantificateurs servent à préciser quels sont les éléments qui vérifient une propriété : «tous» ou «certains».

1 Quantificateur universel : «quel que soit...», «pour tout...»

EXEMPLES

- «Quel que soit le réel x, $x^2 \geqslant 0$» : cette proposition est vraie.
- «Tout parallélogramme a des diagonales de même longueur» : cette proposition est fausse.

2 Quantificateur existentiel : «il existe au moins un...»

EXEMPLES

- «Il existe au moins un entier naturel divisible par 2 et par 3» : cette proposition est vraie.
- «Il existe un triangle ABC tel que $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 100°$» : cette proposition est fausse (car $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \neq 180°$).

FIGURE 6.13 – Les quantificateurs dans le manuel Hyperbole

Seule la fausseté de la dernière proposition est justifiée. Globalement, les manuels justifient peu la vérité des propositions quantifiées. En particulier, seuls *Symbole* et *Math'x* (extrait ci-dessous) justifient la vérité d'une proposition existentielle en exhibant une valeur qui convient :

5 « Il existe un », « Quel que soit », « Pour tout » : quantificateurs

• « Il existe un… » signifie « Il existe **au moins un**… ». Par exemple : « Il existe un nombre x tel que $x^2 - 1 = 3$ » : si on prend $x = 2$, on a bien $x^2 - 1 = 3$. On aurait aussi pu prendre $x = -2$.

• « Pour tout », « quel que soit » : on a vu au collège que quelles que soient les valeurs par lesquelles on remplace a et b, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$.
On l'énonce ainsi : « Quels que soient a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ » ou encore : « Pour tous a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ ».
Attention ! Très souvent « quel que soit » ou « pour tout » sont implicites. Par exemple, « **un** rectangle a ses diagonales de même longueur » signifie que « quel que soit le rectangle que l'on considère, il a ses diagonales de la même longueur ».
Ici « **un** » signifie « **un quelconque** », « **pour tout** ».

VOCABULAIRE
« Un » a plusieurs significations :
« un exactement »,
« au moins un »,
« un quelconque ».

Figure 6.14 – Les quantificateurs dans le manuel Math'x

Cet extrait est suivi d'un encadré intitulé « raisonnement par exemple (s) ou par contre-exemple » :

Raisonnement par exemple (s) ou par contre-exemple

• Pour démontrer « il existe un … », il suffit d'en trouver un : produire un exemple suffit !
• Pour démontrer « pour tout … », il suffit d'envisager tous les cas ; mais s'ils sont en nombre infini, ce n'est plus possible. Des exemples ne suffisent pas.
• Pour démontrer que « pour tout, … » est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

• Démontrer que « il existe un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires » : il suffit d'en construire un, comme ci-contre.
• Démontrer que « tout nombre multiple de 6 est aussi multiple de 2 ». Il faudrait tester tous les multiples de 6, mais il y en a une infinité ! Ce n'est donc pas possible. Il faut faire une démonstration dans le cas général.
• Démontrer que « pour tout nombre x, $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ » est faux. Il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = 2$, $(x + 1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.

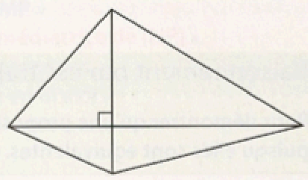


Figure 6.15 – Exemple et contre-exemple dans le manuel Math'x

Ici, chaque cas est présenté comme une technique isolée et la façon dont elles sont reliées grâce à la négation n'est pas expliquée (j'entends par là l'explicitation du fait que montrer qu'une proposition universelle est fausse et montrer qu'une proposition existentielle est vraie relèvent de la même technique car la négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle, c'est-à-dire l'explicitation du lien entre ce qui est appelé « exemple » et ce qui est appelé « contre-exemple », qui ici semblent n'avoir rien en commun). Ainsi, le cas de la démonstration de la fausseté d'une proposition existentielle ne semble relever d'aucune de ces techniques, alors que cela revient à montrer la vérité d'une proposition universelle, telle qu'envisagée dans le deuxième point.

Le seul cas qui est présent dans tous les manuels est celui de la technique du contre-exemple pour montrer qu'une proposition universelle est fausse, mais dans la plupart des manuels, cette technique n'est pas reliée à la négation. Elle l'est seulement dans deux manuels : *Transmath*, dont nous verrons un extrait ci-après, et *Indice*, qui propose le paragraphe suivant :

IV. Exemples – Contre-exemples

On veut savoir si les deux énoncés suivants sont vrais ou faux.
(1) L'expression $x^2 + 2x - 3$ est égale à $(x - 1)(x + 3)$.
(2) Tout entier impair est premier.

Pour démontrer que l'énoncé (1) est vrai, un élève dit :
« Pour $x = 1$, les deux expressions sont égales à 0. Donc elles sont égales. »
Cet exemple ne prouve pas que l'énoncé (1) est vrai. Pour cela, il faudrait tester l'égalité pour toutes les valeurs de x. En développant, $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$.
Ce calcul prouve que l'égalité (1) est vraie pour toute valeur de x.

Pour démontrer que l'énoncé (2) est faux, un élève dit :
« 9 est impair et il n'est pas premier. »
La donnée d'un exemple suffit dans ce cas pour prouver le résultat.
L'énoncé « 9 est impair et il n'est pas premier » est vrai. Il existe donc un entier impair non premier. La phrase dite par l'élève est la négation de l'énoncé (2). Celui-ci est donc faux.

Un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai, mais on peut utiliser un exemple pour montrer qu'un énoncé est faux : on peut alors trouver un cas qui le met en défaut, c'est un **contre-exemple**.

FIGURE 6.16 – Exemple et contre-exemple dans le manuel Indice

Ce manuel veut aussi mettre en garde les élèves contre une erreur courante : démontrer une proposition universelle avec un exemple. Il est regrettable que la quantification universelle soit implicite dans l'exemple 1. Cela peut-être vu comme une simple maladresse didactique, montrant un manque d'identification de la difficulté des quantifications implicites. Mais nous pouvons également relever dans cet extrait une erreur par rapport aux notions de logique : la proposition « 9 est impair et il n'est pas premier » n'est pas la négation de la proposition « tout entier impair est premier » (même si sa vérité prouve la vérité de cette négation). La rigueur généralement de mise quand on parle d'objets mathématiques n'est pas du tout appliquée ici, nous pouvons en voir un autre exemple dans le récapitulatif : la conclusion « un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai » ne s'applique qu'à des énoncés universels, ce qui n'est pas précisé.

Les règles de négation de propositions quantifiées ne sont présentes que dans trois manuels. *Pixel* les évoque de manière très imprécise : « de façon générale, la négation de « pour tout x » est « il existe x », et réciproquement », ce qui est largement incomplet. *Odyssée* se contente de dire que « les deux quantificateurs « tout » et « il existe » sont souvent liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition. » Il y a identification des notions de contraire et de négation, notions pourtant distinctes, mais que les élèves ont tendance à confondre, et là encore le vocabulaire manque de précision : que signifie « être liés » pour les quantificateurs ?

Transmath propose quant à lui un passage assez long sur ces règles, et relie la notion de contre-exemple à la négation d'une proposition universelle :

6.4 Négation d'une proposition universelle. Démonstration par contre-exemple

Une proposition universelle est une proposition qui contient le seul quantificateur « pour tout » ou « quel que soit » (ou « pour tous » ou « quels que soient »).

Exemples. 1. Considérons la proposition proverbiale (P) : « la nuit, **tous** les chats **sont** gris ». Sa négation, (non P), s'énonce : « la nuit, **il existe au moins** un chat qui n'est pas gris ».
2. La négation de la proposition (P) : « **pour tout** nombre x, $x^2 > x$ » est « **il existe au moins** un nombre x tel que $x^2 \leqslant x$ ».
Notez que, dans ce cas, la proposition (P) est fausse car $x^2 > x$ n'est vraie que pour $x > 1$. Donc la proposition (non P) est vraie.

Cas général. Notons (P) la proposition : « pour tout élément x d'un ensemble E, x satisfait à une condition C ». Alors la négation de P est :

« il existe au moins un élément x de E qui ne satisfait pas la condition C ».

Conséquence : démonstration par recours à un contre-exemple
À l'aide d'un contre-exemple, démontrons que la proposition (P) : « pour tout nombre $x > -1$, $x^2 > 1$ » est fausse.
Démontrer que (P) est fausse revient à démontrer que sa négation (non P) est vraie. Or (non P) est :

« **il existe au moins un nombre** x tel que $x > -1$, et tel que $x^2 \leqslant 1$ ».

Il s'agit donc de trouver un tel nombre x. On cherche au plus simple : on voit que zéro convient, car $0 > -1$ et $0^2 \leqslant 1$. Donc (P) est fausse.

6.5 Négation d'une proposition existentielle

Exemples
1. La négation de la proposition P : « **il existe** un nombre x tel que $x^2 + 1 = 0$ » est : « **pour tout nombre** x, $x^2 + 1 \neq 0$ ». À noter que (non P) est vraie car pour tout x, $x^2 + 1 \geqslant 1$, donc $x^2 + 1$ est non nul (et donc (P) est fausse).
2. La négation de la proposition (P) : « **il existe au moins** un triangle dont l'orthocentre est à l'extérieur du triangle » est : « **pour tout** triangle, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ».
Ici, (P) est vraie (voir la figure), et donc (non P) est fausse.

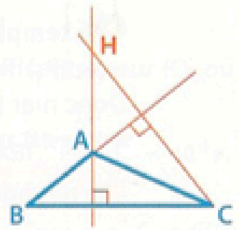


Figure 6.17 – Négation des propositions quantifiées dans le manuel Transmath

La négation d'une proposition universelle est d'abord illustrée par un énoncé de la vie courante, « la nuit tous les chats sont gris ». Mais dans cet énoncé, il y a deux quantifications universelles : celle mise en évidence sur les chats, mais aussi une quantification universelle implicite sur les nuits. La négation devrait donc comporter deux quantifications existentielles : « il existe une nuit pendant laquelle il existe au moins un chat qui n'est pas gris. » Le recours à un énoncé de la vie courante, sans doute vu comme plus facilement compréhensible pour une première approche, est ici utilisé de façon incorrecte du point de vue de la logique mathématique. Par ailleurs, une règle est énoncée pour la négation d'une proposition universelle (et avant elle deux règles pour les connecteurs ET et OU), mais pas pour la négation d'une proposition existentielle. Ici encore, propositions universelles et existentielles ne sont pas mises sur le même plan, car il ne s'agit pas d'étudier un langage, mais de donner des techniques pour l'activité mathématique.

Les règles de négation des propositions quantifiées sont ainsi évoquées dans ces trois manuels, mais pas données d'une façon formelle permettant un traitement syntaxique (c'est-à-dire une application qui ne se réfère plus au sens des propositions).

Conformément aux indications du programme et du document ressource, plusieurs manuels évoquent les formulations dans lesquelles les quantifications sont implicites (essentiellement l'utilisation du mot « un »), mais seul *Travailler en confiance* évoque la quantification universelle implicite dans les propositions en *si..., alors...*.

Tableau récapitulatif de l'analyse sur les quantificateurs

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :

(1) Les quantificateurs permettent de construire, à partir d'une proposition, une nouvelle proposition

(2) Aspect mutificateur

(3) Règles par rapport à la négation

(4) Utilisation des symboles

– Aspect sémantique :

(1) Valeur de vérité des propositions quantifiées donnée par l'approche ensembliste ou par des exemples

(2) Expressions dans lesquelles des quantifications implicites sont signalées

(3) Distinction entre $\forall\exists$ et $\exists\forall$

	Dimension syntaxique				Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Aspect mutificateur	Règles par rapport à la négation	Utilisation des symboles	Valeur de vérité	Formulations implicites	Distinction entre $\forall\exists$ et $\exists\forall$
Aleph0			OUI	OUI	Exemples	OUI*	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	Approche ensembliste		
Lespinard			OUI	OUI	Approche ensembliste	un (pour $\forall$)	
Déclic							
Hyperbole					Exemples		
Indice					Exemples		
Math'x					Exemples	un (pour $\forall$, $\exists$)	
Odyssée			*		Exemples	un (pour $\forall$, $\exists$)	
Pixel			*				
Repères					Exemples		
Symbole					Exemples		
Transmath			*		Exemples	un, des (pour $\forall$)	
Travailler en confiance				OUI	Exemples	si... alors	

* Les règles sont évoquées dans ces trois manuels, mais pas de façon suffisamment précise pour que l'on puisse y voir un aspect syntaxique.

6.1.7 Les différents types de raisonnement

Les différents types de raisonnement dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Il n'y a rien concernant les différents types de raisonnement dans *Lespinard*.

Dans *Aleph 0*, une partie est consacrée à la déduction, avec trois sous-parties :

1. la déduction directe : le *modus ponens* est illustré par un exemple et parallèlement schématisé, puis décrit sans utiliser de variable propositionnelle :

   > a) S'il pleut sur mon jardin, le gazon est arrosé. a) $p \Rightarrow q$
   > b) Or, il pleut. b) p
   > c) Donc mon gazon est arrosé. c) $\overline{\quad q}$
   >
   > D'une implication juste dont le premier membre, l'hypothèse, est vrai, nous pouvons *détacher* une *conclusion* : la vérité de la thèse.
   >
   > Nous appellerons un tel raisonnement un *raisonnement élémentaire direct*.

   Ce schéma est relié à la tautologie suivante donnée en théorème en conclusion de cette partie : $[p \text{ et } p \Rightarrow q] \Rightarrow q$

2. La contraposition est illustrée par un exemple. Puis un premier théorème est donné, sans démonstration : $[h \Rightarrow t] \Rightarrow [\overline{t} \Rightarrow \overline{h}]$, dont une conséquence qui « traduit un nouveau mode de raisonnement » est la tautologie $[(h \Rightarrow t) \text{ et } \overline{t}] \Rightarrow \overline{h}$.

3. La déduction par exclusion logique (réduction à l'absurde) est illustrée par deux exemples, puis décrite sans variable propositionnelle, puis reliée à la tautologie $\Big[[\overline{h} \text{ ou } t] \text{ et } h\Big] \Rightarrow t$.

Dans *Queysanne-Revuz*, il y a deux parties sur le raisonnement :

1. d'abord une partie sur les énoncés, introduite par les quelques lignes :

   > Le raisonnement mathématique est l'ensemble des méthodes permettant de tirer d'énoncés considérés comme vrais d'autres énoncés vrais ; autrement dit le raisonnement mathématique est l'art de démontrer la vérité de certains résultats. Il nous faut d'abord expliquer les divers types d'énoncés que l'on peut rencontrer en mathématique.

   Sont alors différenciés : les axiomes, les phrases exprimant des définitions, les théorèmes qui sont des plusieurs sortes :
   – les théorèmes d'existence et d'unicité,
   – les théorèmes s'exprimant par une implication,
   – les théorèmes s'exprimant par une équivalence.

2. Puis une partie sur les méthodes de démonstration qui sont basées sur des schémas de raisonnement justifiés par les tables de vérité. Sont présentés :
   – le raisonnement par déduction : basé sur le schéma déjà énoncé dans le manuel : « si (p est *vraie*) *et* si ($p \Rightarrow q$) est *vraie* alors q est *vraie.* » (implication et déduction étaient déjà reliées dans le paragraphe sur l'implication dans lequel étaient donnés les deux schémas du *modus ponens* et du *modus tollens*, voir page 241).
   – La démonstration par négation, avec le contre-exemple qui est associé au fait que la négation de « $(\forall x \in E) \quad \mathscr{P}(x)$ » est « $(\exists x \in E) \quad \text{non}\mathscr{P}(x)$ ».
   – La démonstration par disjonction des cas, basée sur le schéma : « si ($p \Rightarrow q$) est *vraie* et si (non$p$) $\Rightarrow q$ est *vraie* alors q est *vraie* », démontrée par les tables de vérité.
   – La démonstration par l'absurde, décrite comme suit :

   > Le cas le plus simple est le suivant : on veut démontrer que p est vraie, on considère une assertion q *fausse* telle que [(non p)$\Rightarrow q$] soit *vraie.*

   Elle est justifiée par le schéma « si [(non p)$\Rightarrow q$] est *vraie et* si q est *fausse* alors (non p) est *fausse* donc p est *vraie* ».

Ce manuel précise bien que les schémas de raisonnement sont en général plus compliqués car ils font intervenir à différents moments différentes propositions.

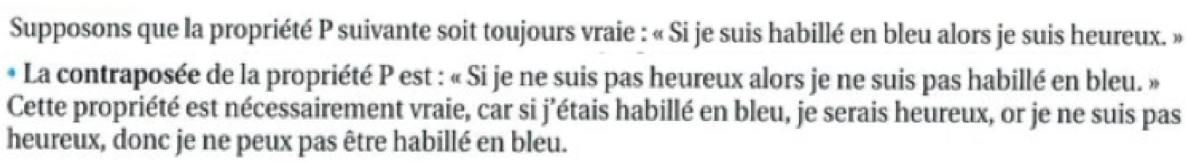
Les différents types de raisonnement dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Notons tout d'abord que ce que *Aleph 0* et *Queysanne-Revuz* appellent déduction directe, ou raisonnement par déduction, et qui correspond à une utilisation du *modus ponens*, n'est pas présent dans les manuels de 2010.

Le raisonnement par contraposée, par contraposition

Je rappelle la distinction que j'ai déjà faite entre le raisonnement par contraposée (qui consiste à montrer une implication en montrant sa contraposée) et le raisonnement par contraposition (qui est une utilisation du *modus tollens*).

Hormis *Déclic*, tous les manuels de 2010 définissent ce qu'est la contraposée d'une implication, mais seuls *Odyssée, Pixel, Transmath*, et *Travailler en confiance* justifient qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, le premier sur un exemple :


Supposons que la propriété P suivante soit toujours vraie : « Si je suis habillé en bleu alors je suis heureux. »

• **La contraposée** de la propriété P est : « Si je ne suis pas heureux alors je ne suis pas habillé en bleu. »
Cette propriété est nécessairement vraie, car si j'étais habillé en bleu, je serais heureux, or je ne suis pas heureux, donc je ne peux pas être habillé en bleu.

FIGURE 6.18 – La contraposée dans le manuel Odyssée

Les trois autres manuels proposent un raisonnement sur des variables propositionnelles, comme nous le verrons dans l'extrait de *Travailler en confiance* ci-après.

Repères, Math'x, Travailler en confiance et *Odyssée* décrivent le principe du raisonnement par contraposée, basé sur le fait qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, par exemple dans *Math'x*[10] :

Raisonnement par contraposition

Pour démontrer qu'une proposition conditionnelle est vraie, on peut démontrer que sa contraposée est vraie puisqu'elles sont équivalentes. C'est parfois plus facile !

Énoncé : Soit n un entier. Démontrer que « si **$n^2 + n$ est strictement négatif**, alors **n est strictement négatif** »

Démonstration : Ceci revient à démontrer la contraposée :
« si **n est positif ou nul** alors **$n^2 + n$ est positif ou nul** ».
La contraposée se démontre facilement : en effet si n est positif ou nul, comme n^2 est toujours positif ou nul, $n^2 + n$ est une somme de deux nombres positifs ou nuls, donc $n^2 + n$ est positif ou nul.

FIGURE 6.19 – La démonstration par contraposée dans le manuel Math'x

Dans sa description, *Travailler en confiance* utilise des variables propositionnelles, et il justifie la validité de ce raisonnement (en justifiant en fait l'équivalence entre une implication et sa contraposée) :

b) Notion de contraposée

DÉFINITION

On appelle **contraposée** de l'implication « (P) ⇒ (Q) » l'implication « (non Q) ⇒ (non P) ».

Pour démontrer l'implication « (P) ⇒ (Q) », il suffit de démontrer sa contraposée « (non Q) ⇒ (non P) ».
En effet, supposons que (non Q) implique (non P). Alors, si (P) est vraie, (Q) est vraie, car, sinon, (non Q) serait vraie et donc (non P). D'où une contradiction.

Note
En réalité, les implications « (P) ⇒ (Q) » et « (non Q) ⇒ (non P) » sont équivalentes.

FIGURE 6.20 – La démonstration par contraposée dans le manuel Travailler en confiance

Indice, Pixel et *Symbole* disent simplement qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, mais ne parlent pas du raisonnement par contraposée.

Seul *Transmath* parle de « démonstration par utilisation de la contraposée », qui correspond au raisonnement par contraposition :

Démonstration par utilisation de la contraposée. Exemples

1. Le théorème de Pythagore est vrai :
Si (P) : « un triangle ABC est rectangle en A », alors (Q) : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».
Donc sa contraposée est vraie. Or sa contraposée s'énonce :
Si (non Q) : « Dans un triangle ABC, $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ », alors (non P) : « ABC n'est pas rectangle en A ».
Cette contraposée permet de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

FIGURE 6.21 – La démonstration par utilisation de la contraposée dans le manuel Transmath

10. Ce manuel appelle *raisonnement par contraposition* ce que j'ai appelé *raisonnement par contraposée.*

Le raisonnement par l'absurde

Transmath, Repères et *Symbole* présentent le raisonnement par l'absurde seulement dans le cas d'une implication, et proposent une description de ce type de raisonnement dans laquelle sont utilisées des variables propositionnelles pour marquer la prémisse et la conclusion. *Transmath* propose l'exemple suivant pour illustrer le raisonnement par l'absurde :

8.2 Démonstration par l'absurde

« Absurde » signifie « contraire à la raison, au bon sens ».

Exemple. Démontrer que pour tout entier n, la proposition (P) : « n^2 est un entier pair » implique la proposition (Q) : « n est un entier pair ».
Démontrons par l'absurde cette implication. Supposons donc qu'il existe un entier n tel que n^2 soit pair et n soit non pair, c'est-à-dire tel que n soit impair. Alors, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$. D'où $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi, $n^2 = 2k + 1$, avec $k = 2p^2 + 2p$, entier.
Donc n^2 est impair, ce qui contredit « n^2 est pair ».
Donc : Si « n^2 est pair » implique « n est pair ».

Cas général. Pour démontrer par l'absurde une implication : « (P) implique (Q) », on conserve l'hypothèse (P) et on ajoute à cette hypothèse, **l'hypothèse supplémentaire : (non Q)** (négation de la conclusion).
Puis à partir de (P) et (non Q), on déroule un raisonnement qui aboutit à **une contradiction**. Il en résulte alors que l'hypothèse (non Q) est fausse, donc que (Q) est vraie, lorsque (P) est vraie.

FIGURE 6.22 – La démonstration par l'absurde dans le manuel Transmath

Nous retrouvons dans l'exemple donné la confusion entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée évoquée page 168 (d'ailleurs, ce même exemple est donné pour illustrer le raisonnement par contraposée dans *Hyperbole*).

Odyssée, Math'x, Hyperbole proposent une description de la démarche du raisonnement par l'absurde dans le cas général, par exemple dans *Odyssée*[11] :

b. Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à émettre comme hypothèse le contraire du résultat escompté.
Si cela conduit à un résultat absurde (ou faux) alors on aura démontré que le résultat attendu était juste.

EXEMPLE

S'il existe un nombre x solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ alors $x^2 = -1$, ce qui est impossible car un carré est toujours positif.
Donc l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

FIGURE 6.23 – La démonstration par l'absurde dans le manuel Odyssée

Dans cet extrait, le début de la démonstration, qui consiste, comme c'est indiqué, à prendre la négation de la proposition, n'apparaît pas comme étape explicite.

11. Le mot « contraire » est encore une fois utilisé comme synonyme de négation.

Le raisonnement par disjonction des cas

Il est traité de manière sensiblement identique dans tous les manuels, par exemple dans *Repères* :

3. La démonstration par disjonction des cas

Lorsque l'on ne peut pas démontrer tous les cas de figure en même temps, on procède à une démonstration par **disjonction des cas**. Pour cela, on démontre la propriété dans chacun des cas créés afin de reconstituer l'ensemble des cas possibles. (Voir page 176.)

FIGURE 6.24 – La démonstration par disjonction des cas dans le manuel Repères

Hyperbole et *Transmath* ne donnent que des exemples, et pas de description de ce type de raisonnement.

Seul *Symbole* associe ce type de raisonnement au fait de formuler l'hypothèse sous la forme d'une disjonction :

Ce raisonnement est utilisé lorsque l'hypothèse P apparaît comme la réunion de plusieurs cas : on se retrouve avec le mot « **ou** » et l'on est amené à présenter une démonstration envisageant plusieurs cas. C'est donc fréquent si l'hypothèse est une disjonction de propositions.

FIGURE 6.25 – La démonstration par disjonction des cas dans le manuel Symbole (extrait)

Aucun manuel de 2010 ne propose de justification de la validité du raisonnement par disjonction des cas.

Le raisonnement par contre-exemple

La notion de contre-exemple est présente dans presque tous les manuels de 2010, hormis *Déclic* et *Symbole*, et sept des huit manuels qui évoquent cette notion proposent un paragraphe sur le « raisonnement par contre-exemple » (*Pixel* ne mentionne ce terme que dans un exercice corrigé). Ces paragraphes ont déjà été commentés dans le paragraphe sur les quantificateurs (voir page 253).

Récapitulatif de l'analyse sur les différents type de raisonnement

La distinction aspect syntaxique/aspect sémantique n'a pas de sens pour les types de raisonnement ; je me contente donc de mentionner les types de raisonnement qui sont présents dans les manuels.

	Modus ponens	Raisonnement par contraposition	Raisonnement par contraposée	Raisonnement par l'absurde	Raisonnement par disjonction des cas	Raisonnement par contre-exemple
Aleph0	OUI	OUI		OUI		OUI****
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI*	OUI	OUI	OUI****
Lespinard						
Déclic						
Hyperbole			OUI***	OUI	OUI***	OUI
Indice						OUI
Math'x			OUI	OUI	OUI	OUI
Odyssée			OUI*	OUI	OUI	OUI
Pixel						
Repères			OUI	OUI**	OUI	OUI
Symbole				OUI**	OUI	
Transmath		OUI		OUI**	OUI***	OUI****
Travailler en confiance			OUI*	OUI	OUI***	OUI

* : l'équivalence entre une implication et sa contraposée est justifiée.

** : le raisonnement par l'absurde est présenté seulement dans le cas d'une implication.

*** : le manuel propose seulement un exemple

**** : la validité de la démonstration par contre-exemple est liée à la négation des propositions universelles.

6.1.8 Synthèse de l'analyse des pages « Logique » des manuels de Seconde

Dans tous les manuels analysés, de 1969 comme de 2010, l'étude des notions de logique comporte des considérations sur le langage. Mais les fonctions assignées à la logique ne sont pas partout les mêmes, et dépendent des préconisations des différents programmes. En 1969, l'enjeu était la construction d'un langage mathématique qui devait permettre à la fois de donner des outils d'analyse du monde réel, mais aussi de diminuer les inégalités dues à une meilleure maîtrise de la langue française dans certains milieux. La logique mathématique était alors clairement utilisée comme référence pour la maîtrise de ce langage mathématique. En 2009, il n'y a plus cet enjeu, le travail sur le langage est plutôt décrit comme un travail sur la maîtrise de la langue française qui aurait des usages particuliers en mathématiques, mais sans langage formalisé faisant référence.

Dans la constitution des systèmes logiques étudiés dans la première partie de cette thèse, ce travail sur le langage est un préalable au discours sur le raisonnement. C'est en partie le cas en 1969, au moins dans *Queysanne-Revuz* et *Aleph 0* qui associent schémas de raisonnement et calcul propositionnel (lien avec des lois logiques justifiées par les tables de vérité pour le premier, lien avec des tautologies admises comme théorèmes pour le deuxième). Dans les manuels de 2010, les types de raisonnement sont seulement listés, sans réelle justification de leur validité (pour le raisonnement par contraposée, plusieurs manuels mentionnent l'équivalence entre une implication et sa contraposée, mais sans justification). L'aspect technique est davantage mis en avant, et la logique n'est pas invoquée comme théorie justifiant la technique. Par exemple, les manuels de 2010 parlent tous de contre-exemple, mais un seul d'entre eux justifie la validité du raisonnement par contre-exemple en faisant le lien avec le fait que la négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle.

Les manuels de 1969 semblent tous suivre une même ligne directrice [12] : logique mathématique et langage des ensembles sont la référence (ce qui est explicite dans le commentaire de 1970 qui accompagne le programme de 1969), les notions sont traitées comme des objets, dont les manuels donnent des définitions et des propriétés. Il ne s'agit pas pour autant de proposer un cours de logique mathématique, et les trois manuels étudiés sont d'ailleurs plus ou moins proches du vocabulaire et des notations de la logique mathématique. Le plus rigoureux dans ce domaine est *Queysanne-Revuz*, dont le propos est clair du point de vue de la logique, et articulé avec l'activité mathématique. A. Revuz est un mathématicien très impliqué dans la réforme des mathématiques modernes, et il n'est pas étonnant que ces pages du manuel qu'il co-écrit semblent être le fruit d'une réelle réflexion sur le enjeux d'un tel enseignement au lycée. *Lespinard* reste également assez proche de la logique mathématique, mais avec moins de recul sur celle-ci et sur son articulation avec

12. J'ai étudié moins de manuels pour 1969, mais je ne pense pas que ce biais joue de manière significative sur les résultats.

le reste de l'activité mathématique. Par exemple, ces deux manuels proposent des implications à prémisse fausse entre des propositions qui n'ont pas de lien sémantique entre elles. Mais *Queysanne-Revuz* les commente en disant que « dans la définition de l'implication logique, considérée seule, il n'y a aucune idée de déduction », délimitant bien ici le connecteur IMPLIQUE, alors que *Lespinard* conclut « on dit en logique que du faux on peut déduire n'importe quoi », confondant ainsi implication et déduction. *Aleph 0* est plus éloigné de la logique mathématique, mais elle est quand même présente comme référence explicite (par exemple ce manuel donne certaines tautologies liées au raisonnement). Dans ces trois manuels de 1969, les notions de logique sont donc présentes dans leur dimension outil et dans leur dimension objet. Ces deux dimensions sont articulées à travers des commentaires sur l'activité mathématique s'appuyant sur la logique mathématique.

Dans les manuels de 2010, la logique mathématique est beaucoup moins une référence. La présentation des notions est faite de façon beaucoup moins formalisée (en accord avec les mises en garde du programme et du document ressource), et le vocabulaire utilisé est beaucoup moins précis. Les notions ne sont pas définies, et sont même parfois mal délimitées : nous retrouvons dans plusieurs manuels l'absence des notions de proposition et de variable, l'absence de propositions ouvertes (comportant des variables libres) dans les exemples, l'assimilation entre *si* A *alors* B et A *donc* B, la non-distinction entre quantification et quantificateurs. Et de façon plus ponctuelle, certains manuels disent des choses qui ne sont pas correctes du point de vue de la logique mathématique : « "le triangle ABC est rectangle et isocèle" est une conjonction d'"être rectangle" **et** "isocèle" » (voir page 230), « "9 est impair et il n'est pas premier" est la négation de "Tout entier impair est premier" » (voir page 254). Par ailleurs, la dimension syntaxique est beaucoup moins présente dans les manuels de 2010. Ceci est cohérent avec le fait que le travail sur un langage spécifique n'est pas un objectif, et avec la volonté de ne pas être trop formel. Dans les manuels de 2010, conformément à la demande du programme, la dimension outil des notions de logique est ainsi mise en avant et la dimension objet est pratiquement absente.

En l'absence d'une référence qui aurait agi comme ligne directrice, les manuels de 2010 ont fait des choix très divers de présentation des notions de logique. Je vais maintenant compléter cette étude par l'analyse des tâches proposées, qui permet de voir quelle utilisation de ces notions est attendue et comment elles sont travaillées.

6.2 Analyse des exercices dans 5 manuels de 2010

Je commencerai l'analyse des tâches sur des notions de logique proposées dans les manuels de Seconde de 2010 par un point de vue global, en regardant la place accordée à des exercices sur des notions de logique dans l'ensemble des exercices proposés. Puisqu'un axe fort du programme est que le travail sur les notions de logique se fasse tout au long de l'étude des autres chapitres, je détaille cette étude par grands domaines du programme.

Je proposerai ensuite une analyse plus fine en termes de types de tâche répartis par notion de logique.

Je me suis limitée à 5 manuels, qui présentent une certaine diversité quant aux choix faits pour la présentation des notions de logique, et qui sont les plus utilisés dans les classes (je me réfère notamment pour cette affirmation au questionnaire du chapitre 7).

6.2.1 Résultats généraux

Nombre d'exercices par partie du programme

Pour ces résultats, l'unité de comptage est l'exercice. Je n'ai retenu que les exercices identifiés « logique » par un logo. Certains exercices sont ainsi identifiés dans un manuel et pas dans un autre, mais dans la mesure où je cherche plutôt à voir quelles sont les intentions des auteurs, cela me paraît cohérent de ne retenir que ce qui est identifié « logique ». Puis j'ai regardé quelle proportion du nombre total d'exercices cela représentait. Je propose les résultats par grands domaines du programme : Fonctions, Statistique et probabilités, Géométrie, puis sur l'ensemble de ces trois domaines.

Le manuel *Math'x* propose une page d'exercices à la suite de ses pages « Raisonnement logique » et le manuel *Repères* insère des exercices dans ses pages « Logique ». Je n'ai pas inclus ces exercices dans la répartition par grands domaines du programme, j'ai souhaité avoir des statistiques identiques pour les 5 manuels. J'indique par contre combien il y a de tels exercices dans la dernière ligne du tableau ci-après.

	Transmath	Math'x	Hyperbole	Repères	Déclic
Nombre d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Fonctions* (en pourcent du nombre total d'exercices dans cette partie)	13 (3,1 %)	19 (3 %)	24 (5, 4 %)	18 (5,2 %)	7 (1,4 %)
Pourcentage d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Fonctions* par rapport au nombre total d'exercices identifiés « logique » (pourcentage d'exercices dans la partie *Fonctions* par rapport au nombre total d'exercices dans le manuel)	52 % (48,7 %)	61,3 % (47,7 %)	72,7 % (47,7 %)	60 % (44,3%)	70 % (52,5 %)
Nombre d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Statistiques et probabilités* (en pourcent du nombre total d'exercices dans cette partie)	4 (2,4 %)	4 (1,8 %)	6 (3,6 %)	3 (1,9 %)	1 (0,8 %)
Pourcentage d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Statistiques et probabilités* par rapport au nombre total d'exercices identifiés « logique » (pourcentage d'exercices dans la partie *Statistiques et probabilités* par rapport au nombre total d'exercices dans le manuel)	16 % (19,2 %)	12,9 % (16,9 %)	18,2 % (17,6 %)	10 % (19,7 %)	10 % (13,5 %)
Nombre d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Géométrie* (en pourcent du nombre total d'exercices dans cette partie)	8 (2,9 %)	8 (1,7 %)	3 (0,9 %)	9 (3,2 %)	2 (0,6 %)
Pourcentage d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Géométrie* par rapport au nombre total d'exercices identifiés « logique » (pourcentage d'exercices dans la partie *Géométrie* par rapport au nombre total d'exercices dans le manuel)	32 % (32, 1 %)	25,8 % (35,4 %)	9,1 % (34,7 %)	30 % (36 %)	20 % (33,9 %)
Nombre total d'exercices identifiés « logique » (en pourcent du nombre total d'exercices)	25 2,9%	31 2,3%	33 3,5%	30 3,8%	10 1%
Nombre d'exercices dans les pages consacrées aux notions de logique		14		24	

Déclic, qui ne propose qu'une page *Notations et logique*, propose nettement moins d'exercices que les autres. Les résultats pour les 4 autres manuels sont assez similaires.

Par ailleurs, tous ces manuels proposent des exercices identifiés « logique » dans les trois grands domaines du programme. Mais sachant que la partie *Fonctions* représente à peu près la moitié des exercices proposés dans les manuels, nous pouvons voir qu'elle est sur-investie pour les exercices sur les notions de logique.

Nombre d'exercices par notion de logique

Pour ces résultats, l'unités de comptage est l'exercice, mais un même exercice peut traiter de plusieurs notions.

	Propositions	Connecteurs ET et OU	Négation	Implication	Quantificateurs	Il faut, il suffit, CN, CS	équivalence	Types de raisonnement	Reformulation	Non classé
Transmath	0	1	4	11	4	0	0	1	6	0
Math'x (dans chapitre)	0	2	5	9	10	2	3	1	2	3
Math'x (dans pages spéciales)	1	2	1	7	2	1	0	0	2	0
Hyperbole	1	3	3	13	9	2	1	1	0	2
Repères (dans chapitres)	1	2	1	7	6	1	4	9	0	2
Repères (dans pages spéciales)	0	2	2	9	2	1	2	5	0	2
Déclic	0	0	0	3	5	0	0	2	0	0

Ces résultats nous montrent que la notion d'implication est beaucoup plus objet d'exercices que les autres notions (surtout si on lui associe les exercices sur *il faut/il suffit, condition suffisante/condition nécessaire* et sur l'équivalence). Cela correspond à sa place centrale dans l'activité mathématique, à la fois dans la formulation des théorèmes et dans le raisonnement.

Les quantificateurs sont également l'objet d'un nombre important d'exercices, contrairement aux connecteurs ET et OU et à la négation.

Ces résultats globaux doivent être affinés par une étude des type de tâche proposés, et je vais maintenant dénombrer ces tâches en prenant comme unité de comptage la question d'un exercice.

6.2.2 Types de tâches sur les notions de logique

Dans cette section, je présente pour chaque notion de logique la liste des types de tâches relevés dans les 5 manuels. J'illustrerai certains de ces types de tâches en présentant certains exercices et en mettant en évidence les propriétés logiques sous-jacentes à leur résolution. Bien sûr, l'explicitation de ces propriétés n'est absolument pas nécessaire pour la résolution des exercices, et dans le travail en classe avec les élèves, c'est plutôt au contraire la résolution de l'exercice qui permet de mettre en évidence les propriétés logiques. Ces propriétés sont formulées ici de façon très formalisée, loin de moi l'idée de suggérer de les énoncer telles quelles avec des élèves.

Les résultats numériques du comptage par type de tâches, avec la question comme unité d'analyse, sont donnés en fin de section.

Type de tâches 0 : sur les propositions élémentaires

Je ne répertorie ici que les types de tâches qui concernent les propositions élémentaires, puisque dès qu'une proposition contient des connecteurs ou des quantificateurs, je l'ai prise en compte avec les types de tâches sur ces notions. Je n'ai relevé finalement qu'un type de tâches : dire si une proposition élémentaire est vraie ou fausse, par exemple dans l'exercice 39 page 113 de *Repères* :

39 Vrai ou faux et pourquoi ? Logique

Soit la fonction homographique définie par :

$$h(x) = 1 + \frac{3}{x-2}.$$

On note $\mathscr{E}$ son ensemble de définition.

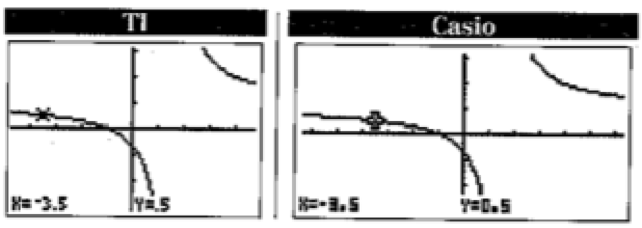
Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux, en justifiant chacune de vos réponses.

a. $\mathscr{E} =]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$.

b. Pour tout nombre réel x de $\mathscr{E}$: $h(x) = \dfrac{x-5}{x-2}$.

c. h est une fonction homographique.

d. Suivant sa calculatrice, on obtient comme courbe représentative :



e. Le nombre 1 n'admet aucun antécédent par la fonction h.

f. h est décroissante sur $]-\infty\,;2[$.

g. h est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

h. h est décroissante sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

FIGURE 6.26 – Exercice du manuel Repères sur les propositions élémentaires

Dans cet exercice, je compte 7 occurrences de ce type de tâches (pas la question b). En effet, les propositions sont exprimées sous forme de propositions élémentaires (dans la question d la formulation de la proposition est à la charge de l'élève), même si des connecteurs et quantificateurs apparaîtraient dans une reformulation mettant au jour leur structure logique.

On peut trouver ce type d'exercice dans plusieurs autres manuels, mais sans le logo « logique ». Ainsi, même si j'ai compté ces questions dans un type de tâches sur des propositions élémentaires, il ne semble pas que ce soit l'objectif logique visé ici.

Type de tâches 1 : sur les connecteurs ET et OU

1.1 Donner des valeurs vérifiant une proposition ouverte comportant une conjonction ou une disjonction.

1.2 Donner toutes les valeurs vérifiant une proposition ouverte comportant une conjonction ou une disjonction.

1.3 Dire si une valeur vérifie une proposition ouverte comportant une conjonction ou une disjonction.

1.4 Compléter avec le connecteur ET ou le connecteur OU de manière à ce que la proposition soit vraie.

1.5 Déduire la valeur de vérité d'une de ses composantes de la valeur de vérité d'une conjonction ou d'une disjonction.

La différence entre les type de tâches 1.1 et 1.2 consiste dans le caractère exhaustif ou non. Par exemple, la question 3.a de l'exercice 56 page 43 de *Transmath* :

> n est un entier naturel pair *et* multiple de 3.
> Donnez cinq valeurs possibles pour n.

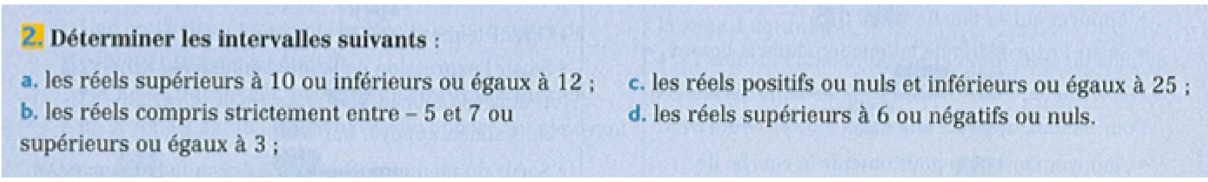
est du type 1.1. Alors que la question a de l'exercice 1 page 355 de *Math'x* :

> Donner les entiers de 0 à 20 qui sont :
> pairs ET multiples de 5

est de type 1.2. Dans l'exemple donné, l'ensemble des valeurs à tester est fini. On pourrait aussi imaginer ce même type de tâches avec des variables astreintes à un ensemble infini. Il faudrait alors faire une démonstration pour justifier que seules certaines valeurs vérifient la proposition, valeurs dont on peut donner la liste si elles sont en nombre fini, où que l'on peut caractériser dans le cas contraire. Par exemple, *Queysanne-Revuz* proposait l'exercice suivant :

> L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? (on pourra discuter selon les valeurs attribuées aux variables) :
> " $x + y$ et $x - y$ sont tous les deux pairs (x et y sont des entiers) "

Les types de tâches 1.1, 1.2, 1.3 concernent aussi les propositions ouvertes et la notion d'élément satisfaisant une proposition. Le type de tâches le plus présent est 1.2 avec des exercices sur les intervalles, comme l'exercice 3.2 page 17 de *Repères* :



2. Déterminer les intervalles suivants :

a. les réels supérieurs à 10 ou inférieurs ou égaux à 12 ;

b. les réels compris strictement entre – 5 et 7 ou supérieurs ou égaux à 3 ;

c. les réels positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 25 ;

d. les réels supérieurs à 6 ou négatifs ou nuls.

FIGURE 6.27 – Exercice du manuel Repères sur les connecteurs ET et OU (1)

Ces exercices sur les intervalles, dont la plupart ne sont pas identifiés « logique », sont pourtant l'occasion de travailler sur les connecteurs ET et OU en lien avec intersection et réunion. Ils permettent un jeu de cadres entre le cadre discursif des propositions formulées avec les connecteurs ET et OU, le cadre graphique de la représentation sur une droite graduée, et le cadre ensembliste de la représentation sous forme d'intervalle, ou de réunion d'intervalles. Mais de tels exercices peuvent mettre en jeu d'autres propriétés logiques, que j'ai répertoriées dans les commentaires du tableau ci-dessous :

	$x < a$ ET $x < b$	$x < a$ OU $x < b$	$x < a$ ET $x > b$	$x < a$ OU $x > b$	$x > a$ ET $x > b$	$x > a$ OU $x > b$	$x > a$ ET $x < b$	$x > a$ OU $x < b$
$a < b$	(*) $x \in]-\infty, a[$	(**) $x \in]-\infty, b[$	(***) Pas possible	$x \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$	$x \in]b, +\infty[$	$x \in]a, +\infty[$	$x \in]a, b[$	Tous les réels
$a > b$	$x \in]-\infty, b[$	$x \in]-\infty, a[$	$x \in]b, a[$	(****) Tous les réels	$x \in]a, +\infty[$	$x \in]b, +\infty[$	pas possible	$x \in]-\infty, b[\cup]a, +\infty[$

Du point de vue logique, on peut faire les commentaires suivants :

Dans toute la suite, A désigne la proposition $x < a$, B la proposition $x < b$ et B' la proposition $x > b$.

- Par exemple dans le cas (*), il s'agit d'une proposition de la forme (A ET B) dans le cas particulier où la proposition ($A \Rightarrow B$) est vraie. La proposition (A ET B) est alors logiquement équivalente à A. Une autre façon de dire cela est que la proposition (($A \Rightarrow B$) $\Rightarrow$ ((A ET B) $\Leftrightarrow A$)) est une tautologie.
- De la même manière, dans le cas (**), il s'agit d'une proposition de la forme (A OU B) dans le cas particulier où la proposition ($A \Rightarrow B$) est vraie. La proposition (A OU B) est alors logiquement équivalente à B. Une autre manière de dire cela est de dire que la proposition (($A \Rightarrow B$) $\Rightarrow$ ((A OU B) $\Leftrightarrow B$)) est une tautologie.
- Le cas (***) " Pas possible " correspond à une proposition de la forme (A ET B') dans le cas particulier où les propositions A et B' sont contradictoires, c'est-à-dire ne peuvent être vraies en même temps.
- Le cas (****) " Tous les réels " correspond à une proposition de la forme (A OU B') dans le cas particulier où la proposition (NON $B' \Rightarrow A$) est vraie. La proposition (A OU B') est alors vraie. Une autre façon de dire cela est que la proposition ((NON $B' \Rightarrow A$) $\Rightarrow$ (A OU B')) est une tautologie.

L'exercice 3.1 page 17 de *Repères* propose le type de tâches 1.4 :

Exercices

1. Compléter les phrases suivantes à l'aide de « et » ou « ou ».

a. $xy = 0$ équivaut à $x = 0$ ...... $y = 0$.

b. $xy \neq 0$ équivaut à $x \neq 0$ ...... $y \neq 0$.

c. $\frac{x}{y} = 0$ équivaut à $x = 0$ ...... $y \neq 0$.

d. -5, 0 et 5 sont des entiers naturels ...... des entiers relatifs.

e. $(x+3)(2x-3) = 0$ pour $x + 3 = 0$ ...... $2x - 3 = 0$.

f. L'intervalle $]7\,;10[$ contient les réels plus grands que 7 ...... plus petit que 10.

g. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels tels que $x \leqslant 3$ ...... $x > 0$.

h. $[-1\,;4[$ est l'ensemble des réels tels que $x < 4$ ...... $x \geqslant -1$.

i. 2, 8, 6, 10, 15, 20 sont des entiers pairs ...... supérieurs à 12.

Figure 6.28 – Exercice du manuel Repères sur les connecteurs ET et OU (2)

Remarquons d'abord, et ceci est valable pour tous les exercices où il faut compléter une proposition, que les manuels ne demandent jamais de compléter de manière à ce que la proposition soit vraie, ce qui est bien sûr implicitement attendu ! Par ailleurs, quand il s'agit de compléter une proposition de la forme $A \ldots B$, si le connecteur ET convient, alors le connecteur OU conviendra aussi (car $[(A \text{ ET } B) \Rightarrow (A \text{ OU } B)]$ est une tautologie), mais cela peut poser problème aux élèves d'envisager les deux réponses possibles (nous avons déjà évoqué ce cas à propos d'un exercice de *Indice*, voir page 120). Il n'y a pas cette difficulté dans l'exercice ci-dessus, car les propositions sont de la forme $(A \ldots B) \Leftrightarrow C$, et un seul connecteur convient. Notons cependant un problème dans la question c : la proposition « $x = 0 \ldots y \neq 0$ » a un sens pour des variables x et y astreintes à $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas de la proposition « $\frac{x}{y} = 0$ ». Il est alors abusif d'utiliser le terme « équivaut à »[13].

Enfin, le type de tâches 1.5 a été rencontré seulement dans l'exercice 110 page 99 de *Math'x* :

110 ET, OU et négation

Les nombres réels p, q, r, s, t sont tels que :

$$pqr = 1,\ rst = 0 \text{ et } spr = 0.$$

Quels nombres doivent être égaux à 0 ?

Source : SAT

Figure 6.29 – Exercice du manuel Math'x sur les connecteurs ET et OU

Cet exercice est le seul où il faut faire des déductions à partir des valeurs de vérité d'une conjonction ou d'une disjonction et de certaines de ses composantes. Donnons un exemple

13. Ce problème se rencontre également dans la résolution d'équations comportant une fraction rationnelle, comme par exemple $\frac{x+5}{x-1} = 0$. Il n'est pas correct d'écrire que cela équivaut à $x + 5 = 0$ et $x - 1 \neq 0$. Il convient plutôt d'écrire que, pour tout $x \neq 1$, $\frac{x+5}{x-1} = 0$ équivaut à $x + 5 = 0$.

de résolution où le travail sur les connecteurs ET et OU est volontairement souligné :

> Du fait que la conjonction de trois propositions est vraie, je déduis que chaque proposition est vraie [14].
>
> De la première égalité, je déduis $pr \neq 0$ ET $q \neq 0$.
>
> De la troisième égalité je déduis $s = 0$ OU $pr = 0$.
>
> Puisque $s = 0$ OU $pr = 0$, et $pr \neq 0$, on doit avoir $s = 0$ (de (A OU B) et de $NON\,A$ je peux déduire B).
>
> On a alors $rst = 0$ quelle que soit la valeur de t.
>
> Donc, seul s doit être égal à 0, p, q, r ne doivent pas être égaux à 0, et peu importe pour t.

Les déductions telles que celle donnée dans la résolution ci-dessus ne sont mentionnées dans aucun manuel (ni de 1969, ni de 2010), elles sont sans doute supposées intuitivement évidentes. Ceci appuie également le constat que la notion de règle de déduction est moins familière aux mathématiciens que le langage des prédicats.

Type de tâches 2 : sur la négation

2.1 Formuler la négation d'une proposition élémentaire.

2.2 Formuler la négation d'une conjonction ou d'une disjonction.

2.3 Formuler la négation d'une proposition quantifiée.

2.4 Formuler la négation d'une implication.

14. Je ne pense pas qu'il soit pertinent de souligner cette première étape avec des élèves à qui elle paraîtra tout-à-fait évidente.

Nous avons vu dans l'analyse des pages logiques que peu de manuels de 2010 donnaient des règles sur la formation de la négation d'une proposition. Elles sont pourtant nécessaires pour ces types de tâches. Ainsi, dans l'exercice 36 page 71 de *Hyperbole*, ces règles sont rappelées en préambule :

36 Négation, et, ou, si ... alors ...

Logique

A et B désignent des phrases.
• La négation de la phrase « A **ou** B » est « non A **et** non B ».
• La négation de la phrase « A **et** B » est « non A **ou** non B ».
• La négation de la phrase « si A, alors B » est « A et non B ».

Par exemple, la négation de « $x < 3$ ou $x > 7$ » est « $x \geqslant 3$ et $x \leqslant 7$ » c'est-à-dire « $3 \leqslant x \leqslant 7$ ».
Écrire la négation de chaque phrase.
a) Tout entier naturel est pair ou impair.
b) Si ABCD est un losange, alors ABCD est un parallélogramme.
c) Si $x^2 = 1$, alors $x = 1$ ou $x = -1$.
d) (AB) $\perp$ (CD) et AB = CD.

FIGURE 6.30 – Exercice du manuel Hyperbole sur la négation

Mais ces règles sont données sans aucune justification. Et surtout, la première proposition contient une quantification universelle explicite (c'est donc une tâche qui est à la fois de type 2.2 et de type 2.3), et aucune règle n'est donnée pour la négation des propositions quantifiées ! Il en va de même pour les deux propositions en *si…, alors…* qui sont implicitement universellement quantifiées (la correction proposée par le manuel est bien une proposition existentielle).

Type de tâches 3 : sur l'implication

3.1 Dire si une implication est vraie ou fausse.

3.2 Compléter la prémisse ou la conclusion d'une implication avec des propositions données de manière à ce qu'elle soit vraie.

3.3 Former des implications vraies à partir de différentes propositions données.

3.4 Démontrer une implication.

3.5 Dire si une inférence à partir d'une implication vraie est valide ou non.

3.6 Dire si une valeur est un contre-exemple ou non pour une implication.

3.7 Dire si on a entre deux propositions seulement une implication ou une équivalence.

3.8 Pour un couple (P, Q) de propositions, dire si chacune des propositions $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, et $Q \Leftrightarrow P$ est vraie ou fausse.

3.9 Dire si une équivalence est vraie ou fausse.

3.10 Compléter une équivalence (l'une des deux propositions est fixée) avec des propositions données de manière à ce qu'elle soit vraie.

3.11 Former des équivalences vraies à partir de différentes propositions données.

3.12 Démontrer une équivalence.

3.13 Écrire la réciproque d'une implication.

3.14 Dire si la réciproque d'une implication est vraie ou fausse.

3.15 Écrire la contraposée d'une implication.

3.16 Dire si on utilise dans un raisonnement une implication ou sa contraposée.

3.17 Énoncer une implication, une équivalence avec les expressions « il faut », « il suffit », « il faut et il suffit ».

3.18 Compléter avec « il faut », « il suffit » de manière à ce que la proposition soit vraie.

3.19 Énoncer une implication avec les expressions « condition nécessaire, condition suffisante. »

3.20 Dire si une proposition est une condition suffisante, une condition nécessaire pour une proposition donnée.

3.21 Proposer une condition suffisante, une condition nécessaire pour une proposition donnée.

3.22 Identifier dans une implication quelle est la condition suffisante, la condition nécessaire.

La liste est longue et correspond finalement plus à une variété de présentation qu'à une différence importante entre les techniques de résolutions des tâches. Je vais faire ressortir cela en donnant des exemples d'exercices proposés pour les types de tâches 3.1 à 3.6. Notons que dans tous ces exercices, les implications sont très rarement explicitement universellement quantifiées.

Ainsi, les types de tâches 3.1, 3.2, 3.3 correspondent finalement à la même activité, montrer qu'une implication est vraie ou fausse (il n'est pas toujours clairement indiqué dans les énoncés des exercices à quel point il faut justifier). Les exemples ci-après illustrent les différences entre ces trois types de tâches :

– pour la tâche 3.1 : exercice 73 page 123 de *Math'x* :

73 Vrai ou faux ?

(A) Si $x \geqslant -1$ alors $x^2 \geqslant 1$. (B) Si $x^2 \leqslant 1$ alors $x \leqslant -1$.

(C) Si $x \geqslant 1$ alors $\frac{1}{x} \leqslant 1$. (D) Si $\frac{1}{x} \leqslant 1$ alors $x \geqslant 1$.

FIGURE 6.31 – Exercice du manuel Math'x sur l'implication (1)

– pour la tâche 3.2 : exercice 51 page 53 question b de *Hyperbole* :

b) Voici six propositions :

A $a^2 = b^2$	B $a = b$
C $a = -b$	D $(a+b)(a-b) = 0$
E $a = b$ **ou** $a = -b$	F $a = 0$ **ou** $b = 0$

Dans chaque cas, recopier et compléter par le nom de l'une de ces propositions :

- la proposition A implique la proposition … ;
- la proposition … implique la proposition A ;
- les propositions … et … sont équivalentes.

FIGURE 6.32 – Exercice du manuel Hyperbole sur l'implication

– pour la tâche 3.3 : exercice 53 page 145 de *Math'x* :

53 Si…alors, si et seulement si, et, ou ?

Rédiger le plus de propriétés possibles avec deux des trois propositions données.

1. $a \times b = 0$	$a = 0$ OU $b = 0$	$a < 0$ ET $b = 0$
2. $a \times b \neq 0$	$a \neq 0$ OU $b \neq 0$	$a \neq 0$ ET $b \neq 0$
3. $\frac{a}{b} < 0$	$a < 0$ OU $b > 0$	$a < 0$ ET $b > 0$

FIGURE 6.33 – Exercice du manuel Math'x sur l'implication (2)

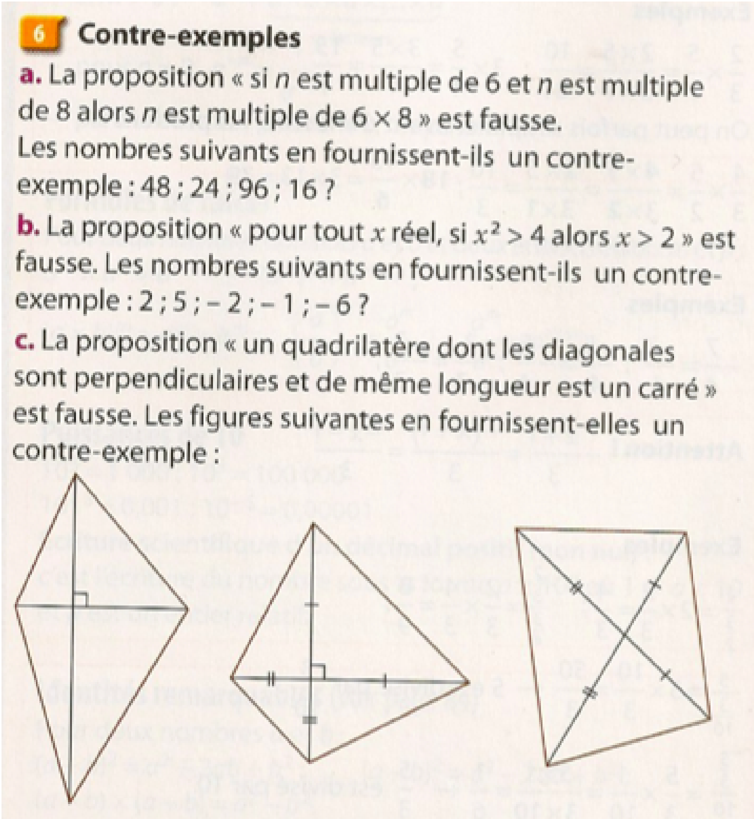
Notons que cet exercice permet d'illustrer les propriétés logiques $[(A \text{ ET } B) \Rightarrow (A \text{ OU } B)]$, et $[(A \text{ ET } B) \Rightarrow (A \text{ OU } C)]$.

Le type de tâches 3.4 est assez rare. Nous le retrouvons par exemple dans la question 1.a de l'exercice 43 page 255 de *Hyperbole* où il est demandé de démontrer que la proposition « si $A \subset B$, alors $p(A) \geqslant p(B)$ » est vraie. Comme nous l'avons déjà vu, dans un tel exercice, l'élève a à sa charge de poser les hypothèses, c'est-à-dire de se placer dans un monde où $A \subset B$ est vrai, ce qui est une difficulté pour des élèves de Seconde.

Le type de tâches 3.5 se retrouve uniquement dans des exercices inspirés de l'exercice *Les cosmonautes* proposé dans les document ressource (voir page 208), contextualisé éventuellement différemment, mais toujours dans un contexte de vie courante [15].

15. Le document ressource propose également un tel type de tâches dans un contexte mathématique, mais je ne l'ai pas retrouvé dans un tel contexte dans les manuels.

J'ai trouvé le type de tâches 3.6 uniquement dans l'exercice 6 page 355 de *Math'x* :



6 Contre-exemples

a. La proposition « si n est multiple de 6 et n est multiple de 8 alors n est multiple de 6×8 » est fausse.
Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 48 ; 24 ; 96 ; 16 ?

b. La proposition « pour tout x réel, si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ » est fausse. Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 2 ; 5 ; – 2 ; – 1 ; – 6 ?

c. La proposition « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un carré » est fausse. Les figures suivantes en fournissent-elles un contre-exemple :

FIGURE 6.34 – Exercice du manuel Math'x sur l'implication (3)

Cet exercice permet de travailler sur la définition donnée dans ce manuel d'un contre-exemple : « pour montrer que “si A alors B ” est fausse, on montre que l'on peut avoir à la fois la proposition A vraie ET la proposition B fausse. Un exemple qui permet de démontrer qu'une proposition conditionnelle est fausse s'appelle un contre-exemple ». Ce type de tâches peut être une première étape dans le travail sur le contre-exemple, préalable à la production d'un contre-exemple pour montrer qu'une implication est fausse.

Type de tâches 4 : sur les quantificateurs

4.1 Dire si une proposition quantifiée est vraie ou fausse.

4.2 Compléter avec un quantificateur de manière à ce que la proposition soit vraie.

Comme pour les connecteurs ET et OU, les propositions qui peuvent être complétées avec un quantificateur universel peuvent aussi l'être avec un quantificateur existentiel. Mais la demande implicite est de compléter avec le quantificateur qui donne le plus d'information. Expliciter pourquoi pour certaines propositions on peut compléter avec « il existe » et pas avec « pour tout » est un travail supplémentaire intéressant qui met en jeu la négation. L'exercice 55 page 145 de *Math'x* est l'un des rares de ce type où il n'est pas demandé de choisir entre les deux quantificateurs [16] :

55 « Pour tout x » ou « il existe un x » ?
Peut-on ajouter « pour tout x » devant ces propositions ?
Et « il existe un x tel que » ?

a. $2x+3>4x-5$ **b.** $x^2 \geqslant 0$
c. $x^2 < x+3$ **d.** $x^2 > -3$
e. $x^2+2>0$ **f.** $x^2 \geqslant x-2$

FIGURE 6.35 – Exercice du manuel Math'x sur les quantificateurs (1)

L'essentiel des exercices sur les quantificateurs est dans les parties du programme *Fonctions* et *Statistiques et probabilités*, et les variables quantifiées sont essentiellement astreintes à des ensembles de nombres. Seul *Math'x* propose deux exercices sur les quantificateurs en géométrie, dans le chapitre sur les équations de droites, les exercices 77 et 78 page 307 :

77 Négation et quantificateurs
1. Ces phrases sont-elles vraies ou fausses ?
(A) Pour tout point M$(x\,;y)$, $y=3x-5$.
(B) Il existe au moins un point M$(x\,;y)$ tel que $y=3x-5$.
(C) Il existe au moins un point M$(x\,;y)$ tel que $y\neq 3x-5$.
2. Quelle est la négation de la proposition (A) ?

78 Des quantificateurs
On considère l'égalité $(x+y)^2 = x^2+y^2$.
1. Est-elle vraie pour tous réels x et y ?
2. Est-elle fausse pour tous réels x et y ?
3. Montrer que l'ensemble des points M$(x\,;y)$ tels que $(x+y)^2=x^2+y^2$ est formé de deux droites.

FIGURE 6.36 – Exercices du manuel Math'x sur les quantificateurs (2)

Ici aussi les variables sont astreintes à $\mathbb{R}$ (on peut tout à fait se passer du point M dans l'exercice 77).

16. Notons ici que le domaine auquel les variables sont astreintes n'est pas précisé !

Il y a tout de même des exercices où les propositions quantifiées portent sur des objets autres que numériques, mais dans ce cas la quantification ne porte pas sur une variable, elle est formulée dans le langage courant :

– de manière explicite comme dans l'exercice 63 page 187 de *Hyperbole* :

63 Quantificateur universel
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
a) Dans un repère, tous les points appartenant à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{3x^2 - 2x}{x}$ appartiennent à la droite d d'équation $y = 3x - 2$.
b) Dans un repère, tous les points appartenant à la droite d d'équation $y = 3x - 2$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{3x^2 - 2x}{x}$.

FIGURE 6.37 – Exercice du manuel Hyperbole sur les quantificateurs

– de manière implicite comme dans l'exercice 76 page 75 de *Math'x* :

76 Vrai ou Faux ?
1. Une fonction strictement décroissante sur $[-5 ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; 4]$ admet son minimum en 1.
2. Une fonction strictement croissante sur $[-5 ; 1]$ et strictement décroissante sur $[1 ; 4]$ admet son minimum en -5.

FIGURE 6.38 – Exercice du manuel Math'x sur les quantificateurs (3)

Dans ces exercices, les quantifications sont relativisées (voir page 146), ce qui complique la tâche car il faut bien distinguer la propriété qui caractérise les éléments auxquels on s'intéresse, et la propriété que l'on veut montrer ou infirmer pour ces éléments.

Type de tâches 5 : sur les types de raisonnement

5.1 Faire un raisonnement direct.

5.2 Faire un raisonnement par l'absurde.

5.3 Faire un raisonnement par contraposée.

5.4 Faire un raisonnement par disjonction des cas.

5.5 Montrer qu'une proposition universelle est fausse à l'aide d'un contre-exemple.

5.6 Identifier un type de raisonnement.

5.7 Compléter une démonstration.

5.8 Compléter par « donc » ou par « car. »

Le type de raisonnement à faire est généralement indiqué dans l'exercice.

Hyperbole propose dans chaque chapitre une rubrique *Raisonner, démontrer* mais je n'ai pas pris en compte les exercices y figurant dans l'analyse car ils se distinguent en fait des autres exercices essentiellement parce qu'ils ne nécessitent pas seulement une application directe d'un résultat du cours.

La plupart des exercices sur les types de raisonnement se trouvent dans *Repères*, qui propose notamment en exercice identifié « logique » des démonstrations à compléter, comme l'exercice 22 page 110 :

22 Démonstration à trous ! Logique

1. Compléter la démonstration suivante en expliquant son but :

« Quelle que soit la valeur du nombre réel x, le nombre $(x-5)^2$ est toujours ...... ou ...... à ..., avec $(x-5)^2 = 0$ si, et seulement si, ...

Donc le nombre $2(x-5)^2$ est toujours ...... ou ...... à ..., avec $2(x-5)^2 = 0$ si, et seulement si, ...

Finalement, le nombre $2(x-5)^2+8$ est toujours ...... ou ...... à ..., avec $2(x-5)^2+8 = ...$ si, et seulement si, ...

Conclusion : Pour tout nombre réel x, le nombre $2(x-5)^2+8$ est ...... ou ...... à ... . Cela traduit le fait que la fonction f admet un ...... sur $\mathbb{R}$, qui vaut ..., atteint en ... . »

2. De quelle fonction f, polynôme de degré 2, parle-t-on ? Donner son expression développée.

FIGURE 6.39 – Exercice du manuel Repères sur les types de raisonnement

Des exercices se trouvent aussi dans les autres manuels mais sans être identifiés « logique ».

Le type de tâches 5.1 se distingue du type de tâches 3.4 (montrer une implication) en ceci que l'exercice prend à sa charge de poser les hypothèses. Par exemple, dans l'exercice 65 page 237 de *Déclic* :

65 Logique

1. *ABC* est un triangle isocèle en *A*. Démontrer qu'il a deux médianes de même longueur.*

2. Réciproquement, démontrer que si un triangle a deux médianes de même longueur, alors il est isocèle.

*** Conseil**

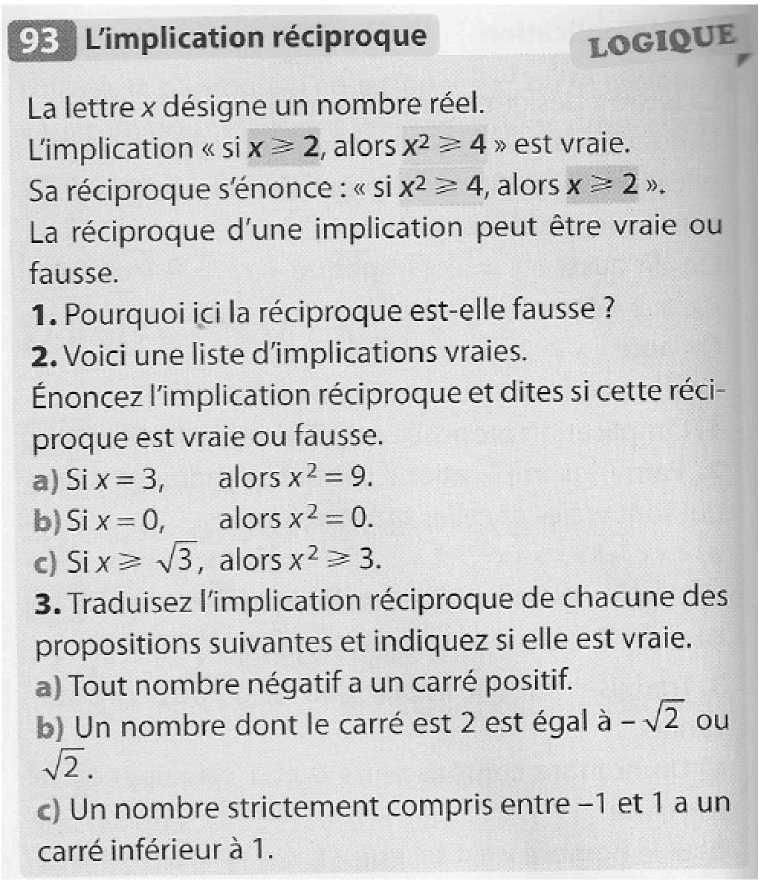
On peut utiliser un repère orthonormé d'origine I, milieu de [BC].

FIGURE 6.40 – Exercice du manuel Déclic sur les types de raisonnement

La première question est du type 5.1, la deuxième du type 3.4.

Type de tâches 6 : sur la reformulation

Seuls *Transmath* et *Math'x* proposent des exercices dont la reformulation est un objectif. Regardons par exemple la question 3 de l'exercice 93 page 84 de *Transmath* :



93 L'implication réciproque LOGIQUE

La lettre x désigne un nombre réel.
L'implication « si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ » est vraie.
Sa réciproque s'énonce : « si $x^2 \geqslant 4$, alors $x \geqslant 2$ ».
La réciproque d'une implication peut être vraie ou fausse.

1. Pourquoi ici la réciproque est-elle fausse ?

2. Voici une liste d'implications vraies.
Énoncez l'implication réciproque et dites si cette réciproque est vraie ou fausse.
a) Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$.
b) Si $x = 0$, alors $x^2 = 0$.
c) Si $x \geqslant \sqrt{3}$, alors $x^2 \geqslant 3$.

3. Traduisez l'implication réciproque de chacune des propositions suivantes et indiquez si elle est vraie.
a) Tout nombre négatif a un carré positif.
b) Un nombre dont le carré est 2 est égal à $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$.
c) Un nombre strictement compris entre -1 et 1 a un carré inférieur à 1.

FIGURE 6.41 – Exercice du manuel Transmath sur la reformulation (1)

Dans cette question 3, les propositions ne sont pas données sous forme d'implications. La consigne « traduisez » est ambiguë : est-ce que cela veut dire qu'il faut d'abord écrire les propositions sous forme d'implication avant d'énoncer la réciproque (notion qui n'est *a priori* définie que pour une proposition de la forme *si…, alors…*) ou au contraire qu'il faut formuler la réciproque sans passer par la forme *si…, alors…* ? Quoiqu'il en soit, un tel exercice permet de mettre en jeu beaucoup de reformulations, s'appuyant même éventuellement sur des propriétés logiques : par exemple, la proposition 3b est de la forme « $\forall x \in \mathbb{R}, \Big(x^2 = 2 \Rightarrow (x = \sqrt{2} \text{ OU } x = -\sqrt{2})\Big)$ », sa réciproque est alors « $\forall x, \Big((x = \sqrt{2} \text{ OU } x = -\sqrt{2}) \Rightarrow x^2 = 2\Big)$ », équivalente à « $\forall x, \Big((x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2) \text{ ET } (x = -\sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2)\Big)$ », équivalente à la formulation en langage courant : « $-\sqrt{2}$ a pour carré 2 et $\sqrt{2}$ a pour carré 2 »

Hormis ces reformulations d'implications implicites, ce manuel propose aussi des reformulations qui consistent à reconnaître des termes définis dans le cours dans des propositions dans lesquelles les quantifications sont explicites, comme par exemple dans l'exercice 59 page 201 :

59 **« Pour tout », « il existe »** LOGIQUE

d et *d'* sont deux droites. Pour chacune des propositions suivantes, que peut-on en déduire pour ces deux droites ?

P1 Il existe deux points A et B distincts appartenant à *d* et *d'*.

P2 Il existe un unique point A appartenant à *d* et *d'*.

P3 Pour tout point A de *d*, A n'appartient pas à *d'*.

FIGURE 6.42 – Exercice du manuel Transmath sur la reformulation (2)

Dans *Transmath* et *Math'x* sont proposées des tâches de reformulation consistant à traduire en langage ensembliste des propositions exprimées en langage courant, et réciproquement. Par exemple les questions 2b et 2c de l'exercice 49 page 213 de *Math'x* :

2. Désormais, E désigne l'ensemble des européens, A le sous-ensemble des artistes et B celui des Belges.
Xavier est un élément de E, noté x.

a. Écrire en langage courant (français) :
• $x \in A \cup B$ • $x \in \overline{A}$ • $x \in \overline{A} \cap B$

b. Écrire en langage formel (comme ci-dessus) :
• Xavier est artiste, mais n'est pas belge ;
• Xavier n'est ni artiste, ni belge ;
• Xavier n'est pas belge ou il est artiste.

c. En s'aidant des diagrammes de la question 1, donner la négation des phrases suivantes :
• Xavier est artiste ou belge ;
• Xavier est belge mais n'est pas artiste.

FIGURE 6.43 – Exercice du manuel Math'x sur la reformulation

6.2.3 Synthèse de l'analyse des exercices des manuels de 2010

Les tableaux ci-après récapitulent les données chiffrées en ce qui concerne les types de tâches sur les notions de logique proposées dans 5 manuels de Seconde publiés en 2010. Nous pouvons en tirer les observations suivantes :

– Il y a des disparités entre les manuels, que ce soit au niveau de la répartition des activités selon les différentes notions, ou au niveau des tâches proposées.
– Les exercices de type Vrai/Faux sur des implications (type de tâches 3.1) ou sur des propositions quantifiées (type de tâches 4.1) sont largement plus nombreux que les autres types de tâches. Notons par ailleurs que pour les implications, quand celles-ci sont vraies, la tâche consiste la plupart du temps à seulement repérer une propriété vue en cours. Nous avons vu que les exercices comportant des propositions quantifiées

se trouvaient essentiellement dans des chapitres où les variables sont astreintes à des ensembles de nombres.

– L'implication est de loin la notion qui est l'objet du plus grand nombre d'exercices. Le type de tâches largement privilégié est l'exercice Vrai/Faux. Sont très présentes également les tâches sur la vérité ou non de la réciproque, de l'équivalence, qui sont aussi du type Vrai/Faux.
– Les notions de proposition et de variable, dont nous avons souligné le rôle essentiel, ne sont l'objet de pratiquement aucune activité. Les tâches de reformulation sont, sauf rare exception, absentes des manuels.

Répartition des exercices par notion de logique (en pourcentage du nombre total d'exercices estampillés « logique »)

	Propositions	Connecteurs ET et OU	Négation	Implication	Équivalence	Il faut, il suffit condition suffisante, nécessaire	Quantificateurs	Types de raisonnement	Reformulation	non classé
Transmath	0	1,8	11	46,8	3,7	0	14,7	1,8	18,3	1, 8
Math'x	0,58	4	8,1	28,9	9,2	13,3	13,3	0,6	10,4	11,6
Hyperbole	1,7	1,7	4,3	37,6	6	6,8	27,3	0,8	0	13,7
Repères	2,9	7,8	2,9	27,7	8,7	1,6	17	17,4	0	14
Déclic	0	0	0	25	0	0	55,6	19,4	0	0
Total	1,5	4,4	5,6	32,6	7,1	5,2	19,5	7,8	5,6	10,6

Tableau par type de tâches par manuel

	0.1	0.2	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2	2.3	2.4	4.1	4.2	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	6	I
Transmath	0	0	1	0	1	0	0	4	1	7	0	16	0	1	1	0	0	0	0	0	0	20	2
Math'x	0	1	0	3	3	0	1	4	7	3	0	13	10	0	1	0	0	0	0	0	0	18	20
Hyperbole	2	0	0	2	0	0	0	0	2	2	1	29	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	16
Repères	7	0	0	4	0	15	0	1	2	4	0	7	34	3	2	2	1	4	6	12	12	0	34
Déclic	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
Total	9	1	1	9	4	15	1	9	12	16	1	85	47	7	5	2	1	8	6	12	12	38	72

	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16	3.17	3.18	3.19	3.20	3.21	3.22
Transmath	11	0	0	0	0	0	4	0	4	0	0	0	15	17	3	1	0	0	0	0	0	0
Math'x	22	0	11	0	4	3	0	9	0	0	6	1	1	5	4	0	11	7	5	0	0	0
Hyperbole	22	7	5	1	3	0	4	6	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	6	2	0
Repères	34	0	0	1	5	0	14	14	2	0	0	5	5	5	3	0	0	0	0	0	0	4
Déclic	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	97	7	16	3	12	3	22	29	6	1	6	6	21	29	10	1	11	7	5	6	2	4

Conclusion de l'analyse du savoir à enseigner

Dans les premières parties de cette thèse, je me suis intéressée à la partie externe de la transposition didactique des notions de logique au lycée, du *savoir savant* au *savoir à enseigner*. Nous avons vu une adaptation nécessaire du schéma classique de transposition : il ne s'agit pas directement de la transposition d'un savoir savant que serait la logique mathématique, mais de la transposition de connaissances à l'œuvre dans l'activité mathématique, ce que j'ai appelé *la logique des mathématiques*. J'ai alors proposé de rajouter dans le processus de transposition un *savoir de référence* intermédiaire entre le savoir savant et le savoir à enseigner. Mais un tel savoir de référence n'existe pas actuellement dans la communauté de l'enseignement des mathématiques. J'ai donc constitué une référence pour la suite de mon étude didactique, qui aborde les notions de logique de plusieurs points de vue, montrant ainsi toute la complexité de ces notions et de leur enseignement.

Dans cette troisième partie, j'ai cherché à voir comment cette complexité se retrouvait dans les textes produits pour l'enseignement de notions de logique.

Les notions de logique présentes dans les programmes et les manuels

La logique est présente dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1969, elle est l'objet d'un enseignement explicite jusqu'en 1981, pendant la période des mathématiques modernes. Elle est ensuite exclue des programmes jusqu'à un discret retour en 1999, plus marqué en 2009. Des notions de logique en tant que telles ne sont ainsi présentes que de 1969 à 1981 et depuis 2009, dans les programmes et dans les manuels.

Une différence importante distingue les deux époques en ce qui concerne la liste des notions présentes : dans les instructions accompagnant le programme de 1970, la notion de proposition est présentée avant toute autre, comme étant « un élément de base du raisonnement », et la notion de variable est également présente (il est question de « propositions dépendant d'une variable », c'est-à-dire dans lesquelles la variable est parlante, et de « propositions qui ont une valeur de vérité indépendante de la variable x », c'est-à-dire dans lesquelles la variable est muette[17]). Ces deux notions sont absentes du programme de 2009 et du document ressource l'accompagnant. Cette différence marque bien la volonté affichée pendant la période des mathématiques modernes d'un lien fort entre logique et langage. Au contraire, l'absence de ces notions dans les programmes et les manuels actuels est un frein à un travail sur les notions de logique associé au langage. Les connecteurs et les quantificateurs sont présents dans les deux périodes, avec des approches différentes quant à la formalisation que je préciserai ultérieurement.

Pour ce qui est des exercices mettant en jeu ces notions dans les manuels actuels, nous avons vu qu'ils étaient proposés dans des domaines mathématiques variés, même si la partie *Fonctions* du programme est plus investie, notamment avec des exercices de type Vrai/Faux sur des propositions quantifiées (ce qui s'explique par le fait que la majorité des quantifications explicitement présentes dans les manuels portent sur des variables astreintes à des ensembles de nombres). Les manuels jouent ainsi le jeu de la logique présente partout, notamment en proposant (et en étiquetant du logo « logique ») plusieurs exercices Vrai/Faux, et quitte à ce que certains exercices paraissent quelque peu artificiels.

Finalité de l'enseignement de notions de logique : équilibre entre langage et raisonnement

Dans tous les programmes étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais depuis 1981, il n'est pas relié à la logique mathématique. Durant la période des mathématiques modernes, comme depuis 2009, il est bien précisé cependant que l'enseignement de notions de logique n'est pas un but en soi, mais doit être fait de manière transversale. Entre 1969 et 1981, il y a un chapitre à part sur les notions de logique, mais dans le but d'un réinvestissement dans tous les autres chapitres. Depuis 2009, l'enseignement des notions de logique doit se faire au fil de l'étude des autres notions du programme.

Durant la période des mathématiques modernes, comme je l'ai déjà souligné à propos des notions de proposition et de variable, la logique est plus fortement associée le langage. Elle participe à l'apprentissage du langage mathématique, dont l'aspect formel est vu comme bénéfique pour la conceptualisation.

Dans le programme de 2009, le travail sur le raisonnement est davantage mis en avant. Il n'est pas question d'un langage mathématique spécifique, mais plutôt de précisions nécessaires sur l'utilisation de la langue courante en mathématiques. Nous retrouvons alors différents positionnements dans les manuels. Par exemple à propos des connecteurs

17. Seul ce deuxième terme est utilisé dans le document.

ET et OU, j'ai distingué une *approche propositionnelle*, dans laquelle il est question des propositions (A OU B) et (A ET B) et de leur vérité selon les vérités de A et de B, d'une *approche naturelle* qui se contente de préciser l'usage en mathématique (notamment pour le « ou » qui y est inclusif). La plupart des manuels proposent cependant quelques exercices sur les connecteurs ET et OU où il faut statuer sur la valeur de vérité d'une conjonction ou d'une disjonction. La technique à utiliser (regarder la valeur de vérité des composantes) n'est donnée en tant que telle dans aucun manuel. Dans le cas de l'approche propositionnelle, la présentation des connecteurs justifie la technique, dans le cas de l'approche naturelle, on ne trouve que des exemples de mise en œuvre de cette technique.

Niveau de formalisation des notions de logique

Durant la période des mathématiques modernes, la logique mathématique est clairement une référence pour l'enseignement de notions de logique. Les instructions accompagnant le programme de 1969 proposent quelque chose qui se rapproche d'un rapide cours de logique mathématique à destination des enseignants. Cependant, les manuels ne sont pas tous aussi proches de cette référence, nous avons vu par exemple que seuls deux des trois manuels de 1969 étudiés proposaient les tables de vérité des connecteurs. Les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique sont présents, des propriétés sont données qui permettent une manipulation formelle des énoncés mathématiques. Notons que dans cette période, le langage utilisé en classe de mathématiques au lycée est beaucoup plus formalisé qu'aujourd'hui. Il y a alors un réinvestissement naturel du travail sur les notions de logique à travers la compréhension et l'utilisation des énoncés.

Dans le programme et le document ressource de 2009, le discours sur les notions de logique reste en grande partie informel, et le document ressource, pourtant à destination des enseignants, ne propose aucun élément théorique. Cette absence de référence dans le programme se ressent dans les manuels actuels : le discours est assez différent d'un manuel à l'autre, il reste également en partie informel, et les notions de logique y sont même parfois malmenées [18]. Une conséquence immédiate de la défiance affichée vis-à-vis de la formalisation des notions est l'absence quasi totale de leur aspect syntaxique.

Prise en compte des points sensibles

Dans les instructions accompagnant le programme de 1969, plusieurs éléments de la complexité épistémologique des notions de logique sont présents : distinction entre variable parlante et variable muette, aspect d'opérateur sur les propositions des connecteurs, distinction entre implication entre propositions et implication universellement quantifiée…

18. On trouvera en annexe H page 533 plusieurs exercices qui posent de sérieux problèmes.

Cependant, la présentation des notions reste très centrée sur leur approche à partir de la logique mathématique. Les points sensibles concernant l'expression de ces notions dans le discours ne sont pas soulignés (ce qui s'explique par le fait qu'il y a l'idée d'un langage mathématique spécifique, les difficultés liées à l'utilisation de la langue courante sont alors censées disparaître), et il n'y a pas de proposition d'activités pour les élèves.

À l'inverse, le document ressource accompagnant le programme de 2009 propose plusieurs activités pour les élèves, aborde plusieurs confusions possibles entre langage mathématique et langage courant (principe du maximum d'information, passage d'un « et » à un « ou » dans la reformulation d'une proposition, implications entendues comme des équivalences...), mais ne donne pas d'éléments théoriques expliquant ces confusions. Certains de ces éléments sont repris dans les manuels, mais ceux-ci font également des confusions malheureuses (par exemple entre *si... alors* et *donc*, entre et-propositionnel et et-couple...).

Vers la formation des enseignants

Nous pourrions résumer très rapidement les résultats précédents en décrivant la situation actuelle en quelques mots : à un savoir de référence absent s'ajoute un savoir à enseigner imprécis. Il semble alors que les professeurs de lycée d'aujourd'hui pourraient légitimement se sentir en difficulté pour proposer à leurs élèves un enseignement de notions de logique permettant d'atteindre les objectifs du programme. Une suite naturelle au travail que j'ai déjà mené jusqu'ici pourrait être d'aller voir ce qu'il en est vraiment, en se donnant les moyens d'analyser le savoir enseigné, et de comprendre les pratiques des professeurs. Ce n'est pas le chemin que j'ai suivi. J'ai effectivement choisi de rester « en dehors de la classe », et de poursuivre la réflexion en m'intéressant aux questions de formation. Dans ce contexte particulièrement complexe en ce qui concerne les notions de logique, la formation des enseignants est d'autant plus importante. Or, je rappelle que la logique mathématique est absente de la plupart des cursus universitaires de mathématiques. De plus, l'enseignement de notions de logique n'était plus explicitement au programme entre 1981 et 2009, et nous pouvons supposer que les difficultés des élèves relevant de la logique étaient peu étudiées dans la formation des enseignants. Puisque depuis 2009 les programmes mentionnent de nouveau des notions de logique, il est légitime de se poser la question de ce qu'il est possible de proposer dans le cadre de la formation.

Quatrième partie

Analyse d'une formation continue « Initiation à la logique »

De façon à me rapprocher du *savoir enseigné*, tout en restant en amont de celui-ci, je vais m'intéresser à la formation des enseignants en m'appuyant sur les résultats des premières parties. Dans le premier chapitre de cette quatrième partie je décris des besoins de formation en croisant des *besoins supposés* dégagés des premières parties de la thèse avec des *besoins ressentis* issus de l'analyse des réponses à un questionnaire proposé à des enseignants de Seconde.

J'analyse ensuite une formation particulière : la formation « Initiation à la logique », proposée par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Paris dans le cadre de la formation continue des enseignants. Bien que participant activement au stage et à sa conception, je prends pour ma recherche une position distanciée pour pouvoir questionner les choix d'organisation et de contenu de la formation. Ma troisième question de recherche porte sur cette formation :

La formation permet-elle la constitution d'un savoir de référence utile aux enseignants pour appréhender la complexité des notions de logique et les intégrer efficacement dans leur enseignement ?

Un axe très fort cette formation est une approche naïve de la logique mathématique à partir de l'étude du discours mathématique. R. Cori a été l'initiateur de cette formation, et nous retrouverons en grande partie l'approche choisie pour la référence proposée dans la deuxième partie de la thèse.

L'analyse de cette formation particulière me permet également une validation expérimentale de cette référence. Je regarde en particulier quelle stratégie de formation est mise en place par les formateurs pour que les enseignants prennent conscience de la nécessité d'avoir un regard critique sur les pratiques langagières des mathématiciens qui peuvent poser des problèmes aux élèves. Dans le deuxième chapitre de cette partie, je présente une analyse de la première journée du stage (qui en comporte trois), puis dans le troisième chapitre, je donne quelques éléments des effets de la formation essentiellement à partir d'un questionnaire-bilan proposé aux stagiaires.

Chapitre 7

Les besoins de formation : analyse d'un questionnaire à destination des professeurs de Seconde

Sommaire

À partir des résultats des premières parties de cette thèse, je retiens cinq sources principales de difficultés pour l'enseignement des notions de logique :

1. il n'y a pas de savoir de référence : il ne s'agit pas d'enseigner des notions traitées comme des objets mathématiques, mais d'enseigner des notions qui appartiennent plutôt aux outils du mathématicien. Il n'y a pas de mise en forme stabilisée des connaissances nécessaires à l'utilisation de ces outils qui fasse consensus.
2. Le savoir à enseigner est mal défini : les textes institutionnels actuels (programmes et document ressource) apportent peu de précisions quant aux notions à enseigner : ils ne comblent pas l'absence de savoir de référence évoquée dans le point précédent, les exemples de tâches pour les élèves y sont accompagnés d'une analyse assez pauvre des apprentissages visés ou possibles. D'un manuel à l'autre on trouve des approches très diverses, ce qui témoigne du flou autour des objectifs d'apprentissage… et contribue à l'entretenir.
3. Il y a une contrainte sur l'organisation de l'enseignement : les notions de logique doivent être abordées au fur et à mesure des chapitres, elles ne doivent pas faire l'objet d'un cours, mais éventuellement de temps de synthèse après avoir été rencontrées plusieurs fois en situation.
4. Il y a une hétérogénéité des connaissances des professeurs en logique : certains n'en ont aucune puisque la logique ne fait pas partie de la formation initiale classique, d'autres ont choisi de suivre un cours de logique mathématique dans leur cursus, ou l'ont abordée rapidement au début de leurs études supérieures, ou ont été élèves dans les années soixante-dix.
5. La place de la logique dans les programmes est instable : durant la période des mathématiques modernes, la logique a eu une place importante, associée à l'apprentissage du langage mathématique. Mais dans les décennies qui ont suivi la logique a été, au contraire, exclue des programmes. Ces mouvements, et les vives polémiques qui les ont accompagnés, ont encore une influence sur l'enseignement des mathématiques aujourd'hui.

J'ai élaboré un questionnaire à destination des enseignants (particulièrement des enseignants de lycée et notamment de Seconde) afin de voir s'ils ressentaient ces difficultés. Ce questionnaire avait pour but de dégager quelques traits des pratiques des enseignants en matière d'enseignement des notions de logique, et de mesurer l'impact éventuel de leur réapparition dans les programmes. Avec les résultats de ce questionnaire, je cherche une validation expérimentale du fait que l'on peut considérer les points listés ci-dessus comme des besoins de formation.

7.1 Modalités de passation du questionnaire

Il était proposé aux enseignants de répondre au questionnaire en ligne en se connectant à un site dédié. Il était également possible de télécharger une version électronique du questionnaire à remplir et à me renvoyer (3 personnes seulement ont répondu de cette façon). Cette version est proposée en annexe page 539.

Les réponses proviennent essentiellement de deux canaux :
– une diffusion par mail, notamment sur la liste Adirem pour que les directeurs d'IREM transmettent à leurs animateurs.
– Les stagiaires des stages de formation continue « Initiation à la logique » proposés par l'IREM de Paris. J'avais demandé aux rectorats de diffuser le questionnaire en novembre 2011 afin que les participants au stage en janvier 2012 l'aient rempli, mais je n'ai eu que peu de réponses. Lors du stage 2013, j'ai donc plutôt distribué le questionnaire en version papier [1] lors de la première journée de stage, en laissant les stagiaires le remplir chez eux.

J'ai finalement obtenu 50 réponses : 40 personnes ont rempli le questionnaire en ligne (dont 10 participants au stage 2012), 3 personnes ont téléchargé le questionnaire et me l'ont renvoyé par mail, 7 participants du stage 2013 ont rempli un questionnaire papier.

Le public à qui le questionnaire a été adressé (animateurs IREM et stagiaires), ainsi que le fait que n'ont répondu que des personnes qui ont bien voulu de le faire, sont des biais que j'aurai à l'esprit tout au long de l'analyse.

7.2 Caractéristiques générales des enseignants qui ont répondu

Les premières questions portaient sur des caractéristiques susceptibles d'avoir une influence sur les pratiques des enseignants en matière d'enseignement de notions de logique :
– l'année d'obtention du bac. Elle nous renseigne tout d'abord sur l'ancienneté dans le métier (même si certains enseignants pourraient avoir exercé un autre métier avant, mais cela est plutôt rare), et sur la place de la logique dans l'enseignement du temps où ils étaient eux-même élèves. Des enseignants ayant été élèves durant la période des mathématiques modernes ont au moins des bribes, même lointaines, de formation théorique et une certaine connaissance d'une façon possible d'enseigner des notions de logique, qu'ils la considèrent positivement ou non. Le découpage que j'ai choisi pour les réponses suit donc l'histoire de la logique dans l'enseignement au lycée, et j'ai délimité des périodes à l'intérieur desquelles je considère que l'ancienneté n'a pas une grande

1. J'avais supprimé quelques questions pour réduire le temps nécessaire pour le remplir.

influence :
- les personnes ayant eu leur bac avant 1980, qui ont eu dans leur parcours scolaire la réforme des mathématiques modernes,
- les personnes ayant eu leur bac entre 1980 et 1989, première décennie de la période de la contre-réforme, pendant laquelle l'influence de la période des mathématiques modernes se fait encore sentir.
- les personnes ayant eu leur bac entre 1990 et 1999, deuxième décennie de la période de la contre-réforme,
- les personnes ayant eu leur bac depuis 2000, qui sont encore dans les premières années du métier.

– L'ancienneté dans l'enseignement en classe de Seconde. C'est également un élément important car cette classe présente, par rapport aux autres classes du lycée, la particularité de ne pas être spécialisée. À ce niveau, l'hétérogénéité des élèves ne concerne pas que le « niveau en maths », mais aussi la motivation vis-à-vis des mathématiques, à un degré peut-être plus extrême qu'en Première ou en Terminale.
– La formation en logique mathématique durant la formation initiale. Ces renseignements étaient demandés en fin de questionnaire pour ne pas forcer l'association enseignement de notions de logique/logique mathématique. J'ai classé les réponses pour la formation initiale en 5 niveaux :
- niveau 0 : aucune formation en logique mathématique,
- niveau 1 : élève pendant la période des mathématiques modernes et pas d'autre formation,
- niveau 2 : une initiation en classe préparatoire ou en début d'université,
- niveau 3 : un cours de logique spécifique dans le cursus universitaire,
- niveau 4 : formation universitaire en logique mathématique.

Les tableaux ci-dessous donnent les résultats pour chaque caractéristique :

Pour l'année d'obtention du bac [2] :

Année d'obtention du bac	Avant 1980	Entre 1980 et 1989	Entre 1990 et 1999	Depuis 2000
Nombre d'enseignants	12	9	20	8

FIGURE 7.1 – Année d'obtention du bac des enseignants

Pour l'ancienneté en Seconde [3] :

Ancienneté en Seconde	Moins de 3	Entre 3 et 5 ans	Entre 6 et 10 ans	Plus de 10 ans
Nombre d'enseignants	10	11	11	16

FIGURE 7.2 – Ancienneté en Seconde des enseignants

2. 1 personne n'a pas répondu à cette question.
3. 2 personnes n'ont pas répondu à cette question.

Pour la formation en logique pendant la formation initiale :

Niveau de formation	0	1	2	3	4
Nombre d'enseignants	15	6	22	4	3

FIGURE 7.3 – Niveau de formation en logique des enseignants

Le *savoir à enseigner* étant imprécis, nous pouvons faire l'hypothèse que les différences de formation en logique dans la formation initiale, visibles à travers les résultats ci-dessus, sont particulièrement influentes. Elles rendent d'autant plus difficile la constitution d'un savoir de référence pour l'enseignement de notions de logique. Elles peuvent expliquer en partie les différences constatées dans les manuels de 2010 (cette même diversité des connaissances se retrouvant chez les auteurs de ces manuels).

Le tableau ci-après récapitule l'ensemble des résultats pour ces données[4] :

	Bac avant 1980					Bac entre 1980 et 1989					Bac entre 1990 et 1999					Bac depuis 2000				
Niveau de formation en logique	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
Ancienneté en $2^{\text{nde}}<3$	1										2				1	1		2		1
$3 \leqslant$ Ancienneté en $2^{\text{nde}} \leqslant 5$						1					2		4	1		1		3		
$6 \leqslant$Ancienneté en $2^{\text{nde}}\leqslant 10$			1			1			1	1	3		3	1						
Ancienneté en $2^{\text{nde}}>10$		4	5	1			2	2			2									

FIGURE 7.4 – Caractéristiques générales des enseignants ayant répondu

Ce tableau confirme surtout l'hétérogénéité des connaissances en logique mathématiques des enseignants de Seconde. Parmi ceux qui ont répondu au questionnaire :

- la quasi totalité[5] des enseignants qui ont été élèves pendant la période des mathématiques modernes ont des connaissances en logique mathématique, acquises au lycée (puisqu'un enseignement de notions de logique basé sur la logique mathématique était explicitement au programme) et complétées pour certains d'entre eux dans le supérieur (3 enseignants ayant eu leur bac peu après 1980 ont eu également une initiation à la logique mathématique au lycée, ce qui signifie que certains enseignants ont poursuivi un tel enseignement bien qu'il ne soit plus recommandé par le programme).
- Un nombre important d'enseignants (14) ayant eu leur bac après 1980 n'a aucune formation en logique mathématique.
- 22 enseignants ont eu une initiation à la logique mathématique au début de leur études supérieures. Cette pratique semble être constante depuis plusieurs décennies.
- Les enseignants choisissant de faire de la logique dans leur parcours universitaire sont peu nombreux, et sont présents dans toutes les catégories dans la répartition par année d'obtention du bac.

4. Les cases vides correspondent à 0.
5. Une seule personne ayant été élève pendant les mathématiques modernes a répondu qu'elle n'avait pas eu de formation en logique mathématique pendant sa formation initiale.

7.3 Mise en place d'un enseignement de notions de logique et notions travaillées dans la classe

Je présente ici les réponses à la question 3 : **Travaillez-vous sur des notions de logique avec vos élèves de Seconde ?** :

		Déjà avant les nouveaux programmes de 2009			
		OUI	NON	N'enseignait pas	Total
Depuis les nouveaux programmes de 2009	OUI	22	15	9	46
	NON	0	3	1	4
	Total	22	18	10	50

FIGURE 7.5 – Travail sur des notions de logique avant/après 2009

Une bonne moitié des enseignants interrogés intégraient déjà un travail sur ces notions avant que cela ne soit explicitement préconisé par le programme. On peut penser que cela correspond à l'idée très répandue que la logique fait de toute façon partie de l'activité mathématique.

Le nouveau programme a cependant eu une influence, puisque 15 enseignants qui disaient ne pas travailler sur des notions de logique avant les programmes de 2009 disent le faire depuis. Par ailleurs, 9 des 10 enseignants qui n'enseignaient pas avant 2009 proposent un tel travail. Pour ces enseignants, les notions de logique font donc pleinement partie des notions à enseigner [6].

Les 4 enseignants qui disent ne pas travailler actuellement sur des notions de logique, malgré les objectifs fixés par le programme, ont tous un niveau 2 de formation en logique mathématique durant la formation initiale. Leur choix n'est donc pas justifié par l'absence complète de formation en logique mathématique : un seul d'entre eux trouve ses connaissances en logique insuffisantes, pour les trois autres, c'est surtout la difficulté à concevoir des activités qui semble les arrêter (je croise ici les résultats de cette question avec les résultats de la question 5 que nous verrons ultérieurement). Deux d'entre eux

6. La proportion importante d'enseignants ayant répondu qu'ils travaillaient actuellement sur des notions de logique est bien sûr un résultat à relativiser d'une part parce que la moitié des professeurs ayant répondu s'étaient volontairement inscrits à un stage de formation sur la logique, dans l'optique d'intégrer un travail sur des notions de logique à leur enseignement. D'autre part, on peut penser qu'un professeur qui n'aurait pas mis en place un tel travail n'est pas particulièrement motivé pour répondre à un questionnaire sur ce sujet.

sont des enseignants qui ont été élèves au temps des mathématiques modernes, et qui ont une grande ancienneté en tant que professeur de Seconde. Ce qu'il ont vécu au moment des mathématiques modernes ne fonctionne donc pas comme un modèle (nous avons vu que la demande était effectivement bien différente).

Nous allons maintenant voir quelles sont les notions de logique qui doivent, selon les enseignants, être travaillées dans la classe de mathématiques. À partir des réponses à la question 4 : **Quelles sont selon vous les notions de logique qui doivent être travaillées en cours de mathématiques au lycée ? Qu'ont à apprendre les élèves sur ces notions ? Y a t-il des thèmes mathématiques (chapitres) privilégiés pour ce travail ?**, j'ai fait deux analyses lexicographiques.

La première analyse concerne la première partie de la question. Je me suis appuyée sur la liste des notions évoquées par le programme, auxquelles j'ai ajouté la notion de proposition et la notion de variable, comme dans le reste de cette recherche :
- le mot « variable » n'apparaît dans aucune réponse, et même il n'y a rien qui suggère l'idée de cette notion.
- le mot « proposition » apparaît dans 4 réponses, mais dans 3 d'entre elles, il est associé à d'autres termes (« proposition directe et réciproque », « négation d'une proposition », « démontrer qu'une proposition générale est vraie ou fausse »).

Ceci confirme ce qui avait déjà été observé dans les manuels : la notion de variable ne semble pas être vue comme méritant un travail particulier et la notion de proposition, parfois présente au niveau du vocabulaire utilisé, n'est pas non plus vue comme une notion à travailler pour elle-même.

Pour ce qui est des connecteurs ET et OU et de l'implication, j'ai différencié deux formes de présence de ces notions. J'ai parlé de forme « objet » quand le nom du connecteur apparaissait (connecteur ET et OU, ou disjonction et conjonction, implication), que j'ai distingué d'une forme « langagière » quand seule l'expression de ce connecteur dans le discours apparaissait (c'est-à-dire quand apparaissaient seulement les mots « et », « ou », « si… alors »). Les résultats en nombre d'apparition des termes (un terme n'est compté qu'une fois par réponse, même s'il apparaît plusieurs fois) sont les suivants [7] :

Connecteurs ET/OU	Négation	Implication	Quantificateurs
22 (9 forme « objet », 13 forme « langagière »)	15	37 (32 forme « objet », 5 forme « langagière »)	21

FIGURE 7.6 – Nombre de mentions des termes dans les notions à travailler, pour les connecteurs et les quantificateurs

La notion d'implication est très présente dans les réponses, comme nous pouvions nous y attendre vu son rôle central dans l'expression de la plupart des théorèmes et dans le

7. 3 enseignants n'ont pas répondu

raisonnement déductif. On peut dire qu'elle y est presque tout le temps présente, car 9 des 10 réponses qui ne mentionnent pas l'implication en tant que telle, mentionnent des notions qui lui sont associées, telles que réciproque, contraposée, équivalence.

Les connecteurs ET et OU et les quantificateurs apparaissent dans un peu moins de la moitié des réponses, et la négation dans moins d'un tiers des réponses. Notons que les raisons qui poussent à ne pas mentionner ces dernières notions peuvent être opposées : les connecteurs ET et OU peuvent être considérées comme des notions ne posant pas de problème, et donc qui n'ont pas besoin d'être explicitement travaillées, alors que la négation et les quantificateurs peuvent être considérées comme des notions trop difficiles, et donc à éviter. Une interprétation possible de ces réponses amène à nuancer l'influence du programme supposée par les réponses à la question 3. En effet, les connecteurs ET et OU, la négation, les quantificateurs sont explicitement cités par les programmes. Les enseignants interrogés semblent donc choisir dans ce programme des éléments qui leur paraissent plus importants que d'autres.

J'ai également relevé d'autres termes :
– des termes associés à la notion d'implication : les termes « conditions nécessaires, conditions suffisantes » apparaissent 7 fois, le terme « réciproque » apparaît 17 fois, le terme « contraposée » 21 fois, le terme « équivalence » 36 fois (32 fois sous forme « objet », 4 fois sous forme « langagière »).
– Le terme « raisonnement » apparaît 29 fois, ce qui confirme que ce pilier de la logique est plus reconnu que le pilier langage.
– Les notions ensemblistes apparaissent 14 fois. Le travail sur ces notions est donc, pour certains enseignants, associé à la logique, comme c'était le cas au temps des mathématiques modernes. Nous avons cependant vu dans l'analyse des manuels de 2010 que le lien n'était pas fait comme à cette époque entre ensembles et propositions, en considérant l'ensemble des éléments vérifiant une proposition ouverte, mais seulement à travers l'association entre connecteurs ET et OU et intersection et réunion.

La deuxième analyse concerne les domaines ou chapitres du programme privilégiés pour le travail sur des notions de logique. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'occurrences des principaux domaines évoqués :

Équations	Inéquations	Fonctions	Intervalles	Ensembles	Probabilités	Géométrie	Algorithmique
10	5	8	8	8	14	17	5

FIGURE 7.7 – Domaines où il est pertinent de travailler sur des notions de logique

Bien qu'elle soit de moins en moins présente dans les programmes, la géométrie reste le lieu privilégié de la logique, notamment associée au raisonnement et à la démonstration, et à tout ce qui tourne autour de l'implication (formulations en *si. . .*, *alors. . .*, réciproque, contraposée, équivalence). Le domaine des probabilités est aussi très présent dans les réponses, souvent associé aux connecteurs ET et OU ou avec les notions ensemblistes. Le domaine des équations et inéquations est souvent mis en relation avec l'implication et l'équivalence. Nous retrouvons dans ces réponses les mêmes associations notions de logique/domaine pertinent pour les travailler que dans le document ressource de 2009 ou dans les propositions d'exercices des manuels.

7.4 Connaissances en logique mathématique et activités trouvées ou conçues pour atteindre les objectifs fixés par le programme

La question 5 interroge les enseignants sur leur sentiment par rapport à leurs connaissances mathématiques et didactiques pour un enseignement de notions de logique : **Dans l'introduction au nouveau programme de mathématiques pour la classe de Seconde de juillet 2009 figure un paragraphe intitulé « raisonnement et langage mathématiques ». Une partie de ce paragraphe était déjà présente dans le programme de 2001, mais il est complété en 2009 et accompagné d'un tableau fixant des objectifs pour le lycée en matière de notations et raisonnement. Pour construire un enseignement permettant d'atteindre les objectifs fixés par le programme :**

- **Vos connaissances en matière de logique mathématique vous paraissent-elles suffisantes ?**
- **Avez-vous trouvé ou conçu facilement des activités à proposer à vos élèves ?**

Je présente les réponses à ces questions[8] dans le tableau à double entrée ci-après. J'y ai différencié les enseignants qui se sont inscrits à un stage de formation continue sur la logique (FC) :

		Connaissances suffisantes		
		OUI	NON	Total
Activités trouvées ou conçues facilement	OUI	15 (dont 4 FC)	6 (dont 3 FC)	21 (dont 7 FC)
	NON	19 (dont 11 FC)	8 (dont 7 FC)	27 (dont 18 FC)
	Total	34 (dont 15 FC)	14 (dont 10 FC)	48 (dont 25 FC)

FIGURE 7.8 – Connaissances suffisantes et activités trouvées ou conçues facilement

8. 2 enseignants n'ont pas répondu à la deuxième question, je n'ai donc considéré dans toute cette partie que 48 réponses.

Même si l'on peut faire l'hypothèse que la catégorie des enseignants qui pensent que leurs connaissances en logique ne sont pas suffisantes est sur-représentée sur l'ensemble des réponses, en raison des inscrits à un stage de formation continue qui représentent la moitié des réponses, ce sentiment existe chez un nombre non négligeable d'enseignants. Je rappelle que le document ressource qui accompagne le programme de 2009 ne prend pas du tout en compte ce besoin de formation théorique, et ne propose rien qui aille dans ce sens. Parmi les 14 enseignants qui disent que leurs connaissances ne sont pas suffisantes, 8 ont un niveau 0 de formation en logique, 2 ont un niveau 1 et 4 ont un niveau 2, dont 2 qui ont été élèves au temps des mathématiques modernes, et 2 plus jeunes. L'analyse du programme et des manuels de 1969 montre qu'il y avait à l'époque un cours assez complet sur les bases de la logique mathématique, au moins pour ce qui est de la logique propositionnelle. Nous pouvons faire l'hypothèse que c'est également le cas des initiations proposées en début du supérieur. Cela n'est pourtant pas suffisant pour ces 6 enseignants. Une première explication possible est que de voir ces connaissances dans un contexte isolé, déconnecté de l'activité mathématique et de l'enseignement, ne leur semble pas suffisant. Une autre explication possible est que ces enseignants ressentent le besoin de connaissances qui dépassent assez largement ce qui va être en jeu dans leurs classes, pour pouvoir avoir du recul. Une dernière explication confirmerait un point de vue déjà évoqué dans ce travail : la logique propositionnelle est insuffisante pour faire des mathématiques, et ce sentiment d'insuffisance peut être dû au fait que c'est surtout cette logique qui a été travaillée.

Ce sentiment de connaissances insuffisantes est cependant minoritaire, même parmi les enseignants qui se sont inscrits à une formation continue sur la logique. Une majorité des enseignants considèrent leurs connaissances suffisantes, et ce même parmi les enseignants de niveau 0 en formation en logique mathématique (6 sur 15). D'où la nécessité, quand on élabore une telle formation, de justifier l'éventuelle présence de ces contenus théoriques, et de remettre en cause ce sentiment de connaissances suffisantes (sentiment que j'ai déjà évoqué, qui peut être dû à une initiation pendant la formation initiale, ou au fait que les enseignants ont su mettre en œuvre ces connaissances dans leur propre pratique mathématique).

Un nombre important d'enseignants disent ne pas avoir trouvé ou conçu facilement des activités pour atteindre les objectifs fixés par le programme (ils sont largement majoritaires parmi les enseignants qui se sont inscrits à un stage de formation continue, et représentent une petite moitié parmi les autres enseignants). Le tableau suivant croise les réponses à cet aspect de la question 5 avec le niveau de formation en logique [9] :

Activités trouvées ou conçues facilement \ Niveau de formation	0	1	2	3	4
OUI	7	3	7	3	1
NON	7	3	14	1	2

FIGURE 7.9 – Activités trouvées ou conçues facilement selon le niveau de formation en logique

Les enseignants qui ont un niveau 0 de formation en logique ne se sentent pas moins armés que les autres pour trouver ou concevoir des activités pour atteindre les objectifs fixés par le programme sur les notions de logique. Ces résultats donnent l'impression que cela est plutôt une difficulté pour des enseignants qui ont un niveau 2 au moins de formation. L'analyse des exercices proposés par les manuels ayant mis en évidence de nombreuses difficultés, on peut penser que cela est du au fait que les quelques connaissances, même minimales, de certains enseignants les incitent plutôt à ne pas utiliser ces exercices.

7.5 Recours à des ressources

Seulement 27 enseignants ont consulté le document ressource de 2009, et parmi eux moins de la moitié disent y avoir trouvé des pistes intéressantes, notamment des idées d'activités à proposer. 18 enseignants ont consulté d'autres documents, notamment des sites sur internet, des travaux issus des IREM ou de l'APMEP, plusieurs manuels de Seconde. Certains d'entre eux ont apprécié la diversité des activités qu'ils y ont trouvées. Le tableau suivant donne les résultats de la consultation de ressources (document ressource de 2009 ou autres) croisés avec la facilité à concevoir ou trouver des activités pour travailler sur des notions de logique :

Activités conçues ou trouvées facilement					
NON (27 réponses)			OUI (21 réponses)		
Aucune ressource consultée	Document ressource de 2009 consulté	Autres ressources consultées	Aucune ressource consultée	Document ressource de 2009 consulté	Autres ressources consultées
14	10 (dont 3 aussi autres ressources)	6 (dont 3 aussi document ressource)	2	15 (dont 7 aussi autres ressources)	11 (dont 7 aussi document ressource)

FIGURE 7.10 – Activités trouvées ou conçues facilement selon la consultation de ressources

9. J'ai également croisé ces résultats avec l'ancienneté, mais cela ne donnait pas de résultats significatifs.

16 enseignants n'ont donc consulté aucune ressource, mais parmi eux, 2 n'ont pas eu de mal à trouver ou concevoir des activités. Je signale que parmi les 14 autres, 10 se sont inscrits à un stage de formation continue. Il reste donc finalement très peu d'enseignants qui ne trouvent pas d'activités et n'en cherchent pas. Ainsi, les enseignants jouent le jeu des objectifs fixés par le programme, et cherchent des activités pour les atteindre. Mais malheureusement, ils ne trouvent pas facilement des activités satisfaisantes. L'analyse du document ressource de 2009 a montré qu'il était effectivement insuffisant, et nous avions déjà noté que l'absence de la logique des programmes entre 1980 et 2009 avait notamment eu pour conséquence le manque de ressources sur les questions d'enseignement des notions de logique.

7.6 Mise en forme de l'enseignement de notions de logique et institutionnalisation des connaissances

Nous avons vu que le programme prônait une certaine ligne de conduite quant à l'enseignement des notions de logique : il ne s'agit pas d'en faire des objets explicites d'enseignement, mais seulement de souligner les nombreux moments où elles sont des outils importants dans l'activité mathématique. C'est à partir d'un extrait du programme que j'ai proposé aux enseignants de réagir sur cette ligne de conduite dans la question 8 : **Le programme de Seconde précise que "les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme". Selon vous, est-ce effectivement comme cela que doivent être enseignées des notions de logique ? Si oui, pourquoi ? Si non, quelle autre forme serait plus appropriée ?**

Le tableau ci-dessous donne les réponses à la première partie de la question :

Réponse positive	Réponse négative	Réponse mitigée	Absence de réponse
20	6	21	3

FIGURE 7.11 – Approbation de la ligne de conduite fixée par le programme

Une analyse plus en détail des réponses que j'ai qualifiées de « mitigées » montre que la majorité des enseignants approuvent la ligne de conduite du programme. 18 d'entre eux mettent en avant la nécessité d'un travail sur le long terme, présent au fur et à mesure des chapitres, ce que l'on retrouve par exemple dans la réponse suivante : « Il me paraît naturel d'introduire et de diffuser la notion de logique et de raisonnement tout au long de l'année, ne serait-ce que parce que cela fait partie des bases même des mathématiques ». 8 enseignants approuvent particulièrement la dimension outil préconisée par le programme, ce qu'illustre par exemple la réponse suivante : « Oui. Car il est nécessaire d'expliquer et d'expliciter une notion lorsqu'on en a besoin. Le cours devient un instrument qui permet de réussir ». 12 enseignants insistent sur le fait de ne pas faire de cours séparé, de ne pas être trop formel, ou trop abstrait (parmi eux, 5 précisent que cette précaution vaut surtout en Seconde), comme on le voit par exemple dans les réponses suivantes : « Sujet à traiter en permanence (transversal) et sans aucun formalisme (en Seconde...) », « Un cours spécifique sur la logique risque à mon avis de noyer les élèves dans un excès de formalisme ».

Cependant, 15 enseignants nuancent cette approbation, notamment en soutenant qu'une mise au point sur les notions de logique est tout de même nécessaire (12 réponses, par exemple : « Il est nécessaire de réaliser des synthèses régulièrement sinon les élèves ne prennent pas de recul par rapport à ce qu'ils font. »), ou qu'un chapitre introductif serait pertinent (3 réponses, par exemple : « Je pense que quelques cours de logique ne seraient pas inutiles. Avec les grands types de raisonnement accompagnés d'exemples. Un bilan clair en début de Seconde, illustré de choses de collège suffirait. Sans y passer des dizaines d'heures, mais pour avoir une sorte de "catalogue" auquel se référer régulièrement dans l'année. »). Cette nuance correspond finalement au choix fait par la plupart des manuels, qui intègrent des pages spécifiquement consacrées aux notions de logique.

4 enseignants nuancent également leur approbation car ils considèrent que cela peut être une difficulté pour les élèves de travailler en même temps sur des notions de logiques et sur des notions mathématiques nouvelles, nous le voyons par exemple dans la réponse suivante : « C'est difficile en Seconde d'introduire une notion de logique avec tout le vocabulaire que cela implique, au milieu d'un cours sur les fonctions par exemple... Je trouve que les élèves ont du mal à comprendre plusieurs notions en même temps ».

Le principal motif de désapprobation de la ligne de conduite du programme est la question de l'institutionnalisation. 4 enseignants revendiquent la nécessité de faire un cours spécifique, comme par exemple dans la réponse suivante : « Je ne pense pas que l'on puisse apprendre des mathématiques en "saupoudrage", il me semble donc plus indiqué de faire un petit chapitre de logique et de l'illustrer au travers des autres chapitres », mais cette position reste très minoritaire. 2 d'entre eux seulement suggèrent explicitement un cours formel. Ces deux enseignants ont été élèves à l'époque des mathématiques modernes, et nous pouvons faire l'hypothèse que ce qui se faisait à l'époque fonctionne pour eux comme un modèle. Ce n'est cependant pas le cas de la plupart des enseignants de cette ancienneté, qui ont bien compris qu'il ne s'agissait pas de revenir à un tel enseignement des notions de logique. 1 enseignante suggère plutôt des « synthèses régulières », et 1 enseignant enfin considère que le programme n'est pas adapté à un travail sur des notions de logique.

Cette tendance à considérer comme pertinent de proposer des temps de synthèse est confirmée par les réponses à la question 9 : **Dans le programme de 1ère de 2010, le commentaire évoqué dans la question 8 est complété par "Il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types**

de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation." Ces moments d'institutionnalisation vous semblent-ils effectivement nécessaires ? Pourquoi ? Le tableau ci-dessous donne les réponses à la première partie de cette question :

Réponse positive	Réponse négative	Réponse mitigée	Pas d'avis	Absence de réponse
38	1	3	2	6

FIGURE 7.12 – Approbation des moments d'institutionnalisation des notions de logique dans les programmes de Première

En cohérence avec les réserves apparues dans les réponses à la question 8 sur le programme de Seconde, la modification faite dans le programme de Première sur l'institutionnalisation est jugée positive par la plupart des enseignants. Nous avions vu que pour certains enseignants, c'était quelque chose d'important dès la Seconde, pour quelques autres c'est plus important à partir de la Première, et particulièrement dans le cursus scientifique.

Même si la majorité des enseignants se montrent favorables à une telle institutionnalisation, l'absence de savoir de référence la rend *a priori* délicate. Nous avons vu que les institutionnalisations proposées par les manuels n'étaient pas du tout homogènes, il va donc y avoir une « touche personnelle » de chaque enseignant plus forte que pour l'institutionnalisation d'autres notions du programme. J'ai cherché à en savoir un peu plus sur les pratiques effectives d'institutionnalisation. J'ai d'abord proposé une question assez générale [10], la question 10 : **De votre côté, avez-vous mis en place de tels moments d'institutionnalisation avec vos classes de Seconde en 2010-2011 ?** Les réponses sont présentées dans le tableau ci-dessous [11] :

	Oui	Non
Sur les connecteurs ET et OU	24	24
Sur la négation	18	29
Sur les quantificateurs	14	33
Sur l'implication	28	19
Sur l'équivalence	29	19
Sur les différents types de raisonnement (par l'absurde, par disjonction des cas, par contraposée)	18	29

FIGURE 7.13 – Notions sur lesquelles des institutionnalisations ont été proposées

4 enseignants seulement ont proposé des institutionnalisations sur toutes les notions listées. Les enseignants se démarquent ici des manuels dont la moitié traitent toutes ces notions.

10. La notion d'institutionnalisation peut recouvrir des discours assez variés, je n'ai rien précisé dans cette question, chaque enseignant a donc répondu selon sa propre conception de ce mot. Dans les questions suivantes, qui concernent les connecteurs ET et OU, ces conceptions seront elles-mêmes questionnées.

11. 2 enseignants n'ont répondu pour aucune notion, 1 enseignant n'a répondu que pour les connecteurs ET et OU, et pour l'équivalence.

Implication et équivalence se détachent encore une fois, et sont objet d'institutionnalisation pour deux tiers des enseignants. À l'inverse, négation, quantificateurs et types de raisonnement ne sont pas l'objet d'une institutionnalisation pour deux tiers des enseignants, et pour les connecteurs ET et OU il y a égalité. Plusieurs explications possibles à ces résultats :

– le sentiment que l'implication est plus présente que d'autres notions dans la classe de mathématiques au lycée. Par exemple, elle est présente dans la formulation de la plupart des théorèmes, même si s'autres formulations sont possibles. Mais il s'agit alors d'implications universellement quantifiées, et si les quantificateurs sont absents, c'est seulement parce que la quantification est implicite. Ce sentiment de plus grande présence de l'implication est donc basé sur des choix de l'institution scolaire qui sont discutables.
– Le sentiment que l'implication est, plus que les autres connecteurs ou les quantificateurs, reliée au raisonnement et non seulement vue comme un élément du langage mathématique. Les résultats de cette question montreraient alors une fois encore la prédominance du pilier raisonnement pour les notions de logique, au détriment du pilier langage. Nous avons vu que dans la déduction naturelle, il y avait des règles pour chaque connecteur et chaque quantificateur. Mais hormis la règle du *modus ponens* que l'on retrouve avec le « si… alors…, or…, donc… », ces règles ne sont pas explicitées dans la classe.
– Bien que le pilier raisonnement semble privilégié, les types de raisonnement sont moins objets d'institutionnalisation que l'implication. Cela peut être une conséquence directe de l'absence de savoir de référence, mais aussi du fait que les occasions de pratiquer un raisonnement par contraposée, par l'absurde, ou par disjonction des cas ne sont pas si fréquentes en Seconde.
– Les connecteurs ET et OU pourraient se démarquer de la négation et des quantificateurs parce que le lien avec intersection et réunion fournit un thème privilégié pour les aborder lors du travail sur les intervalles ou sur les événements.

Finalement, 8 enseignants seulement ne proposent aucune institutionnalisation, et 22 enseignants proposent des institutionnalisations sur 3 notions ou plus. Il semble donc que pour les enseignants, les notions de logique ne doivent pas être présentes seulement dans leur dimension outil, mais aussi dans leur dimension objet.

7.7 Des précisions sur l'institutionnalisation sur les connecteurs ET et OU

Les questions qui suivent, qui concernent plus précisément les connecteurs ET et OU, n'ont pas été posées aux enseignants du stage « Initiation à la logique » de 2013 en raison de contraintes de temps. Le nombre total de réponses est donc réduit à 43.

Le terme « institutionnalisation » reste assez vague quant à la forme que peut prendre le discours sur les notions de logique. Nous avons vu dans l'étude épistémologique que le niveau de formalisation est une variable importante pour l'élaboration d'un tel discours. Pour avoir une idée des choix des enseignants, j'ai proposé plusieurs questions sur les connecteurs ET et OU. Nous avons effectivement vu dans l'étude des manuels que ceux de 2010 proposaient des présentations assez différentes de ces notions, et différentes de la présentation des manuels de 1969.

J'ai donc d'abord choisi de m'appuyer sur ces différences dans les manuels, et j'ai demandé aux enseignants leur avis sur deux extraits de manuels qui sont analysés dans la section 6.1.3 : un extrait du manuel *Symbole* (voir page 230) et un extrait du manuel *Indice* (voir page 231). La question 11 était formulée ainsi : **Laquelle de ces deux présentations vous paraît la plus appropriée pour un enseignement de ces notions en Seconde ? Pourquoi ?** Seul 1 professeur a dit préférer la définition du manuel *Symbole* [12], contre 25 se prononçant pour celle du manuel *Indice*. 4 enseignants sont critiques vis-à-vis des deux présentations [13].

10 enseignants apprécient le lien avec le langage courant proposé dans le manuel *Indice*, comme on le voit dans cette réponse : « La présentation du livre de classe Indice me semble plus appropriée. Elle part du langage courant en présentant tout de suite la différence avec le langage "matheux" et l'intérêt de ce dernier pour sa non-ambiguïté ». Cette présentation suit les indications du programme, qui indique particulièrement pour les connecteurs ET et OU la nécessité de faire la distinction entre langage courant et langage mathématique, et nous avions déjà vu avec les réponses à la question 8 une certaine adhésion des enseignants à la ligne de conduite du programme.

9 enseignants mettent en avant la simplicité du discours du manuel *Indice*, et 8 disent qu'ils trouvent la présentation du manuel *Symbole* inutilement compliquée, comme par exemple dans la réponse suivante : « Catégoriquement : la deuxième ! (Indice). Elle est fluide et compréhensible pour des élèves de lycée. L'autre présentation ne sera même pas lue jusqu'au bout par mes élèves ». Aucun enseignant ne mentionne l'absence de définition dans le manuel *Indice* comme étant un problème. Institutionnalisation ne signifie pas pour eux une définition des notions, et donner le comportement par rapport aux valeurs de vérité des connecteurs ET et OU sur des exemples leur suffit comme mise en forme de ces connaissances [14]. Il y a de toute façon aujourd'hui une culture de la définition différente ce celle qui pouvait prévaloir à l'époque des mathématiques modernes, mais il y a ici un traitement particulier pour les notions de logique. Le discours institutionnel qui met fortement en garde contre l'excès de formalisme semble être tout à fait suivi.

12. Cet enseignant s'était prononcé contre la ligne de conduite du programme, prônant plutôt un cours de logique formel. Sa réponse est donc cohérente avec cette position, qui semble être une exception.

13. Beaucoup d'enseignants n'ont pas répondu à cette question car il fallait, dans le questionnaire en ligne, activer un lien qui apparemment n'a pas toujours fonctionné.

14. Quelques enseignants évoquent dans leur choix le fait d'être en classe de Seconde, et certains indiquent que leur position serait différente s'il s'agissait d'un manuel de Terminale.

Sans doubler la question sur les moments d'institutionnalisation, j'ai ensuite voulu savoir si les connecteurs ET et OU étaient l'objet d'un travail spécifique à travers la question 12 : **De votre côté, avez-vous travaillé explicitement avec vos élèves sur les connecteurs et/ou ? Si oui, quels activités/exercices avez-vous proposés pour cela ? Si non, pourquoi ?**

35 enseignants sur 43 disent qu'ils ont fait un travail explicite, les thèmes ou types de tâches cités étant les suivants [15] :

Intersection, réunion	Probabilités	Équations, expressions algébriques	Multiples et diviseurs	Géométrie	Exercices contexte vie courante	Énigmes	Propositions à compléter	Vrai ou Faux
25	15	5	1	1	3	1	4	3

FIGURE 7.14 – Thèmes pour travailler sur les connecteurs ET et OU

Nous retrouvons ici les thèmes déjà repérés dans le document ressource de 2009 et dans les manuels, à savoir le lien avec intersection et réunion, notamment dans le chapitre sur les probabilités. Les 7 enseignants qui répondent ne pas avoir pas travaillé explicitement sur les connecteurs ET et OU évoquent tous le manque de temps, l'un d'entre eux justifie ce choix par le fait que les erreurs des élèves sur ce sujet sont rares, 2 d'entre eux disent en parler sans proposer d'activités spécifiques.

J'ai ensuite voulu préciser ce que signifiait « institutionnalisation » pour les enseignant en les interrogeant spécifiquement sur le fait de donner ou non une définition dans la question 13 : « Avez-vous donné une définition de ces connecteurs ? Si oui, quelle était-elle ? Si non, pourquoi ? » 10 enseignants seulement disent qu'ils ont donné une définition [16] :

– 2 précisent qu'ils l'ont fait à peu près comme dans le manuel *Indice* ;
– 2 précisent qu'ils l'ont fait à peu près comme dans le manuel *Symbole* [17] ;
– 2 ont donné les tables de vérité ;
– 1 professeur a donné une définition reposant sur le montage en série ou en parallèle dans les circuits électriques ;
– 1 professeur a donné une définition illustrée par des exemples ;
– 1 professeur a donné une définition reposant sur la réunion et l'intersection.

15. Aucun enseignant ne m'a donné d'exemple concret d'exercice proposé sur ces notions.
16. 1 enseignant n'a pas répondu à la deuxième partie de la question.
17. L'un d'entre eux avait pourtant choisi la présentation du manuel *Indice* qui finalement lui paraissait plus claire.

Quand on lit la définition de ce dernier professeur, on voit qu'il s'agit en fait des définitions de l'intersection et de la réunion. Et parmi les 33 enseignants qui disent ne pas avoir donné de définition [18] :

– 6 précisent qu'ils en ont seulement parlé à l'occasion de l'intersection et de la réunion, mais sans donner de définition explicite ;
– 6 disent qu'ils ont seulement donné une explication orale ;
– 6 trouvent que donner une définition aurait eu un caractère trop formel ;
– 2 évoquent le manque de temps ;
– 2 répondent qu'ils n'en connaissent pas ;
– 1 dit que ces notions se comprennent naturellement.

Sur les 43 enseignants ayant répondu à la question 12, 9 seulement n'avaient eu aucun cours de logique durant leur scolarité. Nous pouvons donc penser que pour tous les autres, la formation qu'ils avaient reçue, même si elle était minimale, comportait les tables de vérité des connecteurs ET et OU, ce qui en constitue une définition [19]. Cette définition n'est pas ce qui est attendu par le programme, et finalement il semble qu'il n'y ait pas une autre présentation qui puisse tenir lieu de définition. Nous touchons ainsi exactement au problème de l'absence de savoir de référence : la logique mathématique propose une définition des connecteurs ET et OU, mais cette définition ne sert éventuellement que comme connaissance de l'enseignant, pas comme point de départ d'une adaptation pour une définition enseignable. Notons cependant que les justifications des enseignants qui n'ont pas donné de définition mentionnent le fait que cela ne leur semble pas nécessaire, plus que le fait qu'ils ne savent pas comment le faire.

7.8 Synthèse du questionnaire et retour sur les besoins supposés

Le questionnaire comportait une dernière question : **Avez-vous d'autres remarques sur l'enseignement de la logique au lycée ?** Il ne se dégage aucun renseignements supplémentaires des réponses à cette question, mais elles vont me servir à illustrer certains points de la conclusion.

Je reviens sur les 5 sources principales de difficultés identifiées concernant l'enseignement de notions de logique (voir page 299) pour les mettre en perspective avec les résultats du questionnaire :

1. *Absence de savoir de référence.* Les notions de logique sont inégalement l'objet d'institutionnalisations. L'implication, qui est utilisée dans la formulation de nombreux théorèmes et qui est liée au *modus ponens*, règle emblématique du raisonnement dans

18. Plusieurs n'ont pas répondu à la deuxième partie de la question.
19. Même si nous avons vu que la seule présentation de la table de vérité masquait l'aspect syntaxique d'opérateur sur les propositions de ces connecteurs.

le secondaire, est l'objet d'institutionnalisation pour deux tiers des enseignants. Les autres connecteurs et les quantificateurs, pourtant tout autant éléments du langage mathématique, et présents dans les raisonnement, sont l'objet d'institutionnalisation seulement pour la moitié des enseignants pour les connecteurs ET et OU, et seulement pour un tiers des enseignant pour la négation et les quantificateurs. L'absence de savoir de référence est une explication possible de ces différences : les enseignants n'ont pas une idée claire de ce qu'il y a à dire sur les notions de logique. D'une certaine façon, l'implication est une notion « incontournable ». Indépendamment des programmes, nous pouvons faire l'hypothèse que des habitudes ont été prises sur cette notion, qui constituent pour les enseignants une sorte d'institutionnalisation : appeler implication une proposition de la forme « si A alors B », puis définir les notions de réciproque, d'équivalence, voire de contraposée. Nous avons vu cette présentation dans certains manuels. Nous pouvons alors parler d'institutionnalisation *a minima*, car elle ne prend en compte aucun élément de la complexité de la notion d'implication. Il y a donc pour cette notion une sorte de savoir de référence, même s'il est bien insuffisant. Ce n'est pas le cas pour les autres notions, et nous avons vu pour les connecteurs ET et OU que les institutionnalisations proposées étaient assez diverses. En particulier, peu d'enseignants disent en donner une définition, la plupart jugeant que cela n'est pas nécessaire.

2. *Savoir à enseigner mal défini.* L'absence de pratiques d'institutionnalisation stables pour les notions de logique est également à mettre en relation avec le fait que le savoir à enseigner est mal défini. Un enseignant conclu ainsi le questionnaire : « Manque d'objectifs clairs dans les programmes de chaque niveau, comme en algorithmique : chacun fait sa tambouille dans son coin (ou pas) et les élèves passent d'une classe à l'autre avec des écarts de niveaux parfois importants (c'est encore plus vrai en algorithmique). Absence de ressources en 2009. Pas de communication sur les difficultés des élèves *a priori*, d'où des enseignants ne modifiant pas leurs pratiques, sûrs en plus de détenir la vérité sur ce qu'il faut faire (car ils savent ce qui est mieux pour les élèves !). Je pense que si l'algorithmique est travaillé par une bonne proportion des enseignants, ce n'est pas le cas de la logique. La démission devant l'intégration sérieuse de la logique dans l'enseignement des maths est liée à ces raisons : pas d'objectifs clairement définis et/ou pas de ressources bien fichues sous une forme facile d'accès (fiche prof, fiche élève, analyse *a priori*, travaux d'élèves). »

   Par ailleurs, une large majorité des enseignants a eu du mal à trouver ou concevoir des activités pour atteindre les objectifs fixés par le programme. Cela peut s'expliquer en partie par le fait que ces objectifs ne sont finalement pas si clairs. Pourtant, les manuels proposent des exercices identifiés « logique », même si leur analyse a montré que plusieurs d'entre eux posaient problème. Il semble donc non seulement que les enseignants ne soient pas convaincus par ces exercices, mais aussi qu'ils ne les considèrent même pas comme une base qu'ils peuvent améliorer.

3. *Contrainte sur l'organisation de l'enseignement.* La ligne de conduite préconisée par le programme est approuvée par la plupart des enseignants. Ceux-ci adhèrent majoritairement au fait de travailler sur les notions de logique au fil des autres chapitres, en insistant sur la dimension outil des notions de logique. Certains domaines semblent cependant privilégiés (par exemple les probabilités pour travailler sur les connecteurs ET et OU), les réponses des enseignants sont en cela assez semblables aux propositions du document ressource de 2009 ou des manuels. Une moitié des enseignants suggèrent tout de même de prévoir des moments de synthèse. Il y a donc une volonté de prendre en compte la dimension objet des notions de logique, avec toutes les difficultés déjà évoquées dans les deux points précédents par rapport à l'institutionnalisation.

   Quelques rares enseignants indiquent qu'il leur semble difficile de travailler sur les notions de logique en même temps que sur des notions mathématiques nouvelles.

   Plusieurs enseignants évoquent dans leur réponse à la dernière question la complexité des notions de logique et le manque de temps pour les travailler sérieusement, comme par exemple dans les deux réponses suivantes : « Ce n'est pas toujours facile à mettre en place. Avec des élèves en difficultés et des classes hétérogènes on a plutôt tendance à travailler surtout les concepts mathématiques usuels. Par contre en Accompagnement Personnalisé ça se passe mieux (on travaille par atelier dont un concerne le raisonnement et la démonstration en mathématique) », « C'est difficile de coordonner tous les apprentissages du cours de mathématiques et de donner une place suffisante à la logique ».

4. *Hétérogénéité des connaissances des professeurs.* Le niveau de formation en logique mathématique est effectivement assez hétérogène chez les enseignants. Cependant, le sentiment d'avoir des connaissances en logique mathématique suffisantes ou non pour enseigner des notions de logique n'est pas directement corrélé au niveau de formation. Un tiers des enseignants jugent leurs connaissances en logique mathématique insuffisantes, certains ayant pourtant eu une initiation au lycée pendant la période des mathématiques modernes ou au début de leurs études supérieures. Ce résultat renforce l'idée de la nécessité d'un savoir de référence élaboré en lien avec l'activité mathématique.

5. *Instabilité de la place de la logique dans les programmes.* Les enseignants ayant été élèves à l'époque des mathématiques modernes et préconisant un retour à un enseignement de notions de logique tel qu'il était fait à cette époque sont une exception, et les enseignants de cette génération ressentent les mêmes difficultés que les autres à concevoir des activités pour atteindre les objectifs du programme actuel. L'influence de la période des mathématiques modernes ne se fait donc pas sentir directement à travers des pratiques qui s'y conformeraient. Par contre, nous pouvons interpréter la défiance des textes institutionnels vis-à-vis du formalisme comme la marque d'une influence de cette période, et les enseignants semblent très majoritairement adhérer

à cette défiance. Les imprécisions du discours du programme ou des manuels sur les notions de logique ne semble pas gêner les enseignants, qui n'ont peut-être pas eux mêmes des connaissances clairement « mises en forme » sur les notions de logique.

Les résultats du questionnaire confirment les besoins supposés chez les enseignants, et permettent d'ébaucher certains incontournables d'une formation à la logique et son enseignement :

- proposer des connaissances théoriques sur les notions de logique. Le sentiment de connaissances insuffisantes dans ce domaine existe chez les enseignants. Cependant, le sentiment inverse existe aussi. Une stratégie de déstabilisation de ce sentiment de suffisance est donc à prévoir, pour montrer la distance entre les connaissances en acte sur ces notions et les connaissances nécessaires pour les enseigner. Cependant, pour que ces connaissances théoriques fonctionnent comme savoir de référence adaptable en classe, elles ne doivent pas être présentées de façon formelle, comme elles le seraient dans un cours de logique mathématique, mais être abordées en lien avec l'activité mathématique (cette indication n'a rien de nouveau, elle est déjà présente dans les travaux de didactique des mathématiques sur l'enseignement de notions de logique déjà cités dans cette thèse en ce qui concerne l'apprentissage des élèves ou des étudiants ; le point de vue de la formation des enseignants adopté ici est par contre moins courant).
- Proposer des ressources, des activités qui peuvent être proposées en classe. Cependant, le nombre de ressources qui pourraient être proposées dans une formation étant forcément limité, il est nécessaire de donner aux enseignants des outils pour une analyse critique d'activités travaillant sur des notions de logique, par exemple des exercices proposés par les manuels.
- Travailler sur les notions de logique en précisant le savoir à enseigner. Cela aidera également les enseignants pour choisir ou concevoir des activités, pour identifier ce qui est en jeu concernant les notions de logique, et pour reprendre les réponses des élèves.
- Faire connaître des situations telles que les problèmes ouverts, ou les SiRC, ce que propose par exemple D. Grenier dans son article *Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes* (Grenier, 2009) qui permettent un travail sur des notions de logique sans qu'elles soient noyées dans des difficultés liées à d'autres notions mathématiques.

Chapitre 8

Analyse de la formation continue « Initiation à la logique »

Sommaire

Depuis 2010, l'IREM de Paris propose dans le cadre de la formation continue des enseignants un stage « Initiation à la logique » [1]. René Cori a été l'initiateur de cette formation, je l'ai rejoint dès la première édition du stage en janvier 2010. À la suite de cette première édition, nous avons proposé la constitution d'un groupe de travail, « le groupe Logique », à l'IREM de Paris, et d'autres membres de ce groupe, notamment professeurs du secondaire, sont intervenus dans les éditions suivantes de la formation.

Les besoins de formation mis en évidence montrent la nécessité d'un double apport théorique et pratique dans une formation d'enseignants à la logique. Le choix fait pour cette formation est de ne pas aborder le contenu disciplinaire sous la forme d'un cours de logique mathématique, mais de le faire à travers l'étude du langage mathématique, la logique mathématique servant de référence pour expliciter les nombreuses façons de dire des mathématiciens, qui ne sont pas toujours entendues par les élèves comme nous le souhaiterions (et qui comportent parfois des ambiguïtés malheureuses). Ces apports théoriques ont donc également un aspect pratique puisqu'ils s'appuient sur le langage, notamment celui utilisé dans la classe de mathématiques. Présentations d'activités proposées en classe, analyses des programmes et des manuels viennent compléter l'apport pratique en préparant le travail de transposition dans la classe.

Dans un premier temps je présente le scénario de la formation 2013, qui correspond au projet complet de la formation et inclut :
– les objectifs de la formation, présentés dans leurs grandes lignes, et tels qu'annoncés aux stagiaires,
– les modalités de la formation,
– le contenu et l'organisation.

Je compare ensuite ce scénario aux besoins de formation concernant l'enseignement de notions de logique, et propose ainsi une analyse *a priori* de la formation. J'analyse ensuite la formation effectivement proposée, à la manière d'une analyse *a posteriori* qui permet de confronter la réalisation aux prévisions.

Le planning général du stage est donné en annexe page 545. Nous pouvons y voir la mise en place effective de différentes séquences alternant exposés théoriques, présentations d'activités, comme cela est décrit dans le scénario.

La première journée du stage est représentative de cette alternance puisqu'elle comporte trois séquences (en plus du moment d'accueil et d'un test de début de stage) : un exposé théorique de R. Cori sur l'analyse du langage mathématique, un exposé théorique de T. Joly sur la dialectique démonstrateur/utilisateur dans le raisonnement mathématique, des présentations d'activités par G. Notter et C. Huet. Elle commence par un moment d'accueil dans lequel nous pouvons voir comment la formation est présentée aux stagiaires

1. Ce stage a eu lieu pour la première fois en 2010, après l'apparition de notions de logique dans les nouveaux programmes de Seconde. L'inexistence de la logique dans la formation initiale des enseignants justifierait une telle formation indépendamment du contenu des programmes.

et les motivations de ceux-ci pour s'y inscrire. Il y a ensuite un test que j'ai analysé notamment pour les renseignements qu'il donne sur les connaissances des stagiaires.

Je présenterai une analyse détaillée du premier exposé. J'y cherche d'éventuelles traces de la constitution d'un savoir de référence : quelles sont les notions étudiées ? Qu'est-ce qui est institutionnalisé et comment ? Je cherche également à évaluer la pertinence du choix de l'entrée dans la logique par l'étude du langage mathématique. Je regarde donc comment les formateurs amènent les stagiaires à s'intéresser à ce pilier de la logique, qui est peut-être pour eux moins évident que le pilier raisonnement. Je présenterai également une analyse des autres séquences de cette première journée, essentiellement pour montrer la mise en œuvre du scénario de la formation. Cette analyse est également guidée par une attention aux connaissances en logique qui sont en jeu, et aux effets du choix de privilégier le langage. Je considère que la représentativité de cette première journée est suffisante pour qu'il ne soit pas nécessaire de présenter ce même travail d'analyse sur les autres journées, qui s'en différencient essentiellement par les contenus abordés.

L'analyse s'appuie sur les vidéos du stage. L'intégralité des échanges de l'exposé de R. Cori et des extraits des autres séquences de la journée sont retranscrites en annexe K.1 page 549.

8.1 Le scénario de la formation

8.1.1 Objectifs

Le stage est publié chaque année depuis 2010 aux Plans Académiques de Formation des académies de Paris (sauf en 2013), Créteil et Versailles. Voici la façon dont il est annoncé :

> Objectifs :
> Familiariser les participants avec quelques notions de base de logique ne figurant que rarement dans les cursus des universités françaises. Initiation prenant en compte les nouveaux programmes de lycée, où des éléments de logique figurent explicitement.
> Contenu du stage :
> Langage mathématique naïf. Variables muettes/parlantes. Mutifications explicites/implicites. Connecteurs, quantificateurs. Syntaxe/sémantique. Théories axiomatiques. Preuves. Cardinalité. Logique et pratique des mathématiques en classe.
> Méthodes :
> Exposés théoriques et exercices d'application. Étude de manuels, de productions d'enseignants et d'élèves. Réflexion sur la manière de présenter à des élèves de lycée quelques outils utiles à une meilleure appréhension du langage et du raisonnement mathématiques. Élaboration avec les stagiaires de scénarios qu'ils pourront expérimenter dans leurs classes avant la dernière journée bilan.

Dans cette annonce, l'accent mis sur le langage apparaît dans le contenu et non dans les objectifs. La place qui lui est accordée dans le stage, nous verrons cela dans l'analyse du contenu, permet pourtant de dire qu'à côté de cet objectif affiché de transmettre des connaissances en logique mathématique, il y a un objectif directement lié aux pratiques des enseignants : faire prendre conscience de nos façons de nous exprimer en mathématiques (les pratiques langagières de la communauté) qui sont complexes, des ambiguïtés et des implicites qui sont de nature à gêner la communication avec les élèves.

8.1.2 Modalités de la formation

Le stage se déroule en présentiel sur trois journées de six heures de formation. C'est une durée qui semble nécessaire pour qu'il y ait place à la fois pour les apports théoriques et pour des propositions pratiques. Les deux premiers jours du stage sont consécutifs, et ont lieu au mois de janvier. Un temps long est ensuite volontairement laissé pour que les stagiaires puissent tester une activité dans leurs classes, et en faire le récit lors de la troisième journée qui a lieu en mars.

Huit formateurs interviennent dans le stage et il y en a souvent trois ou quatre présents en même temps. Ainsi, chaque séquence du stage est prise en charge par l'un d'entre eux, mais avec des interventions des autres présents.

L'organisation globale des différentes séquences est décidée à l'avance, et pour chaque séquence, des grandes lignes du contenu sont fixées. S'y ajoutent des commentaires plus « improvisés » et les réponses à des questions des stagiaires.

8.1.3 Contenu

Dans cette section 8.1.3, pour la description du contenu du stage, ma position de formatrice me permet de rendre compte des intentions de l'équipe des formateurs, à laquelle le texte a été soumis, sans avoir recours à un entretien.

Des éléments de logique mathématique à partir de l'analyse du langage mathématique

Dans ce stage, la logique mathématique est abordée à travers l'analyse du langage mathématique. Il s'agit d'une approche que l'on peut qualifier de « naïve » au sens où certains objets et certaines relations n'y sont pas mathématiquement définis, contrairement à ce qui est fait dans un cours de logique mathématique (et qui est exposé dans l'annexe A page 445). Une des ambitions du stage est de rendre les stagiaires sensibles à certains points dans leur façon de s'exprimer. Le choix de ses concepteurs est donc de consacrer un temps conséquent à cette analyse du langage mathématique, et notamment de lui consacrer la première demi-journée du stage. À partir de phrases qui leur sont familières, les stagiaires sont amenés à analyser certaines formulations à partir d'idées intuitives. Un itinéraire est conçu pour rencontrer différentes notions de logique mathématique qui permettront de reformuler ces intuitions dans des termes plus précis :

– dans un premier temps, les stagiaires sont amenés à prendre conscience de la quantification universelle implicitement associée à l'implication. Cet exemple a une fonction de sensibilisation : il montre qu'il y a lieu de s'interroger sur une formulation dont nous usons très fréquemment sans y faire attention, et crée le besoin d'éléments d'analyse pour expliciter ce phénomène.
– La notion de proposition est ensuite abordée. L'objectif n'est pas d'en donner une définition mathématique, mais d'arriver à circonscrire la notion de proposition aux énoncés qui ne concernent que les objets mathématiques, et d'exclure les énoncés qui mettent en jeu un locuteur. Les propositions constituent une catégorie des expressions mathématiques, l'autre catégorie étant constituée par les noms des objets mathématiques.
– Les connecteurs logiques sont d'abord présentés sous leur aspect syntaxique : ils permettent de construire une nouvelle proposition à partir d'une ou plusieurs autres pro-

positions. Cet aspect syntaxique est moins connu que l'aspect sémantique qui est vu à travers les tables de vérité

– Les variables sont considérées comme la caractéristique du langage mathématique, qui le différencie ainsi du langage courant. Le point essentiel est la distinction entre variable libre et variable liée. Les signes mutificateurs sont ensuite présentés comme des indicateurs infaillibles du fait qu'une variable est liée.
– Les quantificateurs sont vus comme des mutificateurs. Dans plusieurs expressions mathématiques, les quantifications sont implicites, signalées par d'autres mots que les quantificateurs (un, avec...), ou même pas signalées du tout (dans les formulations en *si..., alors...*).
– Un temps spécifique est consacré à l'implication : table de vérité du connecteur, différence entre implication et déduction.

Le langage des prédicats est utilisé comme référence pour exhiber la structure logique des propositions. Quelques tâches de type « thème » sont proposées aux stagiaires sur des formulations à traduire dans ce langage (par exemple, écrire l'expression « il existe exactement un x tel que ... », en utilisant les quantificateurs universel et existentiel), ainsi que quelques tâches de « manipulation » du langage des propositions (sont alors définies les notions de propositions logiquement équivalentes et de tautologie) et du langage des prédicats (distributivité ou non des quantificateurs sur les connecteurs ET et OU par exemple).

Une partie pratique : analyse de manuels et tâches pour les élèves

Les considérations sur le langage mathématique ne sont pas propres à l'activité d'enseignement. Les formateurs les ancrent dans le terrain de la classe en prenant en exemples des formulations possiblement utilisées par les professeurs. Ils laissent aussi la place à des interventions ou questions des stagiaires sur des façons de dire d'eux mêmes ou de leurs élèves.

Un autre lien est fait avec la classe par l'utilisation d'extraits de manuels, dont il est fait une lecture critique. Les notions de logique exposées à travers l'étude du langage mathématique sont utilisées pour l'analyse de ces extraits (par exemple pour expliciter les quantifications dans des énoncés de théorèmes, ou signaler certaines confusions dans des exercices comme celles mises en évidence dans l'analyse des manuels).

La conception de tâches pour les élèves est également abordée dans le stage. Des tâches élaborées dans le groupe Logique de l'IREM de Paris sont présentées. Les formateurs (des professeurs qui ont testé l'activité dans leur classe) exposent aux stagiaires l'historique de l'élaboration de la tâche, ce qui permet d'en faire une sorte d'analyse *a priori*, puis le déroulement en classe, parfois accompagné de réponses d'élèves, et enfin les éventuelles modifications envisagées après un premier essai.

Lors de la deuxième journée de formation, il est proposé aux stagiaires d'élaborer des tâches (ou de reprendre une tâche présentée, ou de partir d'une tâche proposée dans un manuel), de les donner à faire à leur élèves et d'en faire une présentation le dernier jour du stage. Les formateurs indiquent leur disponibilité pour échanger entre les journées de stage sur la conception de ces tâches, ou même pour venir assister à leur réalisation en classe. Rien n'est imposé sur le sujet (quelles notions de logique en jeu) ni sur la nature des tâches (petit exercice ou longue séquence), il s'agit surtout de proposer aux stagiaires d'expérimenter en profitant d'un retour sur cette expérimentation. Les activités exposées viennent aussi augmenter la quantité d'exemples d'activités possibles.

Le(s) raisonnement(s)

Même si c'est un choix délibéré d'axer le stage sur le langage, les concepteurs de la formation n'excluent pas pour autant ce qui concerne le raisonnement. La logique mathématique sert ici aussi d'outil d'analyse, cette fois-ci des démonstrations.

Deux séquences d'apports théoriques sont proposées par des logiciens de l'Université Paris Diderot :
- La présentation d'un système de déduction (la déduction naturelle) pour montrer aux stagiaires comment sont modélisées les démonstrations. Les pas de déduction dans les démonstrations sont ainsi reliés à des règles de déduction.
- La dialectique entre la position de démonstrateur et la position d'utilisateur d'une proposition.

Par rapport aux types de raisonnement évoqués dans les programmes, le choix est fait de ne pas revenir sur chacun d'eux mais seulement de travailler sur les points suivants :
- La distinction entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée.
- Le raisonnement par récurrence, et notamment la gestion de la quantification universelle dans la démonstration de l'hérédité.

Une partie plus culturelle

Deux séquences du stage ont un aspect plus culturel : un bref historique de la logique et une présentation de la place de la logique dans les programmes, notamment de lycée, depuis 1960.

Commentaire

Avant d'entrer dans une analyse plus méthodique de ce contenu, je propose ici un rapide commentaire sur ce qui me paraît être les deux principaux choix qui orientent le stage : une approche naïve et l'accent sur le langage.

Le choix d'une approche naïve des notions de logique a pour but d'essayer d'éviter une rupture entre les connaissances théoriques et les connaissances nécessitées par l'action didactique. On peut penser qu'il permet ainsi une amorce de la transposition didactique des notions de logique au lycée en accord avec les préconisations de l'institution de présenter la logique comme outil pour l'activité mathématique : même s'il n'est en aucun cas suggéré de reproduire avec des élèves la formation proposée aux professeurs, cette approche de la logique mathématique à partir de réflexions sur le langage mathématique est conçue par les formateurs pour être adaptable en classe (les stagiaires peuvent par exemple s'approprier certaines questions récurrentes du stage : quel est le statut des variables ? Quels sont les mutificateurs des variables liées ? Peut-on donner une expression synonyme ? L'adaptation de la formulation de ces questions, le choix des moments pertinents pour les poser, restent par contre à leur charge).

Le choix d'une initiation à la logique prenant comme porte d'entrée le langage est cohérent avec ce que nous avons vu dans la première partie de cette thèse concernant différents systèmes logiques : ceux-ci proposaient une étude, une description, une catégorisation du langage avant d'aborder les schémas de raisonnement. Cependant, l'étude des raisonnements et de leur validité était bien le but ultime de ces systèmes, et dans l'esprit commun la logique est plutôt associée au pilier raisonnement qu'au pilier langage. Dans le stage, le temps occupé par des séquences sur les démonstrations reste faible. Au vu de ce qui précède, il s'agit d'un choix qui révèle une position peu courante, qui risque d'être en porte-à-faux avec les attentes des stagiaires. D'où une contrainte : il ne s'agit pas seulement d'exposer des considérations sur le langage, mais aussi de montrer l'intérêt didactique de ces considérations et de les éclairer en invoquant la logique mathématique, ce qui demande forcément plus de temps. Ainsi, le choix, épistémologiquement pertinent, de l'entrée par le langage est coûteux en temps. Par ailleurs, si certaines notions de logique mathématique utilisées pour l'étude du langage sont familières aux professeurs de mathématiques, ce n'est pas le cas des notions de la théorie de la démonstration nécessaires pour l'étude des preuves. Une initiation à la façon dont la logique mathématique traite de ces questions de raisonnement prendrait donc beaucoup plus de temps.

8.1.4 Comparaison des choix de contenu de la formation et des besoins de formation

Globalement, nous pouvons dire que les choix de contenu du stage répondent à un double besoin théorique et pratique. Regardons maintenant chaque besoin de formation repéré en page 316 :

1. *Absence de savoir de référence.* Les notions de logique mathématique sont utilisées dans la formation. Comme déjà dit, ces notions ne font pas l'objet d'une définition mathématique mais sont précisées à travers une approche naïve. La logique ma-

thématique constitue un savoir savant auquel se réfèrent les formateurs, mais qui n'est pas forcément constitué comme tel pour les stagiaires. Ce qui est proposé est donc bien un intermédiaire entre savoir savant et savoir à enseigner, permettant des amorces pour le travail interne de la transposition didactique.

2. *Savoir à enseigner mal défini.* Les programmes sont étudiés avec une perspective historique qui peut donner des éléments pour l'interprétation de ceux actuellement en vigueur. La formation n'a pas pour but de remédier aux imprécisions du programme, et ne passe pas en revue tout ce qui aurait besoin d'être commenté dans les manuels, cela serait évidemment trop long et fastidieux. Le traitement de quelques exemples montre comment mobiliser les connaissances théoriques pour critiquer les propositions des manuels, et suggérer des alternatives.
3. *Contrainte sur l'organisation de l'enseignement.* Les notions de logique sont abordées dans les présentations d'activités pour les élèves. Celles-ci sont faites par des professeurs les ayant testées dans leurs classes, qui apportent ainsi leurs témoignages.
4. *Hétérogénéité des connaissances des professeurs.* La formation est conçue pour que chacun reparte avec un minimum commun de connaissances, notamment sur l'étude du langage qui est un contenu original. Elle comble l'absence totale de formation en logique pour certains stagiaires, et complète la formation que certains ont pu avoir, grâce à une initiation à la logique au début du supérieur, ou parce qu'ils ont été élèves au temps des mathématiques modernes, en reliant des connaissances théoriques, qu'ils avaient déjà en grande partie, à l'activité mathématique.
5. *Instabilité de la place de la logique dans les programmes.* Elle est l'objet d'une séquence, qui permet de la mettre au jour, d'en commenter les conséquences. Cela ne permet cependant pas de remédier au manque de ressources, au manque d'habitudes dus à l'absence de la logique dans les programmes entre 1981 et 2009.

Dans sa conception, le stage semble donc prendre en compte la plupart des besoins de formation précisés ci-dessus en permettant que chacun reparte avec quelques outils et des exemples types pour pouvoir poursuivre individuellement la réflexion sur l'enseignement de notions de logique.

8.2 Déroulement et analyse de la première journée du stage de 2013

8.2.1 Présentation de la formation

Après avoir rappelé des détails pratiques (horaires, salles ...), R. Cori demande aux stagiaires qui veulent s'exprimer de dire pourquoi ils se sont inscrits à ce stage (détail des réponses en annexe page 549, dialogue 0.1).

Nous retrouvons dans les échanges plusieurs points déjà mis en évidence dans l'analyse du questionnaire : la double demande de connaissances théoriques et d'activités pratiques, le malaise par rapport aux injonctions de faire de la logique une préoccupation constante, mais sans faire de cours, par rapport au contenu des manuels, la réaction par rapport aux nouveaux programmes. Comme on pouvait s'y attendre, le raisonnement est évoqué dans plusieurs réponses, mais pas le langage.

R. Cori demande ensuite qui a eu une formation en logique mathématique : sur 18 stagiaires présents, un seul a fait de la logique à l'université, une autre suit actuellement un cours de logique, une troisième évoque une initiation en classe préparatoire. Deux autres ont fait de la logique au lycée au moment des mathématiques modernes.

Nous avons vu que prendre la logique mathématique comme référence pour parler de logique dans la classe de mathématiques au lycée n'est pas forcément un choix consensuel, et qu'axer une formation à la logique sur le langage peut être inattendu. R. Cori prend le temps dans cette séquence de présentation de la formation de rappeler ces deux points (voir comment en annexe page 552, dialogue 0.4).

Finalement, cette introduction a pour but de partager la responsabilité du contenu de la formation. Celui-ci a beau être en grande partie fixé à l'avance, interroger les stagiaires sur leurs motivations permet de vérifier qu'il n'y aura pas trop de décalage avec leurs attentes ; ré-annoncer les axes du stage permet d'en faire une référence partagée.

À la suite de cette séquence d'introduction, un test est distribué aux stagiaires, destiné à mettre en jeu certaines de leurs connaissances en logique. Ces exercices serviront ensuite de base de discussion. Lors de la session 2013, il a aussi été distribué aux stagiaires un test sur la façon d'entendre certaines formulations de propositions quantifiées (préparé dans le cadre d'un travail de T. Joly qui intervient dans le stage) et une version allégée du questionnaire utilisé dans cette thèse (que les stagiaires pouvaient remplir ultérieurement).

8.2.2 Test de début de stage

Présentation

Le test comporte 3 exercices (il se trouve dans son intégralité en annexe page 557). Le premier porte sur la quantification universelle implicite associée à l'implication, le deuxième met en jeu des implications avec une prémisse fausse, le troisième concerne négation et réciproque. Ces exercices seront repris collectivement à différents moments du stage, le test a pour but que chaque stagiaire ait pris le temps d'y réfléchir. Dans le premier et le troisième exercice, il n'y a rien qui permette aux stagiaires de contrôler leurs réponses, c'est la confrontation des réponses les unes avec les autres lors de phases de collectivisation qui pourra amorcer des rétroactions. Dans le deuxième, le fait de trouver une solution constitue une rétroaction qui valide la démarche.

J'ai réalisé pour chaque exercice une analyse a priori et une analyse des réponses des stagiaires (18 réponses collectées). Je présente ici ce qui concerne le premier exercice que nous retrouverons par la suite ; les autres se trouvent en annexe page 557.

Analyse du premier exercice

Exercice 1.
Pouvez-vous vous prononcer sur chacun des énoncés suivants (dans lesquels la variable n est astreinte à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels) ?

(1) n est un carré parfait et n est impair.

(2) n est impair $\Rightarrow$ n est premier.

(3) n est divisible par 5 ou n n'est pas divisible par 4.

Figure 8.1 – Premier exercice du test de début de stage

Analyse a priori :

Cet exercice a été conçu par les formateurs qui ont délibérément choisi de ne pas faire apparaître les termes « vrai » et « faux » dans la consigne de l'exercice. Il n'est pas possible de demander « les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? » puisque nous ne pouvons pas savoir s'ils sont vrais ou faux par manque d'information sur l'individu n. Il aurait été possible de laisser la question ouverte : « pouvez-vous dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux ? », ou « pourriez-vous vous prononcer sur la vérité de chacun des énoncés suivants ? », mais cela aurait restreint les réponses possibles, en empêchant celles qui ne parlent pas de vérité. La consigne (« pouvez-vous vous prononcer sur ») est donc volontairement très ouverte, ce qui a cependant l'inconvénient d'amener un éventuel malaise quant à la tâche à réaliser.

La flèche d'implication est volontairement utilisée plutôt que la formulation en *si..., alors...* pour faire ressortir la structure commune aux trois énoncés (de la forme $P_1 \alpha P_2$, où P_1 et P_2 sont des propositions dans lesquelles la variable n est libre, et α un connecteur binaire). Pour accentuer cette similitude, il aurait été possible d'utiliser dans les trois énoncés les mêmes propositions élémentaires (par exemple « n est impair » et « n est premier »). Dans ce cas, la ressemblance plus frappante entre les trois énoncés pourrait agir rétroactivement en amenant davantage les stagiaires à les considérer globalement. Ici, chaque énoncé va sans doute être traité pour lui-même, et la réflexion se porter plus sur le contenu mathématique de chacun plutôt que sur la structure commune aux trois énoncés. Ceci d'autant plus qu'une analyse de la structure d'une proposition n'est pas du tout un exercice habituel en mathématiques.

L'expression « astreinte à » ne fait pas partie du vocabulaire courant en mathématiques, mais est abondamment utilisée par les formateurs. Sa présence ici dénote leur volonté de la faire connaître. Il faudra peut-être l'expliquer, bien que l'exercice puisse se faire sans vraiment la comprendre, puisqu'il est habituel que la lettre n désigne une variable de type entier naturel.

L'énoncé (2) est d'une forme tout à fait courante : lu avec une quantification universelle implicite, il est de la même forme que de nombreux théorèmes ou propriétés rencontrés en mathématiques. Et dans les manuels plusieurs exercices estampillés *Logique* demandent de se prononcer sur la valeur de vérité d'une implication, la quantification universelle étant presque systématiquement implicite. Nous pouvons donc nous attendre à une quasi unanimité des réactions : se demander si c'est vrai ou faux, puis dire que c'est faux en exhibant un contre-exemple.

La situation est toute différente pour les énoncés (1) et (3). Ceux-ci ne sont jamais rencontrés tels quels. Nous pouvons donc nous attendre à des réactions beaucoup plus variées :

– considérer qu'on ne peut rien dire sur ces énoncés,
– les lire également comme universellement quantifiés, et conclure qu'ils sont faux,
– dire qu'ils peuvent être parfois vrais, parfois faux, selon la valeur attribuée à la variable n (en donnant éventuellement des valeurs), ce qui est une autre manière de répondre sur la valeur de vérité de l'énoncé,
– dire qu'ils sont parfois vrais (en donnant éventuellement des valeurs), ce qui est une façon de se prononcer sur la « consistance » de l'énoncé,
– chercher une proposition équivalente (par exemple « n est le carré d'un nombre impair » pour le premier énoncé ; il n'y a pas de proposition équivalente plus simple pour le troisième, mais il peut par contre être mis sous le forme d'une implication « n est divisible par $4 \Rightarrow n$ est divisible par 5 »).

Le réel enjeu de cet exercice est la mise au jour de la quantification universelle associée à l'implication, éclairée ici par le contraste entre les réactions face aux énoncés (1) et (3) et la réaction face à l'énoncé (2), mais il n'est pas vraiment perceptible dans cette seule version écrite de l'exercice à laquelle les stagiaires répondent individuellement. L'analyse des réponses écrites présentée ci-dessous permet de montrer qu'il y a effectivement des réactions contrastées. Nous verrons ensuite comment le formateur reprend cet exercice pour arriver à cette mise au jour.

Réponses des stagiaires : [2]

R. Cori suscite lui-même le questionnement autour du terme « astreinte à » (voir dialogue 0.5 en annexe page 553), qu'il se contente d'abord de reformuler : « ça veut dire que lorsque vous la [la variable n] rencontrerez dans le discours qui suit, et bien elle ne pourra désigner que des entiers naturels, c'est une sorte d'ensemble de référence. » Un stagiaire

2. Un stagiaire n'a pas répondu à cet exercice, il y a donc 17 réponses.

demande pourquoi on ne dit pas « n appartient à $\mathbb{N}$ », ce qui amène le formateur à préciser la distinction entre la lettre de variable et l'élément qu'elle représente :

> [...] je tiens à faire la différence entre la variable en tant que symbole, la lettre, et puis l'élément qu'elle représente, entre ce qu'on appelle le signifiant et le signifié. Vous avez des éléments, les entiers, et puis vous utilisez des lettres, des variables pour les nommer. Quand je dis la variable n, je ne parle pas d'un élément, je parle de cette lettre là, et quand je dis elle est astreinte ça veut dire que les éléments qu'elle est appelée à désigner dans ce qui suit seront des éléments qui appartiennent à $\mathbb{N}$.

– Réponses pour l'énoncé (1) [3] :

Réponse	Nombre de stagiaires ayant donné une telle réponse
Ne se prononcent pas	1
C'est vrai pour certaines valeurs, faux pour d'autres	4 (2 donnent des valeurs)
C'est vrai pour certaines valeurs	5 (en donnant des valeurs)
C'est faux	2
Proposition équivalente	3
Reformulation	3
Réponse non catégorisée	1

J'ai compté comme *Reformulation* les réponses qui étaient seulement des traductions dans un autre registre que celui de l'énoncé, par exemple « $(\exists k \in \mathbb{N} \mid n = k^2)$ et $(\exists k' \in \mathbb{N} \mid n = 2k' + 1)$ », et j'ai compté comme *Proposition équivalente* les réponses dans lesquelles le stagiaire a utilisé des connaissances mathématiques pour finalement aboutir à la proposition équivalente « n est le carré d'un nombre impair ». Par exemple, une réponse telle que « $n = q^2 = 2p+1$. n est le carré d'un nombre impair » est comptée dans les deux catégories car la première partie est un simple changement de registre, alors que la deuxième nécessite la mise en œuvre de connaissances mathématiques.

– Pour l'énoncé (2), tous les stagiaires sauf un répondent qu'il est faux puisqu'ils le lisent comme universellement quantifié, 13 disent explicitement qu'il est faux en donnant un contre-exemple, 3 donnent seulement un contre-exemple. Seul un stagiaire répond qu'il n'est « pas toujours vrai », ce qui à nos yeux est sans doute la réponse la plus correcte du point de vue de ce qui est réellement écrit (c'est-à-dire une implication sans quantification). Notons que face aux deux autres énoncés, ce stagiaire ne réagit pas de la même façon, mais se demande si « c'est une condition ? »

– Réponses pour l'énoncé (3) [4] :

3. Un stagiaire n'a pas répondu à cette question, mais seulement aux deux autres.
4. Deux stagiaires n'ont pas répondu à cette question, mais seulement aux deux autres.

Réponse	Nombre de stagiaires ayant donné une telle réponse
Ne se prononcent pas	1
C'est vrai pour certaines valeurs, faux pour d'autres	1 (donne « la liste » des éléments la vérifiant, quelques uns ne la vérifiant pas
C'est vrai pour certaines valeurs	4 (3 en donnant des valeurs)
C'est faux	3
Proposition équivalente	0
Refomulation	3
Réponse non catégorisée	3

La réponse comptée dans « C'est vrai pour certaines valeurs, faux pour d'autres » se présente sous la forme d'une liste des éléments vérifiant l'énoncé, la précision de valeurs ne le vérifiant pas, et finalement une « description » de l'ensemble des valeurs le vérifiant en disant que c'est « $\mathbb{N} \setminus$ les multiples de 4 qui ne sont pas multiples de 5 ».

Nous retrouvons dans les réponses écrites des stagiaires la diversité de réactions face aux énoncés (1) et (3) qui contraste avec la réaction unanime face à l'énoncé (2). Par contre, rien n'indique dans les réponses individuelles que les stagiaires questionnent cette différence de réaction. Ce sera au formateur d'amorcer cette réflexion dans la discussion collective qui suit immédiatement.

Synthèse sur le test

Ce test de début de stage met les professeurs en activité, amorce une réflexion même si nous avons vu qu'elle était limitée par le fait que la résolution individuelle des exercices n'amène sans doute pas les questionnements attendus qui en sont les véritables enjeux. L'analyse des réponses montre globalement un manque de connaissances en logique chez les stagiaires.

D'une certaine façon ces exercices ont pour but de déstabiliser les stagiaires en les mettant, lors de la reprise collective, face à des réponses éventuellement contradictoires entre elles.

8.2.3 Méthodologie d'analyse de l'exposé théorique sur l'étude du langage

L'exposé théorique de R. Cori, qui suit le test et prend toute la fin de la matinée, est consacré à l'analyse du langage mathématique. J'ai réalisé une analyse de cette partie du stage en suivant deux axes :
- d'une part analyser l'activité du formateur,
- d'autre part, analyser la mise en jeu des connaissances sur les notions de logique, et la constitution d'un savoir de référence.

L'exposé vise donc à montrer une analyse du discours mathématique, à partir de l'exemple de certaines expressions. Cette analyse met au jour ce qui est dit, ou pas, ce qui peut être entendu, ou pas. Elle est donc importante pour la clarté de la communication avec les élèves, qui est bien sûr un souci des enseignants. À l'instar de ce que j'ai présenté dans la deuxième partie de cette thèse, elle utilise des notions de logique mathématique (voir description du contenu page 326), qui sont introduites dans leur dimension d'outils d'analyse du langage. Il y a là une utilisation sans doute inhabituelle pour les enseignants. Mais la dimension objet de ces notions est nécessaire pour que se constitue un savoir de référence, nous serons ainsi attentifs à la dialectique outil/objet (voir page 99) dans cet exposé.

Il y a une intention didactique dans la formation, ce qui justifie de l'analyser à l'aide de la théorie des situations didactiques. Il n'est pas question d'assimiler le formateur à un professeur, les stagiaires à des élèves, la formation à un cours de mathématiques, mais d'utiliser des outils ayant fait leurs preuves dans le contexte de la classe de mathématiques dans un contexte qui présente une forte analogie.

Ainsi, je m'appuie tout d'abord sur les travaux de M. Hersant et M.J Perrin-Glorian sur l'analyse des séquences ordinaires. En particulier, l'analyse de cette matinée reprend des éléments présentés dans l'article *Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué* (Hersant, 2004). En effet, le cours dialogué m'a paru une pratique d'enseignement proche du « style » adopté par R. Cori dans la formation.

M. Hersant caractérise cette pratique de la façon suivante :

> Le professeur choisit de s'appuyer sur un problème pour réaliser son objectif mais il n'effectue pas réellement la dévolution du problème à ses élèves puisque la responsabilité de la production des connaissances et de leur évaluation n'est laissée aux élèves qu'à de rares moments et que le professeur privilégie une résolution collective et guidée du problème, en s'appuyant sur quelques élèves de la classe.
>
> Par ailleurs, dans cette facon de procéder l'institutionnalisation est très diluée tout au long de l'enseignement et s'effectue uniquement au moment de la correction d'exercices : il n'y a pas de moment d'institutionnalisation formelle, comme on peut l'observer dans la classe de l'autre professeur lorsque l'enseignant fait ce qu'il appelle une « lecon ». (Hersant, 2004, p. 24)

Je m'appuie également sur la structuration du milieu qui vise à rendre compte des actions sur le milieu qui font évoluer la situation. C'est une grille de lecture des actions du formateur et des stagiaires. J'adapte le modèle de structuration du milieu de C. Margolinas présenté dans *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations* (Margolinas, 1995, p. 7) :

M-3: M-matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective	a-
M-2: M-objectif	E-2: E-agissant		S-2: situation de référence	di dac
M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	P-1: P-observateur	S-1: situation d'apprentissage	ti qu e
M0: **M-d'apprentissage**	**E0:** **Elève**	**P0:** **Professeur**	**S0:** **situation didactique**	
M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet	sur
M2: M-de projet		P2: P-constructeur	S2: situation de construction	di dac
M3: M-de construction		P3: P-noosphérien	S3: situation noosphérienne	ti qu e

FIGURE 8.2 – La structuration du milieu

Pour C. Margolinas, une analyse ascendante des niveaux -3 à 0 permet d'étudier les actions possibles et effectives des élèves (ici les stagiaires) et les connaissances mises en jeu. Une analyse descendante des niveaux +3 à 0 permet d'étudier l'activité du professeur (ici le formateur), de la préparation à la gestion effective de la situation dans la classe (ici dans la formation).

Les séquences d'exposé que j'analyse ont souvent comme point de départ une question posée par le formateur, à laquelle les stagiaires ont à répondre individuellement par écrit ou collectivement à main levée. À partir de ces réponses, le formateur guide l'évolution du milieu vers la connaissance visée. Je m'intéresse aux échanges qui ont lieu pendant le stage et je me concentre sur l'analyse de la situation didactique et du milieu d'apprentissage.

Selon C. Margolinas, ce milieu M_0 est déterminé par les niveaux inférieurs et les niveaux supérieurs :

- Pour le professeur, il est un milieu d'observation. Son action est déterminée par le résultat de sa position d'observateur au niveau S_{-1}, et par son projet au niveau S_{+1} : il régule alors les réponses proposées par les élèves, valide et institutionnalise les conclusions.
- Pour l'élève, il est milieu d'apprentissage. Il a mis en œuvre des connaissances au niveau S_{-1}, et son action est influencée par la volonté d'être en position réflexive par rapport à ces connaissances au niveau S_{+1}.

Cette double détermination est résumée dans le schéma suivant, issu de la thèse de S. Clivaz *Des mathématiques pour enseigner, Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*[5] (Clivaz, 2011, p. 57) :

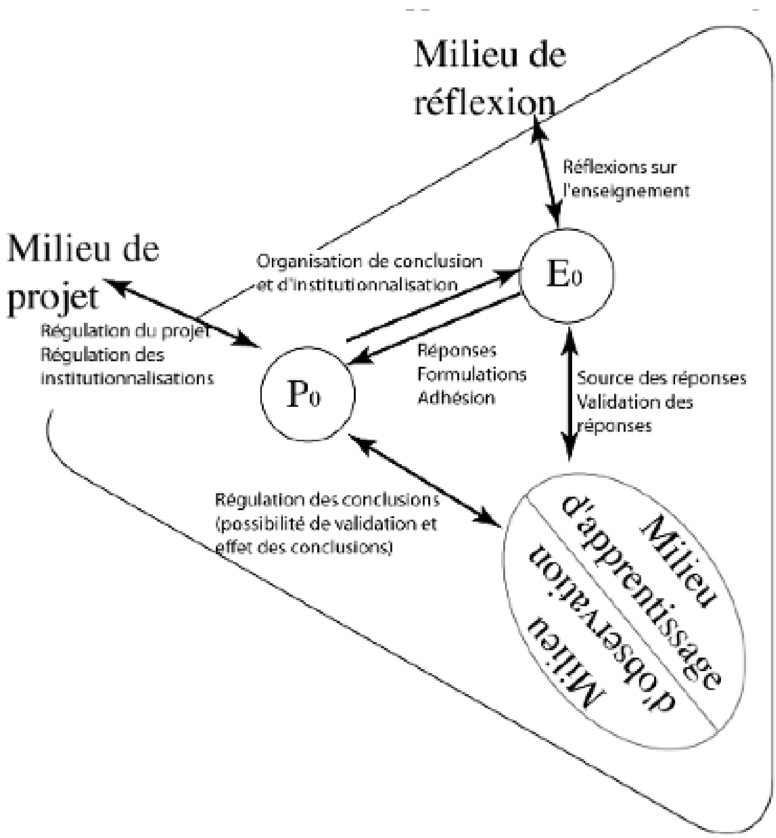


FIGURE 8.3 – Structuration du milieu autour du milieu M_0

Je cherche précisément à mettre en évidence ces régulations. Dans la mesure où je m'intéresse à la pertinence d'une formation à la logique prenant comme porte d'entrée l'analyse

5. Il reprend le schéma proposé par C. Margolinas, mais sa présentation montre les trois éléments milieu, élève, professeur dans une présentation triangulaire de la situation.

du langage mathématique, je cherche à identifier ce que les stagiaires comprennent sans difficulté, et les leviers utilisés par les formateurs pour dépasser certaines résistances.

J'ai utilisé le découpage en trois niveaux proposé par M. Hersant pour organiser les données :
– chaque *séquence* présente une unité dans l'objectif d'enseignement ;
– chaque *phase* présente une unité dans l'activité du formateur et des stagiaires,
– chaque *épisode* présente une unité d'objet d'interaction.
Les séquences ont été délimitées à partir de l'observation de la formation et du contenu prévu dans le scénario. Il y a 6 séquences dans la matinée (les phases sont celles listées dans le tableau ci-après) :

1. Sur la quantification universelle implicite des implications (Phases 1 et 2).
2. Sur la notion de proposition, et plus généralement d'expression mathématique (Phase 3).
3. Sur l'activité mathématique consistant à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques (Phases 4 et 5).
4. Sur la présence de variables comme distinction fondamentale entre langue usuelle et langage mathématique (Phase 6 à 10).
5. Sur le statut muette/parlante des variables (Phases 11 à 15).
6. Sur la différence entre *si A alors B* et *A donc B* (Phases 16 et 17).

J'ai réparti les phases en trois catégories différentes en fonction de l'activité du formateur et des stagiaires :
– Des situations : dans ces phases, une tâche est proposée par le formateur, les stagiaires essaient de la résoudre. Il y a une connaissance visée, d'où l'analyse de ces phases comme des situations didactiques. Le formateur propose la tâche (dévolution), guide sa résolution (par son action sur le milieu), conclut (institutionnalisation).
– Des sollicitations : ces phases sont initiées par une question du formateur. Les stagiaires proposent diverses réponses, le formateur les commente, les valide ou les infirme.
– Des exposés : ce sont des phases dans lesquelles le formateur parle et les stagiaires écoutent. Il peut y avoir à l'intérieur des phases d'exposé des sollicitations très ponctuelles.

S1, phase 1	La quantification universelle implicite des implications : prise de conscience.	Situation
S1, phase 2	La quantification universelle implicite des implications : les problèmes que cela peut poser.	Exposé
S2, phase 3	La notion de proposition.	Situation
S3, phase 4	En quoi consiste l'activité mathématique ?	Sollicitation
S3, phase 5	Dans l'activité mathématique, on cherche à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques.	Exposé
S4, phase 6	Y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?	Sollicitation
S4, phase 7	Différence syntaxe/sémantique.	Exposé
S4, phase 8	Y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?	Sollicitation
S4, phase 9	Les symboles ne sont pas une distinction fondamentale.	Exposé
S4, phase 10	Présence de variables dans le langage mathématique.	Exposé
S5, phase 11	Importance des variables muettes en mathématiques.	Exposé
S5, phase 12	Exemple d'une proposition mathématique avec une variable muette.	Sollicitation
S5, phase 13	Synonymie.	Exposé
S5, phase 14	Identification de signes mutificateurs.	Sollicitation
S5, phase 15	Retour sur les énoncés « n est premier et n est impair » et « n est premier $\Rightarrow$ n est impair ».	Exposé
S6, phase 16	Table de vérité de l'implication.	Exposé
S6, phase 17	Différence entre *si A alors B* et *A donc B*.	Exposé

FIGURE 8.4 – Les différentes phases de l'exposé théorique sur l'analyse du langage mathématique

Je présente ci-après une analyse détaillée des deux premières séquences dans lesquelles sont déjà présentes plusieurs notions de logique mathématique : proposition, variable, connecteur, quantificateur. Les séquences suivantes seront présentées plus rapidement dans le but surtout de rendre compte du déroulement effectif du stage et du cheminement choisi par le formateur. Des encadrés résument les observations sur chaque séquence.

8.2.4 Analyse de la séquence 1 : sur la quantification universelle implicite des implications

Phase 1 : la quantification universelle implicite des implications : prise de conscience

La première situation didactique mise en place dans le stage a pour but de mettre au jour la quantification universelle implicite associée à l'implication. Les notions de logique nécessaires pour agir dans cette situation sont celles de variable, proposition, connecteur, quantificateur universel. Les formateurs font l'hypothèse qu'elles sont insuffisamment identifiées comme objets par les stagiaires pour que ceux-ci les utilisent spontanément pour expliquer ce qui se passe. Au-delà de l'utilisation de ces notions de logique, le rôle de cette situation est donc aussi d'être un moment crucial pour d'une part faire prendre conscience aux stagiaires de l'existence d'implicites dans les pratiques langagières de la communauté mathématique, et des problèmes qu'ils peuvent susciter, d'autre part montrer comment la logique mathématique fournit des outils adéquats pour analyser ces phénomènes langagiers.

Cette situation commence avec l'exercice 1 du test de début de stage, il n'y a initialement dans le milieu que l'énoncé de l'exercice. La tâche qui est alors proposée aux stagiaires n'est pas le réel enjeu de la situation, son but est seulement de constituer le *milieu de référence* (voir tableau de la structuration du milieu page 337) puisque l'enjeu réel, expliquer la différence de réactions face aux trois énoncés, ne sera dévoilé qu'une fois les réponses mises en commun.

J'ai découpé le déroulement de la phase 1 en 10 épisodes E_0 à E_9, présentés dans le tableau ci-après, caractérisés chacun par une action du formateur modifiant la situation.

Épisode	Ce qui est visé	Action du formateur	Ajouts dans le milieu
E_0	Les stagiaires répondent individuellement à l'exercice.	Soulève le questionnement sur le terme « astreinte à ».	Explication du terme « astreinte à », réponses individuelles.
E_1	Mise en commun des réponses.	Note les réponses, compte en particulier les réponses « faux » dans chaque cas.	L'ensemble des réponses.
E_2	La différence de réactions face à ces énoncés est due à la présence de l'implication dans l'énoncé (2).	Pointe que ce qui est intéressant c'est la différence de réactions et demande pourquoi.	La conscience de la différence de réactions et son lien avec l'implication.
E_3	Mise en évidence de la structure $P_1 \alpha P_2$ commune aux trois énoncés.	Introduit le terme « proposition mathématique », pointe l'aspect syntaxique en utilisant l'idée de « fabrication ».	Structure logique de chaque énoncé, termes pour les décrire (proposition, connecteur, fabrication).
E_4	Analyse des propositions élémentaires utilisées pour fabriquer les trois énoncés.	Pointe le statut de variable libre de la variable n, mais sans utiliser cette terminologie, avec l'idée que ces propositions « parlent d'un objet qui s'appelle n ».	Similitude des propositions élémentaires : des affirmations sur un objet qui s'appelle n.
E_5	Relance sur la différence des réactions.	En pointant la construction similaire maintenant établie, relance le questionnement sur la différence des réactions.	
E_6	Amener l'idée de la quantification.	Relance le questionnement en interrogeant ceux qui ont répondu « faux » pour les trois énoncés.	Reformulation universellement quantifiée de l'énoncé (2) : « tous les nombres impairs sont des nombres premiers ».
E_7	Montrer l'implicite de la quantification universelle.	Demande de dire ce qui dit « tous ».	Perception de l'implicite.
E_8	Le *si… alors* est porteur de quantification universelle.	Reprise des éléments précédents.	
E_9	Commentaire sur « astreinte à ».	Répond à une question sur « astreinte à ».	

FIGURE 8.5 – Les épisodes de la première phase sur la quantification universelle implicite

Dans l'épisode E_1 (voir dialogue 1.1 en annexe page 565), le formateur se contente de noter les réponses. Il n'a aucune action particulière en direction des stagiaires, mais il note le nombre de personnes qui ont répondu « faux » pour chaque énoncé.

À la fin de l'épisode E_1, les réponses ont été collectivisées et constituent des éléments matériels du milieu. Ces éléments pourraient être suffisants pour créer une rétroaction du milieu amenant les stagiaires à s'interroger sur le pourquoi de cette différence de réactions, et donc à se lancer dans la résolution d'une nouvelle tâche d'explication. Mais le formateur prend en charge lui-même de faire évoluer la situation vers son enjeu réel, achevant ainsi dans l'épisode E_2 la dévolution de la situation :

> R. Cori : Bon alors ce qui est intéressant c'est de comparer les réactions à 1 et 2, d'accord ? Dans un cas il y a une quasi unanimité pour dire « c'est faux » et dans l'autre cas il y a des hésitations, des « on ne sait pas », des « c'est ambigu », « est-ce que c'est complet », « j'ai un contre-exemple », « ça existe », enfin bon. Alors qu'est-ce qui provoque cette différence de réactions ? [extrait du dialogue 1.2 en annexe page 566]

L'identification de l'implication comme étant la source de la différence de réactions est faite par un stagiaire. Mais pour que l'étrangeté de cette différence apparaisse, il faut qu'elle contraste avec la similitude des structures logiques. Or, nous avons déjà dit que cet élément ne serait sans doute pas perçu facilement car ceci demande une analyse de type « analyse grammaticale » qu'il n'est pas du tout habituel de faire en mathématiques. De plus, nous avons déjà vu que le fait que les propositions élémentaires utilisées pour construire les énoncés ne soient pas les mêmes participe à rendre difficilement accessible cette identification [6]. Nous voyons ici qu'il y a une connaissance nécessaire (« les énoncés ont la même structure logique ») pour que la situation puisse évoluer pour les stagiaires du niveau -1 au niveau 0 qui est celui de l'apprentissage.

Le formateur décide de ne pas les relancer sur le pourquoi de cette différence sans plus d'éléments à leur disposition. C'est sa position de P-projeteur, au niveau S_{+1}, qui influence son action. Il enrichit alors le milieu de deux éléments dans les épisodes E_3 (il s'agit de propositions de la forme $P_1 \alpha P_2$ où α est un connecteur binaire) et E_4 (la variable n est libre dans les propositions P_1 et P_2). Il choisit ainsi d'apporter les connaissances nécessaires à l'évolution de la situation. Les notions de logique utilisées ne sont pas définies : le mot « proposition » est utilisé par le formateur qui demande juste l'accord des stagiaires sur le fait qu'il puisse l'utiliser à propos des énoncés de l'exercice, le mot « connecteurs » est utilisé par un stagiaire en réponse à une question du formateur et le mot « variable » n'est pas utilisé. Cependant, il y a tout de même une certaine décontextualisation qui amène une dimension objet de ces notions : nous pouvons identifier un processus d'ins-

6. Une possibilité que nous utilisons souvent est de projeter alternativement deux diapositives « n est premier et n est impair » et « n est premier $\Rightarrow$ n est impair », on voit alors très bien que le changement est minime, mais cela n'amène pas forcément un questionnement sur le contraste entre ce changement minime et le changement de réactions.

titutionnalisation qui se fait notamment à travers l'utilisation répétée de certains termes ou expressions : *propositions*, *fabriquées*, *affirmations qui concernent un objet qui s'appelle n*. L'aspect syntaxique des connecteurs est explicitement mentionné : « à partir de propositions on en fabrique d'autres en utilisant ce qu'on appelle les connecteurs ».

Dans l'épisode E_5, le formateur reprend les éléments mis en place : les énoncés sont construits de manière similaire, pourtant les réactions sont différentes. Il relance le questionnement, mais aucun stagiaire ne répond.

R. Cori utilise alors le levier suivant dans l'épisode E_6 : s'appuyer sur les stagiaires qui ont répondu « faux » pour les trois énoncés, ceux-ci les ayant vraisemblablement lus tous trois comme universellement quantifiés. De fait, un vocabulaire exprimant la quantification apparaît tout de suite dans la première réponse d'un stagiaire, même si celle-ci est un peu embrouillée : « c'était faux tout le temps enfin c'était pas faux tout le temps mais c'était faux une fois ». Finalement un échange entre R. Cori et une stagiaire se conclut par une reformulation de l'énoncé (2) (l'implication) avec une quantification explicite : « Ben la deuxième elle dit que tous les nombres impairs sont des nombres premiers » (voir dialogue 1.6 en annexe page 568).

Cette idée de reformulation est un autre levier possible : l'énoncé (1) est équivalent à « n est le carré d'un entier impair », reformulation qui pourrait être trouvée par les stagiaires, et dans laquelle la variable n est toujours présente. Il est très probable qu'en demandant une reformulation de l'énoncé (2), la proposition obtenue ne comporte plus la variable n, ce qui est une autre manière de voir que nous ne lisons pas les deux énoncés de la même façon.

La reformulation avec quantification universelle explicite de l'énoncé (2) est finalement le but recherché. Dans l'épisode E_7 le formateur demande ce qui permet d'interpréter l'énoncé (2) comme une proposition universellement quantifiée, et un stagiaire mentionne alors l'implicite associé à l'implication : « Implicitement, quand il y a une implication, c'est que [...] ça doit être vrai pour tout n ».

L'épisode E_8 peut être assimilé à un temps d'institutionnalisation de cette nouvelle connaissance, ce que fait le formateur sur le mode de la métaphore :

> R. Cori : vous avez des yeux de mathématiciens, ce qui n'est pas étonnant puisque vous êtes professeurs de mathématiques. Et dans les yeux des mathématiciens, c'est comme ça qu'on sélectionne les mathématiciens : on leur fait subir un examen ophtalmologique et on regarde si leurs yeux sont configurés comme il faut ; et la configuration d'un œil de mathématicien, c'est que quand il voit ça *(montre l'implication)*, en réalité il voit quelque chose que les yeux des êtres humains normaux ne voient pas, et ce qu'il voit et que les yeux des êtres humains ne voient pas c'est ça *(écrit le quantificateur universel devant l'implication)*. [extrait du dialogue 1.8 en annexe page 569]

Dans cet extrait le quantificateur universel n'est pas nommé pour faire ressortir le fait qu'il est considéré comme présent mais sans l'être effectivement. Le terme « quantification universelle » n'est utilisé par le formateur qu'à la fin de l'épisode E_8 : la conclusion est ainsi que « le *si... alors* est porteur de quantification universelle ».

Le dernier épisode E_9 est relancé par la question d'un stagiaire : « Ce qui était écrit dans l'énoncé au-dessus entre parenthèses, n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels, est-ce que c'est pas équivalent à ça [à quantifier universellement la proposition] ? » Cette question n'est pas surprenante : nous avons déjà dit que l'expression « n est astreinte à » n'est pas une expression connue des stagiaires. Ainsi, le caractère « méta » de la phrase « n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels » n'est pas perçu par ce stagiaire. En substituant « n est astreinte à » au quantificateur universel supposé placé devant le deuxième énoncé, nous obtenons la phrase « n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels, n est impair $\Rightarrow$ n est premier ». Cette phrase n'est pas une proposition mathématique, et donc *a fortiori* n'est pas équivalente à la proposition « pour tout entier naturel n, n est impair $\Rightarrow$ n est premier ». Le formateur ne reprend pas cette distinction, car la notion de proposition est encore trop imprécise à ce moment du stage, il se contente de souligner que si cela était équivalent, il y aurait similitude des réactions pour chaque énoncé puisque cette précision portait sur les trois énoncés.

Phase 2 : la quantification universelle implicite des implications : les problèmes que cela peut poser

La situation visant à mettre au jour la quantification implicite des implications est suivie d'un exposé de R. Cori (Phase 2, épisode 1) dans lequel il expose l'importance de la quantification en mathématiques, qui contraste avec son absence dans le discours mathématique scolaire :

> R. Cori : [...] la quantification n'est jamais explicite pour une raison très simple, c'est que nous sortons d'une période, j'espère que nous sommes en train d'en sortir, où les quantificateurs ont été totalement bannis de l'enseignement secondaire. Je me souviens à une époque c'était presque interdit. Je ne parle pas des symboles, les symboles ont été interdits assez rapidement. C'était même interdit de faire état de la quantification. Pourquoi ? Parce que c'est difficile. Très bien, c'est difficile. Sauf que les mathématiques sans quantification, ça n'existe pas. [extrait du dialogue 2.1 en annexe page 571]

Dans cet épisode, les termes « quantification, quantificateur, quantifié » sont utilisés 12 fois, ils sont ainsi rajoutés au lexique du vocabulaire logique utilisé dans le stage.

Le discours tenu par le formateur dans cet épisode a un côté militant. Il peut convaincre, éveiller la conscience, mais il ne montre pas, au sens de donner des arguments pour, l'intérêt d'expliciter la quantification. Pour cette monstration, R. Cori utilise ensuite un exemple concret d'une définition et de la formulation de sa négation (Phase 2, épisode 3, voir dialogue 2.3 en annexe page 573). Il met en scène un étudiant fictif, un bon étudiant, qui connaît bien la définition qui lui a été donnée dans son cours de « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ » :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

mais qui est en difficulté pour en formuler la négation, puisqu'il faut alors penser à la quantification universelle implicite sur la variable n pour rétablir une quantification existentielle dans la négation. Dans ce passage, le formateur laisse les stagiaires formuler eux-mêmes la négation de la proposition, et quand il demande ce qu'est la négation de « A implique B », plusieurs stagiaires répondent « A et NON B ». L'analyse des réponses à la question 2 de l'exercice 3 du test de début de stage, où il était demandé de donner la négation du théorème de Pythagore formulé avec un *si...alors*, a montré qu'une bonne moitié des stagiaires ne savaient pas écrire la négation d'une implication (très peu donnaient une proposition quantifiée existentiellement, et la moitié donnaient une proposition en *si...alors*, voir en annexe page 562). Il aurait d'ailleurs été possible de s'appuyer sur cet exercice pour montrer l'intérêt d'expliciter la quantification. Est-ce que les quelques stagiaires qui répondent ici oralement sont ceux qui ont su répondre correctement au test ? Nous pouvons aussi faire l'hypothèse que certains ont une connaissance d'un résultat « formel » (la négation de « A implique B » c'est « A et NON B »), mais qu'ils n'ont pas su l'appliquer dans le cas du théorème de Pythagore.

Bien qu'ayant montré un inconvénient possible de cet implicite, le formateur précise qu'il ne s'agit pas d'adopter une position dogmatique pour l'explicitation à tout prix des quantifications, mais d'être conscient que nos façons de les dire ne sont pas toujours claires pour les élèves :

> R. Cori : Bon on ne va pas changer ça. Tout ce qu'on peut faire c'est informer, attirer l'attention sur, et dire « attention c'est comme ça que les gens l'interprètent ». Et le fait d'être conscient de ça, ben le jour où vous serez devant des élèves dans une situation où ça pourra intervenir, et bien vous serez mieux armés pour éviter des malentendus, des ambiguïtés. [extrait du dialogue 2.3 en annexe page 573]

Ce que dit le formateur à propos des pratiques des mathématiciens, qu'« on ne va pas changer » peut-être entendu à un autre niveau par rapport aux pratiques des enseignants. Elles ne sont pas stigmatisées dans le discours du formateur, mais amenées à leur conscience et mises en relation avec d'éventuels effets sur les élèves.

Il sera de nouveau question des difficultés que peut amener cette quantification universelle implicite lors de récits d'expérimentations menées en classe qui montrent que certains élèves ne la perçoivent pas : le deuxième jour, C. Hache présente une activité expérimentée dans une classe de Première, pendant laquelle l'implicite de la quantification universelle a amené des désaccords entre les élèves, et le troisième jour je présente rapidement l'activité *Labyrinthe* (décrite dans cette thèse page 82).

Analyse globale de la première séquence

Le but de cette séquence est donc de mettre au jour la quantification universelle implicite associée à l'implication en s'appuyant sur les 3 énoncés « n est un carré parfait et n est impair », « n est impair $\Rightarrow$ n est premier », « n est divisible par 5 ou n n'est pas divisible par 4 ».
Dans cette séquence, le formateur sollicite plusieurs fois les stagiaires, ce qui atténue l'aspect magistral de l'exposé. Mais il suit une progression préalablement décidée (constat de la différence de réactions, constat de la similitude des structures logiques, explicitation de la quantification universelle implicite, difficultés que cela peut amener), et il n'y a pas de réactions de stagiaires qui le poussent à des adaptations de ce déroulement prévu. C'est plutôt l'absence de réponses qui l'amène, dans l'épisode E_6 de la phase 1, à utiliser un nouveau levier pour que la quantification émerge dans le discours des stagiaires. Le milieu n'a pas complètement joué son rôle pour identifier la similitude des structures logiques des trois énoncés, mais même enrichi des éléments nécessaires à cette identification, il ne suffit pas pour que les stagiaires sachent expliquer la différence de réactions face aux trois énoncés.
L'idée de la quantification universelle arrive dans l'épisode E_6 de la phase 1. Il a fallu du temps et plusieurs actions du formateur pour qu'elle émerge. Dans le discours des stagiaires, cette quantification est présente à travers le terme « tous », ou juste après dans l'épisode E_7, lorsqu'un stagiaire soulève le fait de l'implicite : « implicitement, quand il y a une implication, [...] ça doit être vrai pour tout n ». Elle est donc identifiée comme étant présente, mais les stagiaires n'utilisent pas le terme « quantificateur universel ». Ainsi, ils repèrent son rôle sémantique dans l'énoncé, mais n'adoptent pas un point de vue d'analyse syntaxique, dont nous avons déjà dit qu'il n'était effectivement pas fréquent dans l'activité mathématique.
Dans la phase 2, l'implicite de la quantification universelle n'est plus vue seulement sous l'angle de l'analyse du langage, mais sous l'angle didactique en montrant les problèmes que peut poser cet implicite dans la communication avec les élèves (par exemple pour la formulation de la négation, problème classique et levier efficace pour mettre en cause cette pratique de quantification implicite). Le formateur joue ainsi sur les deux tableaux de la formation théorique en logique mathématique et de la formation pratique en lien avec la classe.

Nous voyons aussi dans cette séquence comment le vocabulaire de la logique mathématique est introduit pour permettre une analyse du langage mathématique. À ce moment du stage, ce vocabulaire est employé presque uniquement par le formateur (quelques mots seulement, *connecteur* et *implication*, sont utilisés par les stagiaires). Un processus d'institutionnalisation se fait à travers la répétition de certaines expressions, des décontextualisations ponctuelles amènent la dimension objet des notions de proposition, connecteur, variable.
Certains stagiaires semblent posséder quelques notions de logique mathématique, mais ces notions ne sont manifestement pas disponibles en tant qu'outils pour l'analyse du langage, tâche qu'ils avaient sans doute rarement rencontrée. Par ailleurs, ce savoir n'est pas vraiment sollicité sauf dans l'épisode 3 de la phase 2 quand il faut formuler une négation. Les réponses au test écrit montrent que les quelques stagiaires donnant alors la bonne réponse ne sont sans doute pas représentatifs de l'ensemble des stagiaires présents.
Les données recueillies ne permettent pas de savoir si cette première séquence du stage joue son rôle d'expérience cruciale permettant la prise de conscience de l'existence d'implicites et d'ambiguïtés dans le langage mathématique, et de la pertinence des notions de logique pour les expliciter. Elle est en tout cas conçue pour justifier le travail d'analyse du langage qui va être continué, et gagner l'adhésion des stagiaires pour qui la nécessité de ce travail n'avait peut-être rien d'évident.

8.2.5 Analyse de la séquence 2 : sur la notion de proposition, et plus généralement d'expression mathématique

La notion de proposition a été utilisée pour l'instant dans le stage sans être du tout discutée. Le fait d'appeler « proposition mathématique » des expressions qui étaient effectivement des propositions semble ne pas avoir posé de problèmes aux stagiaires. Cependant, vue l'absence de la logique dans la formation des enseignants, les formateurs ne peuvent pas compter sur une connaissance de l'objet mathématique *proposition* chez les stagiaires. Et nous avons vu plusieurs éléments qui peuvent venir faire obstacle à une conception intuitive en adéquation avec la définition mathématique, notamment la non-distinction entre les propositions, qui ne concernent que les objets mathématiques, et les phrases qui mettent en jeu un locuteur qui fait des mathématiques, ou encore l'idée que ne sont des propositions que les propositions closes, pour lesquelles seul un manque de connaissances mathématiques peut éventuellement empêcher de conclure quant à leur valeur de vérité.

Dans la suite de cette première matinée de formation, R. Cori propose aux stagiaires une situation qui vise à préciser la notion de proposition. Il s'agit, pour plusieurs assemblages de signes, de répondre à la question « est-ce que c'est une proposition mathématique ? » Pour le choix des assemblages, on peut jouer sur les variables suivantes qui font apparaître tel ou tel aspect de la notion de proposition :

- V_1 : Mettre des expressions bien formées et d'autres non, pour aborder l'aspect syntaxique des propositions (et plus généralement des expressions mathématiques) qui sont des assemblages « bien formés ».
- V_2 : Mettre des noms et des propositions pour pouvoir aborder cette distinction dans l'ensemble des expressions mathématiques (voir le paragraphe sur les expressions mathématiques page 110).
- V_3 : Mettre un énoncé avec « donc » et un avec une implication. Nous avons vu, par exemple dans des manuels, qu'il était courant que ces deux types de phrases soient, à tort, lues comme synonymes.
- V_4 : Plus généralement, mettre des énoncés qui relèvent du *langage mathématique* (qui concernent les objets mathématiques seulement), et d'autres qui n'en relèvent pas, mais qui appartiennent au *discours mathématique* (qui mettent en jeu, explicitement ou non, deux interlocuteurs qui communiquent, voir page 110).
- V_5 : Mettre des énoncés comportant des variables parlantes et des énoncés dont toutes les variables sont muettes (voir page 113), et jouer sur la valeur de vérité de ces énoncés (il y a 5 possibilités : proposition close vraie, proposition close fausse, proposition ouverte vraie pour certaines valeurs des variables libres, fausse pour d'autres, proposition ouverte vraie quelles que soient les valeurs attribuées aux variables libres, proposition ouverte fausse quelles que soient les valeurs attribuées aux variables libres).

Le premier tableau ci-après donne les assemblages présentés en 2013 et les réponses des 18 stagiaires (réponses données oralement dans le cadre d'un échange formateur-stagiaires). Cette liste n'est pas préparée à l'avance, elle est « improvisée » par le formateur, qui sait cependant quels éléments doivent y être présents (et qui a, d'expérience, une idée des réactions possibles). Les assemblages choisis sont tous « bien formés » : les signes qui les composent sont correctement utilisés et il est possible de donner un sens à chacune de ces expressions. Il n'y a donc pas de jeu sur la variable V_1. Ce n'est pas un manque par rapport au but visé, car le jeu sur cette variable n'amènerait sans doute pas de divisions dans les réponses. En effet, les connaissances des stagiaires sur l'utilisation des signes mathématiques sont suffisantes pour qu'ils repèrent une expression mal formée, et essayer de donner une définition d'une expression bien formée demande d'adopter une approche formelle qui n'est pas celle retenue dans le stage.

Le deuxième tableau donne le découpage de la séquence.

1)	$\int_0^1 x dx$	Les stagiaires que l'on entend s'exprimer se prononcent plutôt pour « non », « parce qu'il n'y a pas de verbe, c'est pas une phrase », « on ne peut pas dire si c'est vrai ou faux », « c'est un nombre »
2)	$\cos^2 x + \sin^2 x = 3$	Les stagiaires que l'on entend s'exprimer se prononcent plutôt pour « oui », mais une remarque : Stagiaire : « il n'y a pas de quantificateur sur x », R. Cori : « est-ce que ça change votre position, du coup vous diriez que ça n'est pas une proposition ? », Stagiaire : « oui »
3)	$n \in \mathbb{N}$	Unanimité pour « oui », mais un stagiaire posera une objection après avoir réfléchi à la sixième expression
4)	$n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$	Unanimité pour « oui ».
5)	$(n \geqslant 3$ et n premier$) \Rightarrow n$ impair	Unanimité pour « oui ».
6)	Soit x un réel positif	D'abord plutôt des réponses « oui », mais pas unanimité. Finalement, 11 objections comptées à partir des mains levées.
7)	Le théorème 3.5.2 est évident	5 stagiaires se prononcent pour « oui », une douzaine pour « non » (mains levées)
8)	$\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$	2 stagiaires se prononcent pour « oui », le reste pour « non » : « c'est un ensemble », « il n'y a pas de verbe » (remis en cause par le formateur).

FIGURE 8.6 – Les assemblages proposés dans la situation sur la notion de proposition

J'ai découpé le déroulement de la phase en 6 épisodes E'_1 à E'_6 listés dans le tableau suivant :

Moments	Ce qui est visé	Action du formateur	Ajouts dans le milieu
E'_1	Mise en commun des réponses.	Note les réponses, deux interventions qui « guident » les réponses.	L'ensemble des réponses.
E'_2	Différence entre *si... alors* et *donc* : premier argument : valeur de vérité de l'assemblage.	Demande la valeur de vérité de l'assemblage avec « donc ».	Une proposition a une valeur de vérité
E'_3	Différence entre *si... alors* et *donc* : deuxième argument : négation de l'assemblage.	Demande la négation de l'assemblage avec « donc ».	Une proposition a une négation
E'_4	Différence entre *si... alors* et *donc* : troisième argument : négation de la négation.	Demande la négation de la négation.	La négation de la négation de l'assemblage 4 ne donne pas l'assemblage 4.
E'_5	Insister sur la différence entre *si... alors* et *donc* suite à une question d'une stagiaire pas convaincue.	Institutionnalise le fait que *si* A *alors* B est une proposition, mais pas A *donc* B.	
E'_6	Institutionnalisation de certains aspects de la notion de proposition.	Corrige la tâche demandée en insistant sur les aspects de la notion de proposition à retenir.	Une terminologie pour parler des expressions mathématiques : « être susceptible d'être vraie ou fausse », « négation d'une proposition », « nom d'un objet mathématique ».

FIGURE 8.7 – Les épisodes de la phase 3 sur la notion de proposition

Les points suivants apparaissent spontanément dans les réponses des stagiaires données dans l'épisode E_1' (voir dialogue 3.1 en annexe page 575) :

- L'idée qu'à une proposition on peut associer une valeur de vérité, « dire si c'est vrai ou si c'est faux ». Un stagiaire hésite pour le deuxième assemblage car il n'y a pas de quantificateur [7]. Nous retrouvons là une conception de la notion de proposition qui n'inclut pas les propositions contenant des variables libres. Cette conception n'est donc exprimée que par un stagiaire, ce qui est peu, mais notons que les assemblages qui sont des propositions ouvertes ne présentent pas toutes les variations possibles par rapport à la variable V_5 : la proposition 2 est toujours fausse, la proposition 5 est toujours vraie (et de plus c'est une implication, donc certainement lue comme universellement quantifiée), la proposition 3 « paraît » toujours vraie tant nous sommes habitués à ce que la variable n prenne ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi, bien qu'étant des propositions contenant des variables libres, ces assemblages ne présentent pas l'aspect « parfois vrai, parfois faux, on ne peut pas savoir » qui fait hésiter certaines personnes à les appeler des propositions.
- La distinction nom/proposition est facilement perçue. Elle se traduit ici par « phrase » d'une part, « nombre », « ensemble » de l'autre. Pour l'assemblage 1, un stagiaire donne comme argument l'absence de verbe pour dire que ça n'est pas une proposition. R. Cori demande ce qu'est le verbe dans l'assemblage 3 que les stagiaires ont unanimement classé comme proposition, « appartient » est correctement identifié. L'argument est également utilisé pour l'assemblage 8, mais là il y a une difficulté qui est pointée par le formateur : une stagiaire dit qu'il n'y a pas de verbe, R. Cori fait remarquer que si, au moins le même que pour l'assemblage 3, « appartient » (il y a aussi « est égal », comme dans l'assemblage 2. Regarder s'il y en a un verbe ou non n'est pas un argument suffisant pour conclure si l'assemblage est ou non une proposition : les propositions contiennent des verbes, donc l'absence de verbe permet de conclure (encore que parfois les verbes sont omis, par exemple ici dans l'assemblage 5, le verbe n'apparaît pas explicitement dans « n premier »), mais certains noms, construits à l'aide de propositions, contiennent également des verbes. Il y a une question de « position » du verbe dans la construction de l'expression qui permet de distinguer nom et proposition, mais il n'est pas possible d'en donner une description sans rentrer dans des considérations plus formelles, en donnant des outils plus précis d'analyse de la structure des expressions, comme par exemple un arbre de décomposition. Les stagiaires semblent cependant ne pas faire de confusion.
- Il y a par contre confusion entre l'implication et le « donc », et plus généralement, nous le voyons par exemple dans les hésitations autour de l'assemblage 6, des confusions entre ce qui relève du *langage mathématique* et ce qui n'en relève pas tout en faisant partie du *discours mathématique*.

7. Alors que dans cette phase de mise en commun des réponses R. Cori garde une position neutre, face à cette réponse il réagit tout de suite, et affirme, mais sans donner de raison, que l'assemblage 2) est une proposition.

Comme dans la phase 1 de la première séquence, ce premier moment sert à installer le milieu M_0 de la situation didactique. Les seules rétroactions possibles du milieu au niveau de la situation S_{-1} durant cet épisode E'_1 pourraient être produites par les réponses des autres stagiaires pouvant faire changer d'avis certains d'entre eux. Aucun d'entre eux cependant ne semble posséder une connaissance suffisamment sûre de la notion de proposition pour l'utiliser de manière catégorique (ou alors, ceux possédant une telle connaissance jouent le jeu du contrat didactique et ne s'en servent pas pour faire autorité, laissant le formateur mener la situation dans laquelle les hésitations et erreurs sont prévues).

L'assemblage 4 est immédiatement remis au cœur de la discussion dans l'épisode E'_2. La distinction entre *si... alors* et *donc* est un point essentiel du stage et le formateur sait que l'idée intuitive la plus courante est que les assemblages 4 et 5 sont l'un comme l'autre des propositions. Il ne fait ici que suivre le déroulement prévu, et sait quel levier utiliser pour faire évoluer la situation :

> R. Cori : Alors par quoi on commence ? On va commencer par vous décevoir, parce que le seul endroit où il y ait unanimité complète c'est l'endroit où c'est non (*rires*). Donc on va s'attaquer peut-être direct à ça (*entoure l'assemblage 4*). Ça ce n'est pas une proposition mathématique. Je voudrais quand même attirer l'attention de ceux d'entre vous qui m'ont donné ici (*montre l'assemblage 1)*) comme argument « on ne peut pas dire si c'est vrai ou c'est faux », j'aimerais bien qu'ils me disent là si on peut dire si c'est vrai ou c'est faux. [extrait du dialogue 3.2 en annexe page 577]

Les stagiaires savent maintenant qu'ils se sont trompés, mais ne font pas le lien avec la question de la valeur de vérité, et répondent unanimement que c'est vrai. Ils ne font donc pas de distinction entre vérité et validité : une phrase avec « donc » exprime un raisonnement énoncé par quelqu'un, ce raisonnement peut être valide, correct, juste (ou non), mais les adjectifs « vrai, faux » ne s'y appliquent pas. Une brève hésitation, suite à cette réponse unanime des stagiaires donne à penser que le formateur comptait sans doute sur le fait que cette distinction serait perçue, ou en tout cas que cette question de la valeur de vérité amènerait au moins un doute permettant de poursuivre la discussion.

Il faut donc un autre argument pour convaincre que l'assemblage 4 n'est pas une proposition, et le formateur utilise un autre levier dans l'épisode E'_3 en demandant la négation de cette « proposition ». Cela ne déconcerte pas plus les stagiaires qui proposent : (*R. Cori écrit au tableau*) « il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < 0$ ». D'où l'utilisation d'un troisième levier (épisode E'_4) par le formateur qui demande alors la négation de la négation proposée :

> — R. Cori : On va faire le jeu suivant : je pars de cette proposition et je vous demande la négation, quelle est la probabilité que j'obtienne ça ? (*en montrant l'assemblage 4*).
>
> *Murmures.*

— R. Cori : Quand je vous demande la négation de ça, quelle est la probabilité que j'obtienne ça ?

Rires

— R. Cori : Ayez le courage de dire zéro parce que la probabilité que j'obtienne ça c'est zéro. Partant de ça personne ne va me dire ça comme négation. [dialogue 3.4 en annexe page 578]

Finalement, dans ces épisodes E_2', E_3', E_4', le formateur apporte à chaque fois de nouveaux éléments dans le milieu. Ce ne sont pas des éléments « matériels », mais les stagiaires sont incités à les utiliser comme tels. Le formateur « tend » la question de la valeur de vérité (ou de la négation) aux stagiaires, comme il pourrait leur tendre une règle pour vérifier l'alignement de trois points. Sauf que ceux-ci ne savent pas « se servir » (pour continuer la comparaison avec un élément matériel tel qu'une règle) de ces outils, il n'y a donc pas de rétroaction du milieu sur les réponses des stagiaires.

Les rires font entendre que l'argument de la double négation semble faire mouche, en tout cas pour faire sentir qu'il y a un problème. Mais le doute persiste chez les stagiaires, comme en témoigne cette intervention dans l'épisode E_5' :

— S : Est-ce qu'on ne peut pas interpréter le donc comme une implication, et dans ce cas on retombe comme tout-à-l'heure ?

— R. Cori : C'est une très bonne question et je vous rassure tout de suite il y a au moins la moitié des manuels qui interprètent le donc comme une implication [...] le donc ça n'est pas la même chose que l'implication et je vais essayer de m'employer à vous convaincre que le donc ça n'est pas la même chose que l'implication. [extrait du dialogue 3.5 en annexe page 578]

L'évocation des manuels montre que cette distinction est méconnue, et qu'il est donc « normal » qu'elle le soit des stagiaires. Maintenant que le milieu a joué son rôle d'élément perturbateur de la conception des stagiaires sur l'assemblage 4), le formateur insiste sur cette distinction :

R. Cori : Quand vous dites « A donc B », ça n'a rien à voir, ou très peu à voir, et en tout cas vous dites quelque chose de complètement différent que quand vous dites « si A alors B ». « Si A alors B » et « A donc B » sont deux choses différentes et j'ajoute que « si A alors B » est une proposition mathématique, pour peu que A et B soient des propositions mathématiques elles-mêmes bien sûr, alors que « A donc B » n'est pas une proposition mathématique. Je reviendrai là dessus en détail. [extrait du dialogue 3.5 en annexe page 578]

Mais il n'en dit finalement pas plus que ce qu'il avait annoncé dès le début de la discussion sur l'assemblage 4, à savoir que « A donc B » n'est pas une proposition mathématique. Il manque pour l'instant des éléments importants pour pouvoir expliquer clairement la distinction entre *si... alors* et *donc*, notamment des éléments sur l'implication en tant que connecteur propositionnel. R. Cori prévient que les explications sur cette distinction ne sont pas finies, mais choisit pour l'instant de continuer sur la notion de proposition en corrigeant les réponses pour les autres assemblages. La discussion autour de l'assemblage 4) a institutionnalisé deux éléments importants pour la notion de proposition, qui seront repris pour les autres assemblages : on peut se poser la question de la valeur de vérité d'une proposition, on peut en formuler la négation.

Dans l'épisode E'_6 (correction des autres assemblages) la répétition de certains termes ou expressions contribue de nouveau à l'insitutionnalisation. Plusieurs éléments importants de l'analyse du langage sont introduits dans ce temps de correction :

- La notion de « nom d'un objet » à propos des assemblages 1 et 8.
- La distinction proposition ouverte/proposition close à propos de l'assemblage 2, sans utiliser cependant cette terminologie :

> R. Cori : Parmi les propositions, il y en a qui parlent de certains objets qui ne sont pas précisés, où il y a des variables qui apparaissent comme ça. Et il y en a d'autres où les variables sont toutes quantifiées par exemple, ou alors où il n'y a pas de variables du tout. Ça fait deux catégories mais ça reste quand même des propositions. [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

- Le double statut possible de certaines phrases, à propos de l'assemblage 3, qui sont des propositions mais qui peuvent être utilisées pour introduire une variable, et qui sont dans ce contexte au niveau du *discours mathématique*, et non du *langage mathématique* :

> R. Cori : Dans ce problème, dans ce chapitre, dans ce paragraphe, dans tout ce livre n désignera un entier naturel, bon, ça c'est une annonce d'une convention, et effectivement pas une proposition mathématique. Seulement ça ne prend ce caractère là que parce qu'on le met dans le contexte en question [...] « n appartient à $\mathbb{N}$ » tout seul, c'est une proposition mathématique : c'est susceptible d'être vrai ou faux suivant qui est n, ça a une négation qui est « n n'appartient pas à $\mathbb{N}$ », il n'y a aucun doute que c'est une proposition mathématique. [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

- Le caractère « méta » des phrases mettant en jeu un locuteur, à propos de l'assemblage 6 :

> R. Cori : On ne peut pas dire « c'est vrai ou c'est faux », on ne peut pas dire « qu'est-ce que c'est la négation de "soit x un réel positif" ». Ça n'est pas une affirmation concernant des objets mathématiques qui est susceptible d'être vraie ou fausse. C'est à un autre niveau, « soit x un réel positif » c'est au niveau de la communication entre deux personnes qui sont en train de causer mathématiques et il y en a une qui dit à l'autre : « et bien je prends un nombre réel positif x, je prends un nombre réel positif je l'appelle x ».

> C'est pas du tout du niveau du discours mathématique [8], c'est à un autre niveau donc c'est non. [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

De la même manière que dans l'épisode E_5', une intervention d'un stagiaire montre que les connaissances que cherche à transmettre le formateur ne sont pas triviales pour les stagiaires :

> — S10 : Vous voulez dire que toute proposition mathématique a une négation sinon ça n'en est pas une ?
>
> — R. Cori : Euh est-ce que je veux dire ça ? En tout cas c'est vrai que toute proposition mathématique a une négation.
>
> — S10 : Et si il n'y a pas de négation ça n'en est pas une ?
>
> — R. Cori : S'il n'y a pas de négation ? On reviendra là dessus parce qu'on va parler de la négation des propositions on reviendra là dessus on peut dire ça mais c'est… [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

Là encore, le formateur renvoie à un moment ultérieur dans le stage, conscient du fait que toutes ces notions de logique abordées ne sont pas encore complètement claires pour les stagiaires.

8. Le terme est utilisé ici à tort, cette expression relève bien du *discours mathématique*, mais par contre pas du *langage mathématique*.

Analyse globale de la deuxième séquence

Le but de cette séquence est d'amener à une conception de la notion de proposition en adéquation avec la définition de la logique mathématique.
Au début de la séquence, le milieu de la situation ne comporte que les assemblages proposés et les réponses des stagiaires. Le principal élément pouvant amener des rétroactions est donc le désaccord qui apparaît pour certains énoncés. Mais le formateur ne s'appuie pas sur cet élément et choisit plutôt de commencer par regarder un assemblage pour lequel il y a unanimité, celui qui comporte un *donc*. Il n'est pas surpris qu'il faille d'autres éléments pour convaincre les stagiaires qu'une phrase de type « A donc B » n'est pas une proposition mathématique, et il enrichit le milieu avec des outils pour pouvoir trancher la question de « est-ce ou non une proposition mathématique ? » (avoir une valeur de vérité, avoir une négation, pas de locuteur en jeu). Là encore il suit le déroulement prévu et continue à constituer un vocabulaire spécifique (une proposition est *susceptible* d'être vraie ou fausse, elle *parle* ou non d'une certaine variable).
Le formateur ne propose pas de définition de la notion de *proposition*, mais la répétition de l'expression « être susceptible d'être vraie ou fausse » participe d'un processus d'institutionnalisation et donne aux stagiaires la possibilité de l'adopter comme définition naïve. Dans cette séquence, la notion de proposition est présente dans sa dimension objet, puisque la séquence vise à préciser cette notion, alors que dans la séquence 1 elle était essentiellement présente dans sa dimension outil. Il y a donc travail de la dialectique outil/objet dans le passage d'une dimension à l'autre.
L'approche non formelle de ces notions de logique choisie a l'avantage d'être sans doute plus facilement transposable en classe, et qui peut se faire dans le temps limité de la formation, mais elle contraint le formateur à rester parfois assez imprécis parce qu'il ne peut pas s'appuyer sur la rigueur d'une définition mathématique. Il choisit également de ne pas donner de définition non mathématique de la notion de proposition, qui n'aurait de toute façon pas cette rigueur.
Au delà de la notion de proposition, cette séquence amène une prise de conscience collective du fait qu'il y a matière à se poser des questions là où les stagiaires ne s'y attendaient peut-être pas, et qu'une notion apparemment aussi simple que celle de proposition peut poser problème. Comme dans la première séquence, c'est en confrontant les stagiaires avec leur réactions spontanées, et en montrant en quoi elles sont problématiques, qu'est justifié le travail d'analyse du langage mathématique qui va ensuite être poursuivi de manière plus magistrale.

8.2.6 Analyse des séquences 3 à 6

Séquence 3 : sur l'activité mathématique consistant à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques

Phase 4 : en quoi consiste l'activité mathématique ?

Cette courte phase est introduite par une question du formateur : « on va s'interroger sur qu'est ce que c'est que faire des mathématiques ». R. Cori semble décider de manière improvisée de solliciter les stagiaires plutôt que de faire un exposé : « je pourrais vous demander votre opinion là dessus ben je vais le faire allez ». Cette question est très large, et les réponses de ces derniers sont sans doute influencées par un effet de contrat didactique qui les oriente vers une réponse à *coloration logique.*

Une stagiaire, professeure de physique qui envisage sa reconversion, compare l'activité mathématique à un casse-tête chinois. Cette réponse est commentée sur un ton ironique par R. Cori : « j'ai un conseil à vous donner, si vous devenez professeur de mathématiques, essayez de ne pas propager cette [idée] », mais pas reprise, elle ne semble pas intéresser le formateur. Un autre stagiaire propose « émettre des règles et organiser le raisonnement sur ». R. Cori questionne alors : « sur quoi, alors sur quoi ? », montrant ainsi qu'il attend finalement une certaine réponse. Mais la réponse attendue ne vient pas. Une troisième stagiaire propose « voir si les propositions mathématiques sont vraies ou fausses ». Là encore R. Cori voit une ouverture vers la réponse attendue et tente de la faire venir : « c'est des phrases qui parlent de quoi ? » La réponse attendue est donnée par cette stagiaire : « D'objets mathématiques », et reconnue comme attendue par le formateur : « D'objets mathématiques alors là nous y sommes ».

Une dernière intervention d'un stagiaire porte sur la modélisation mathématique pour résoudre des problèmes concrets, là encore, l'ironie de la réponse du formateur (« j'avais un problème tout-à-l'heure, je n'arrivais pas à faire communiquer l'ordinateur et le vidéoprojecteur, et les mathématiques ne m'ont été d'aucun secours ») montre que cette réponse ne va pas dans le sens de ce qu'il attend pour pouvoir continuer son exposé.

Finalement, la sollicitation des stagiaires ne semble avoir pour but que d'amener dans le dialogue un élément attendu par le formateur (les objets mathématiques), les autres propositions ne sont pas retenues.

Phase 5 : dans l'activité mathématique, on cherche à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques

Dans l'exposé qui suit, R. Cori reprend dans un premier épisode (voir dialogue 5.1 en annexe page 581) la notion d'objet mathématique. Il évoque la théorie des ensembles qui permet de considérer tous les objets mathématiques comme étant de même nature (des ensembles) ce qui « a un avantage considérable sur le plan conceptuel [. . .] mais sur le plan pratique ça a aussi beaucoup d'inconvénients parce que ça tue un peu l'intuition ». Après les objets mathématiques, le formateur parle des informations concernant ces objets, le mathématicien cherchant à en avoir le maximum.

Les termes *objet (mathématique)* et *information* sont utilisés respectivement 30 fois et 17 fois par le formateur dans cette phase.

Dans un deuxième épisode (voir dialogue 5.2 en annexe page 583), le discours du formateur s'oriente vers le langage : « pour communiquer ces informations, c'est quand même une affaire de communication, il faut les formuler, il faut les exprimer, donc on a besoin de phrases pour les dire. » La notion *d'expression mathématique* est alors introduite, divisée en deux catégories : les *noms* et les *propositions*. R. Cori propose tout de suite aux stagiaires de mettre en application ces notions en reprenant la liste des assemblages utilisés dans la séquence 2 sur la notion de proposition.

La notion de proposition n'est pas plus mathématiquement définie que dans la séquence 2, et les noms sont présentés comme ce qui sert à nommer les objets mathématiques, ce qui n'est pas non plus une définition mathématique. R. Cori explicite le caractère naïf de son approche :

> R. Cori : [...] je suis en train de faire une analyse naïve de ce que je fais quand je fais des maths, donc vous avez tout à fait la possibilité de dire que je délire complètement, [que] c'est pas du tout comme ça, je ne peux pas vous apporter de preuves. Moi je ne sais pas faire de preuves en dehors des mathématiques. Là nous sommes en dehors des mathématiques, nous les observons mais nous sommes en dehors des mathématiques. [extrait du dialogue 5.2 en annexe page 583]

Séquence 4 : sur la présence de variables comme distinction fondamentale entre langue usuelle et langage mathématique

Phase 6 : y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?

Le dialogue est relancé avec une nouvelle question, celle de la différence, s'il y en a une, entre la langue naturelle et le langage mathématique. Quand il pose la question, R. Cori parle de *langue usuelle* ou *langue naturelle*, présentée comme « celle avec laquelle nous communiquons, avec laquelle nous avons commencé à parler », et utilise successivement *langue mathématique* et *langage mathématique* (voir en annexe page 584, dialogue 6.1). Il ne donne pas de définition pour ces termes *langue naturelle*, *langue mathématique*, *langage mathématique*, pas plus qu'il ne donne de définition mathématique des mots *proposition* ou *connecteur*. Mais à l'inverse de ces notions de logique pour lesquelles il a une référence savante bien précise, il ne semble pas disposer de telle référence pour ces notions linguistiques. En témoigne à mon avis l'utilisation simultanée de *langue mathématique* et de *langage mathématique*, ou l'utilisation du terme *discours mathématique* signalée en note page 356.

Pour le premier stagiaire qui s'exprime, il n'y a pas de différence « [le langage mathématique] est un langage adapté, c'est tout », mais il est immédiatement contredit par un autre stagiaire sur le ton de l'ironie « ben si, sinon on ne s'embêterait pas à... » Un autre stagiaire met en avant la présence plus importante de sous-entendus dans la langue naturelle, tout en intégrant ce qui a déjà été fait dans le stage sur l'implication et qui a montré qu'il y avait aussi des sous-entendus en mathématiques.

Phase 7 : différence syntaxe/sémantique

R. Cori se sert de cette réponse pour aborder la distinction entre syntaxe et sémantique (voir en annexe page 585, dialogue 7.1), ce qui permet ensuite de classer d'autres réponses de stagiaires comme relevant de la sémantique. Là encore, le formateur introduit dans le milieu du stage des termes (syntaxe/sémantique) qui seront largement utilisés. Il insiste sur le fait que la logique s'occupe à la fois de syntaxe et de sémantique, alors qu'en mathématiques en général, on fait peu de cas de la syntaxe.

Pour montrer l'importance de ce double aspect, il revient sur l'exercice qui a servi pour mettre au jour la quantification universelle implicite associée à l'implication pour reprendre dans ces termes ce qui avait été dit autrement quand ils n'étaient pas disponibles : « le hiatus qu'il y avait tout-à-l'heure, c'est que deux phrases à la construction syntaxique identique avaient des interprétations sémantiques différentes. »

Phase 8 : y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?

Un autre stagiaire propose comme différence le fait qu'il y a des *synonymes* dans la langue naturelle. Sans le savoir, il utilise un mot qui est également dans le vocabulaire de la formation, mais qui n'a pas encore été introduit. R. Cori se contente de contre-argumenter, mais sans choisir de développer ici cette notion : « en mathématiques aussi il y a des synonymes, je dirai même qu'en mathématiques il y en a beaucoup plus que dans la langue naturelle. Ça c'est une très bonne remarque parce que c'est un point que je vais développer, la synonymie c'est beaucoup utilisé en mathématiques. » Les réponses suivantes : le fait que le vocabulaire est moins précis dans la langue courante, qu'on utilise un vocabulaire spécifique, qu'il y a plusieurs sens pour un même mot, restent dans le domaine de la sémantique, c'est d'ailleurs ce qu'argue R. Cori pour la première et la troisième, pour la deuxième il fait remarquer que ça n'est pas une particularité des mathématiques mais de n'importe quel domaine d'activité.

Un stagiaire propose alors quelque chose qui relève de la syntaxe : « le langage mathématique, la syntaxe est plus rigoureuse, plus précise. » Ceci permet de faire deux remarques : que la langue naturelle obéit à des règles syntaxiques autant que le langage mathématique, et que les mathématiciens ne sont pas toujours rigoureux vis-à-vis du respect de la syntaxe du langage mathématique.

Phase 9 : les symboles ne sont pas une distinction fondamentale

Un stagiaire propose enfin les symboles, réponse reconnue comme attendue par le formateur : « Ah, voilà, j'attendais les symboles, ils ont tardé à venir mais les voilà ». Il explique alors que ça n'est pas une différence cruciale : en effet, quand bien même l'utilisation de symboles a permis des progrès considérables en mathématiques, nous pourrions nous en passer, c'est d'ailleurs le cas dans les textes anciens qui n'utilisent que les symboles des chiffres et des figures géométriques (voir en annexe page 589, dialogue 9.1).

Phase 10 : la distinction fondamentale c'est la présence de variables dans le langage mathématique

C'est finalement R. Cori qui amène ce qu'il présente comme la différence essentielle entre langue naturelle et langage mathématique : l'utilisation de variables dans le langage mathématique. Il sait qu'il est peu probable que ce point vienne des stagiaires, et il le présente comme un point de vue personnel : « Et bien la différence essentielle, pour moi en tout cas, c'est que le langage mathématique utilise des variables. Et ça c'est une caractéristique du langage mathématique qui le distingue de façon essentielle, de façon fondamentale, du langage naturel. » (voir dialogue 10.1 en annexe page 590).

Dans cette séquence il n'y a pas de connaissances logiques en jeu. Son rôle est de justifier le fait que la suite du travail d'analyse du langage mathématique porte sur la notion de variable, en la présentant comme une notion fondamentale dans le langage mathématique. Cette justification est nécessaire car le formateur sait qu'il est très peu courant de donner de l'importance à la notion de variable (l'absence de cette notion dans les pages qui traitent de logique dans les manuels semble lui donner raison). La sollicitation des stagiaires est un choix ponctuel [9], elle permet qu'émergent des éléments que le formateur disqualifie (notamment la présence de symboles), mais qui sont l'occasion de faire des remarques qui, tout en n'étant pas essentielles dans le contenu du stage, contribuent à l'enrichir (différence syntaxe/sémantique qui aurait été explicitée à un autre moment si elle n'avait pas émergé ici, notion de synonymie reportée à un moment ultérieur, fait que les mathématiciens se préoccupent très peu de la syntaxe, que la langue française a aussi une syntaxe rigoureuse...).

Séquence 5 : sur le statut muette/parlante des variables

Phase 11 : le destin des variables en mathématiques c'est qu'elles peuvent devenir muettes

Le formateur laisse quelques secondes aux stagiaires pour réagir à cette « prise de position » en faveur des variables comme distinction fondamentale entre langue usuelle et

9. En 2012, en arguant qu'il fallait faire vite, l'organisation du stage n'étant pas la même, R. Cori avait introduit les variables comme élément caractéristique du langage mathématique en mettant en scène un dialogue fictif entre lui et les stagiaires, en ne mentionnant comme réponse supposée des stagiaires que la question des symboles, qui est, nous l'avons vu, celle attendue ici aussi.

langage mathématique, et devant le silence de ceux-ci, il amène lui-même l'objection à laquelle il s'attend éventuellement pour la contre-argumenter :

> R. Cori : Et là, j'attends vos protestations. Normalement dans le scénario vous devez vous mettre à protester en disant « mais si dans la langue naturelle il y a plein de variables » [...] Habituellement l'objection que j'ai, mais vous êtes un bon public, vous n'objectez pas, c'est « mais je peux très bien utiliser la lettre x dans une phrase du langage courant, je peux dire "hier j'ai rencontré monsieur x" ». Sauf que quand je dis « hier j'ai rencontré monsieur x », non mais vous mettez x à la place de Dupont, c'est pas ça qui en fait vraiment une variable [...] Le destin des variables dans la langue mathématique c'est quoi ? [extrait du dialogue 11.1 en annexe page 591]

Là encore il est très peu probable que la réponse à laquelle pense le formateur (la mutification) soit proposée par les stagiaires en réponse à cette question très générale. Il reformule donc sa question et interroge les stagiaires sur « une façon faire disparaître une variable ». Une stagiaire amène alors le terme « muette », qui est sans doute connu d'une partie des stagiaires car il est utilisé au lycée à propos de la variable d'intégration en Terminale.

Phase 12 : exemple d'une proposition mathématique avec une variable muette

Comme pour la notion de proposition, les notions de variable parlante ou muette ne sont pas mathématiquement définies. Par contre, il y a une volonté du formateur de faire passer des expressions, des façons de dire pour faire comprendre ces notions, notamment l'expression qui a déjà été rencontrée « la proposition parle de la variable x » ou « le nom d'un objet qui dépend de x. »

Phase 13 : synonymie

La notion d'expressions synonymes est également introduite avec cet aspect sémantique : deux noms sont synonymes s'ils désignent le même objet, deux propositions synonymes sont deux façons de dire la même chose (voir dialogue 13.1 en annexe page 592).

Phase 14 : qu'est-ce qui me fait dire que x est muet ?

À partir d'un exemple d'expression comportant des variables muettes donné par un stagiaire ($\int_0^1 xdx$, qui était présent dans la liste d'assemblages pour la séquence 2, le formateur fait identifier l'assemblage $\int \ldots d \ldots$ comme étant ce qui rend la variable muette et demande une « autre façon plus commune de fabriquer des expressions avec des variables muettes. » Les stagiaires proposent « les équations », puis « les fonctions ». Ces réponses sont justes, mais ne sont pas développées par le formateur qui les juge compliquées comme premiers exemples de signes mutificateurs (l'expression n'est pour l'instant pas utilisée). Celui-ci provoque alors ce qu'il attend en revenant à la définition de « la suite u_n converge vers ℓ » pour identifier les quantificateurs comme mutificateurs.

Phase 15 : retour sur les énoncés « n est premier et n est impair »

et « n est premier $\Rightarrow$ n est impair »

R. Cori revient alors encore une fois sur la différence de réaction face aux expressions « n est impair et n est premier » et « n est impair $\Rightarrow$ n est premier » pour montrer comment il est maintenant possible avec le vocabulaire introduit d'expliquer ce qui se passe :

> R. Cori : Maintenant on est en mesure, je pense, de formuler de façon plus précise, et plus claire peut-être, qu'est-ce qui a fait que nous réagissons tous différemment devant ces deux phrases. Et bien c'est que dans la première nous voyons une affirmation relative à un objet qui s'appelle n, et dans la deuxième nous voyons une affirmation générale relative aux propriétés de l'ensemble des entiers. Et donc très précisément ce que ça signifie, c'est que nous avons traité la variable n dans le deuxième cas comme si elle était muette alors que ici *(en montrant première proposition)* elle était parlante [...] Et donc n est apparue comme muette ici et parlante là, alors que rien ne l'indique parce que la chose qui pourrait l'indiquer, pourquoi elle est muette, parce qu'il y a le « quelque soit » sauf qu'il n'est pas écrit mais il y est quand même. [extrait dialogue 15.1 en annexe page 594]

Un stagiaire intervient alors et ramène la question du « donc », en demandant : « si on met “n est impair donc n est premier”, elle est muette ou parlante ? » Le formateur rappelle en premier lieu que ce n'est pas une proposition, mais précise que s'il fallait donner un statut à la variable n dans un tel énoncé, ce serait celui de variable parlante parce qu'il n'y a pas de mutification. Finalement, le premier argument pouvait suffire : l'énoncé « n est impair donc n est premier » n'est pas une proposition, cela n'a donc pas de sens de se poser la question du statut de la variable ici. Cependant, nous avons vu que le fait qu'un tel énoncé ne soit pas une proposition, s'il a déjà été abordé, n'est pas encore quelque chose dont les stagiaires sont convaincus. Par ailleurs, dans la mesure où le parti pris est de ne pas donner de définition mathématique du statut des variables mais d'en donner une certaine compréhension à travers l'idée « ça parle de n », on peut appliquer ce critère à la phrase « n est impair donc n est premier ». Répondre à la question du stagiaire avec comme seul argument « ça n'est pas une proposition » aurait eu alors toute chance de passer pour une position autoritaire inopérante. Un stagiaire demande ensuite si c'est ça la différence entre *si... alors* et *donc*. Nous voyons que cette question, présente dès le début de la matinée mais finalement toujours « non résolue », reste à l'esprit de plusieurs stagiaires. Cette persistance peut être interprétée comme une réelle difficulté à changer de conception sur les énoncés avec « donc ». Pour le formateur, il manque encore des connaissances sur l'implication pour revenir à cette distinction, qu'il va aborder à la suite de ces réactions des stagiaires. C'est donc sur l'implication que va porter la séquence suivante, plus précisément sur le connecteur implication et sur les éventuelles réactions que peut susciter sa table de vérité.

Séquence 6 : sur la différence entre *si* A *alors* B et A *donc* B

Phase 16 : table de vérité de l'implication

R. Cori demande aux stagiaires de lui dire dans quels cas « A implique B » est vrai, dans quels cas c'est faux. Une stagiaire répond « si A est fausse c'est toujours vrai et si A est vraie, l'implication n'est vraie que si B est vraie. » R. Cori remplit donc la table de vérité en interpellant les stagiaires mais c'est toujours la même personne ayant déjà répondu qui s'exprime pour chaque ligne. Nous savons bien que cette table de vérité, et notamment les lignes avec la prémisse fausse, peut poser problème, et le formateur intervient immédiatement en donnant un premier argument pour essayer de convaincre que c'est bien comme ça qu'il faut remplir cette table : la seule façon de convaincre quelqu'un que l'implication « A implique B » est fausse c'est de lui prouver que A est vraie et que B est fausse. Un stagiaire au moins exprime qu'il n'est pas complètement convaincu : « en fait les deux premiers cas on dit que c'est vrai parce que c'est pas faux, je ne comprends pas... » Le formateur utilise alors un deuxième argument : il écrit la proposition « n pair $\Rightarrow n^2$ pair » qui est vraie pour tout entier n et donc en particulier pour 2 (ce qui ne pose pas de problème puisqu'on a alors « 2 pair $\Rightarrow$ 4 pair ») mais aussi pour 3 (et là on a « 3 pair $\Rightarrow$ 9 pair », qui est un cas « faux implique faux »).

Un stagiaire reprend alors la justification : « l'implication est vraie parce qu'on a quelque chose de faux au départ, on a quelque chose de faux à la fin, donc au total c'est vrai ». Remarquons qu'il ne nomme pas les deux parties de l'implication, et parle avec un vocabulaire qui évoque plutôt la déduction puisqu'il y a un départ et une fin, c'est-à-dire un cheminement.

Phase 17 : différence entre *si A alors B* et *A donc B*

Il était indispensable d'être d'accord sur la table de vérité de l'implication avant d'aborder finalement cette distinction entre *si... alors* et *donc* puisque la première remarque du formateur, qui va enfin expliquer cette distinction, concerne la table de vérité de l'implication :

> — R. Cori : Alors j'en viens juste à une chose, quand vous dites « si A alors B », qui est une phrase que vous prononcez souvent devant vos élèves, est-ce que savoir que ça c'est vrai, ça vous renseigne sur la vérité de A ?
>
> — S : Non.
>
> — R. Cori : Non, ça ne vous renseigne pas sur la vérité de A. Quand vous dites « si A alors B » vous ne dites rien sur le fait que A est vraie ou non. Est-ce que ça vous renseigne sur la vérité de B ?
>
> — S : Non.
>
> — R. Cori : Non, ça ne vous renseigne pas sur la vérité de B, la seule chose que ça vous dit c'est que à coup sûr vous n'êtes pas dans le cas où A est vraie et B est fausse. [extrait dialogue 17.1 en annexe page 598]

Le formateur en appelle à la pratique des stagiaires : il les invite à se pencher sur leur propre utilisation de *si... alors* et de *donc* :

> — R. Cori : Maintenant écrivons « A donc B », qui est aussi quelque chose que vous dites souvent à vos élèves, et vous je suis certain que vous ne le dites pas indifféremment. Quand vous dites « A donc B », qu'est-ce que vous êtes en train de leur dire ?
>
> — S : Que A est vraie.
>
> — R. Cori : Vous êtes en train de leur dire que A est vraie, et vous êtes en train de leur dire que B est vraie [...] et suivant les circonstances, vous dites un troisième ingrédient, en tout cas vous ajoutez une troisième chose qui est « et j'ai de bonnes raisons de pouvoir vous dire que B est vraie après vous avoir dit que A est vraie ». [extrait dialogue 17.1 en annexe page 598]

8.2.7 Analyse globale de l'exposé sur le langage mathématique

Sur l'activité du formateur

Cette partie du stage est de celles que j'ai appelées « exposés théoriques » dans le tableau donnant le planning général. Nous voyons qu'il ne s'agit pas d'un exposé magistral avec transmission directe des connaissances, même si c'est essentiellement le formateur qui a la parole (ce qu'il reconnaît d'ailleurs), mais plutôt d'un dialogue. C'est pour cette raison que je l'ai apparenté à ce que M. Hersant a appelé *cours dialogué* dont je vais reprendre ici les caractéristiques présentées page 337 :

- « Le professeur choisit de s'appuyer sur un problème pour réaliser son objectif » : il ne s'agit pas vraiment ici d'une entrée par des problèmes, mais plutôt d'une entrée par des questions. Dans les deux premières séquences, il y a un milieu matériel (les énoncés de l'exercice du test de début de stage pour la séquence 1, les assemblages proposés par le formateur pour la séquence 2), chaque stagiaire est invité à se prononcer sur la question posée et il y a une mise en commun des réponses voulue par le formateur qui amène une première confrontation des différentes réponses entre elles. Cette diversité des réponses serait sans doute suffisante pour proposer, à la suite de cette situation d'action, une situation de formulation où les stagiaires mis en petits groupes auraient à rédiger une seule réponse argumentée collective. Dans la séquence 1, les stagiaires sont peu sollicités pour formuler les raisons de leurs actions. Nous voyons par exemple dans le dialogue 1.6 (voir en annexe page 568), quand les stagiaires qui ont déclaré que tous les énoncés de la séquence 1 étaient faux sont sollicités, que le premier qui expose son argument le fait de façon confuse. Une mise à l'écrit à plusieurs donnerait sans doute des arguments plus clairs.

– Nous pouvons dire que, comme dans un cours dialogué, le formateur « choisit une résolution collective et guidée ». La participation des stagiaires ne fait finalement pas dévier le formateur d'un itinéraire pensé à l'avance.
– Même si certains mots (« connecteur » dans la phase 1, « muette » dans la phase 11) ou certaines propriétés des notions de logique (table de vérité de l'implication dans la phase 16) sont proposés par des stagiaires, c'est à chaque fois en réponse à une question très ciblée du formateur, et nous pouvons dire qu'il garde « la responsabilité de la production des connaissances et de leur évaluation ».

Le discours du formateur est empreint d'humour, d'ironie, de métaphore, de parenthèses culturelles. Cette tonalité est d'autant plus possible (et semble appréciée des stagiaires qui y réagissent par des rires, des commentaires) qu'il s'agit d'échanges entre adultes faisant d'une certaine façon partie d'un même corps de métier, même si dans le temps du stage ils occupent les positions différentes de stagiaires et de formateur.

Les pratiques individuelles ne sont jamais remises en cause directement par le formateur. Celui-ci essaie plutôt de faire prendre conscience aux stagiaires d'un contexte institutionnel contraignant qui les influence, sans forcément qu'ils s'en rendent compte d'ailleurs :
– lecture de l'implication avec une quantification universelle comme c'est fait dans la communauté mathématique : « vous avez des yeux de mathématiciens, ce qui n'est pas étonnant puisque vous êtes professeurs de mathématiques [...] chaque fois que le mathématicien lit ou écrit une implication dans laquelle figure une variable ou plusieurs, il l'interprète systématiquement comme étant universellement quantifiée », dialogue 1.8.
– Interdiction d'exhiber les quantifications : « la quantification n'est jamais explicite pour une raison très simple c'est que nous sortons d'une période [...] où les quantificateurs ont été totalement bannis », dialogue 2.1.
– Confusion entre *si... alors* et *donc* dans les manuels : « je vous rassure tout de suite il y a au moins la moitié des manuels qui interprètent le donc comme une implication », dialogue 3.5.

Sur la constitution d'un savoir de référence

Dans la séquence 1, plusieurs notions de logique sont introduites lors des épisodes 3 et 4 de la phase 1 :
– la notion de proposition : elle n'est pas définie (R. Cori : « on peut appeler ça [les énoncés de l'exercice] des propositions mathématiques, on est d'accord »), de toute façon ici il ne sera question que de phrases qui sont des propositions mathématiques. Des lettres majuscules sont utilisées pour nommer les propositions. Le terme *proposition* est utilisé 14 fois par le formateur, 1 fois par un stagiaire.
– L'aspect syntaxique de la construction d'une proposition : les propositions sont des assemblages « fabriqués » selon certains procédés, par exemple à l'aide d'un connecteur.

– La notion de connecteur : le terme est proposé par un stagiaire. Ils sont vu ici du point de vue syntaxique d'opérateurs sur les propositions.
– La notion de variable libre : R. Cori choisit de ne pas utiliser la terminologie « la variable n est libre dans la proposition P », mais d'utiliser une expression qui porte un sens intuitif : « la proposition P parle de la variable n », reprise sous différentes formes dans le dialogue 1.4. Ces répétitions constituent une sorte d'institutionnalisation de cette expression, utilisée par le formateur au même titre que les mots « proposition », « connecteur ».

Dans ces épisodes, les notions de proposition, connecteur, variable sont d'abord introduites comme des outils, des noms pour les éléments des énoncés qui sont analysés. Mais la dimension objet est également très rapidement présente dans le discours du formateur :
– le rôle des connecteurs est donné dans un cadre généralisé : « à partir de propositions on en fabrique d'autres en utilisant les connecteurs ».
– Les propositions sont décrites comme « des affirmations » (le terme est proposé par un stagiaire) qui « disent » des choses, et sont « susceptibles d'être vraies ou fausses ».
– Les variables sont présentes comme noms d'objet : « un objet qui s'appelle n ». Certaines propositions sont des « affirmations relatives à un objet qui s'appelle n », et d'autres sont des « affirmations générales relatives aux propriétés d'un ensemble d'objets [10] », distinction qui caractérise le statut d'une variable : *parlante* ou *muette*.

Nous pouvons voir aussi comment les outils sont affinés au fur et à mesure de l'exposé. Par exemple, le phénomène qui est l'objet de la première séquence (le fait d'associer une quantification universelle implicite à une implication, ce qui provoque une différence de réaction face aux trois énoncés de l'exercice 1 du test de début de stage) est repris plusieurs fois, et explicité de façons différentes :
– « le *si... alors* est porteur de quantification universelle » (séquence 1, dialogue 1.8),
– « les mathématiciens utilisent l'implication presque exclusivement non pas comme simple connecteur binaire, mais comme connecteur binaire accompagné d'une quantification universelle implicite » (séquence 1, dialogue 2.1),
– « deux phrases à la construction syntaxique identique avaient une interprétation sémantique différente » (séquence 4, dialogue 7.1).
– « dans la première [proposition « n est un carré parfait et n est impair »] nous voyons une affirmation relative à un objet qui s'appelle n, et dans la deuxième [proposition « n est est impair $\Rightarrow$ n est premier »] nous voyons une affirmation générale relative aux propriétés de l'ensemble des entiers. Et donc très précisément ce que ça signifie, c'est que nous avons traité la variable n dans le deuxième cas comme si elle était muette alors que ici *(en montrant première proposition)* elle était parlante » (séquence 5, dialogue 15.1).

10. Le domaine auquel la variable est astreinte.

Le savoir n'est pas exposé de façon linéaire, chaque nouveau point institutionnalisé est ensuite disponible pour être repris à un autre moment du stage.

M. Hersant qualifie le cours dialogué de « pratique dans laquelle la décontextualisation et l'institutionnalisation des savoirs et connaissances se font de façon diffuse tout au long de l'enseignement » (Hersant, 2004, p. 4). C'est bien ce qui se passe ici, et un des leviers utilisés par le formateur pour l'institutionnalisation est la répétition des mots ou expressions. M. Hersant s'interroge sur la capacité des élèves à distinguer ces fonctions de décontextualisation et d'institutionnalisation. Sur ce point, le fait d'être en présence d'adultes est important : ils sont plus en mesure que des enfants de prendre en charge cette décontextualisation et cette insitutionnalisation grâce à une plus grande capacité à extraire du discours du formateur les éléments à retenir (R. Cori note quelques points importants au tableau, mais finalement assez peu de choses), capacité qu'ils ont acquise notamment via leur expérience d'étudiants dans l'enseignement supérieur.

Il se constitue ainsi pour les stagiaires un corpus de savoirs sur des notions de logique, qui n'est pas un corpus mathématique, qui est le *savoir enseigné dans la formation*. Il vient éventuellement compléter, renouveler, des connaissances en logique mathématique que les stagiaires avaient déjà pour constituer pour chacun d'eux une référence permettant de clarifier le savoir à enseigner. À l'échelle de la communauté de ce stage, il constitue donc un *savoir de référence*.

8.2.8 Après-midi de la première journée

La première matinée du stage a donc été consacrée au langage. Nous avons vu dans la description du contenu qu'il y avait un choix d'axer prioritairement la formation sur ce pilier de la logique. Mais le raisonnement est également abordé, notamment à travers la première séquence de l'après-midi qui est un exposé de T. Joly sur la structure modulaire du raisonnement mathématique.

Nous avons vu aussi que les formateurs prévoyaient une alternance d'exposés théoriques et d'apports pratiques. Dans cette première après-midi, des membres du groupe Logique de l'IREM de Paris viennent présenter des activités proposées en classe.

Des descriptions un peu plus détaillées de l'exposé de T. Joly et de la présentation d'activités sont données en annexe, respectivement page 600 et page 604.

Exposé théorique sur la structure modulaire du raisonnement mathématique, dialectique démonstrateur/utilisateur

Cet exposé est fait par T. Joly, enseignant-chercheur à l'Université Paris Diderot, membre de l'équipe *Preuves, programmes, systèmes*. C'est une commande qui lui a été faite, et cet exposé correspond en grande partie à ce qu'il expose aux étudiants de première année d'université dans le cours *Langage mathématique*.

T. Joly expose la structure modulaire du raisonnement mathématique : dans une démonstration, nous ne re-démontrons pas tout à partir des axiomes, nous utilisons des boîtes, des théorèmes, qui sont isolables au sein de la démonstration, et qui permettent d'avoir des preuves plus faciles à suivre et à vérifier. Cette modularité a pour conséquence que, dans la rédaction d'une démonstration, nous nous retrouvons tour à tour dans la position d'un démonstrateur et dans la position d'un utilisateur, ce que T. Joly appelle la dialectique démonstrateur/utilisateur [11]. Cette dialectique a à son tour pour conséquence que nous adoptons alternativement deux positions différentes par rapport aux variables dans une démonstration. T. Joly les exprime à travers les termes « choisir » et « subir »et propose le tableau suivant :

	Démonstrateur	Utilisateur
de $\forall x\ P[x]$	doit envisager tous les x possibles subit x	choisit le x qu'il veut
de $\exists x\ P[x]$	choisit un x pour lequel il prouve $P[x]$	subit un x arbitraire, dont il sait seulement $P[x]$
$\forall x\, \exists y\ P[x, y]$	subit un x arbitraire, en fonction duquel il choisit le y pour lequel il démontre $P[x, y]$	choisit le x qu'il veut et subit en retour un y pour lequel il dispose de $P[x, y]$
$\exists y\, \forall x\ P[x, y]$	choisit y librement, puis subit n'importe quel x pour lequel il démontre $P[x, y]$	subit un y, puis choisit x, x' ... pour lequel il dispose de $P[x, y]$, $P[x', y]$...

FIGURE 8.8 – Tableau de manipulation des quantificateurs

À la suite de cet exposé, de courts échanges, qui partent de remarques des stagiaires ou des formateurs qui sont présents, permettent de faire intervenir des éléments qui ne sont pas essentiels dans cette formation, mais que les formateurs ont à l'esprit, et qu'ils glissent dans le contenu du stage si l'occasion se présente (ce qui, par exemple pour le principe du maximum d'information, se produit très souvent) :

– Dans son exposé T. Joly a utilisé la définition de « f a pour limite ℓ en a » et précise que « en première année on n'arrive plus à faire utiliser cette définition aux étudiants. » Une stagiaire raconte que dans sa classe de Terminale, elle donne la définition « avec des mots : tout intervalle contient toutes les valeurs pour f assez proche de machin », mais qu'après elle écrit la définition avec « des epsilon et des intervalles et des pour tout et des il existe », et constate qu'en fait les élèves la comprennent mieux. R. Cori souligne que c'est une position, en faveur de laquelle il prend parti, qui va quelque peu

11. Cette dialectique se retrouve dans le fait que, dans certains systèmes logiques, comme par exemple la déduction naturelle (voir page 157), il y a pour chaque connecteur et chaque quantificateur une règle d'introduction (utile quand on veut démontrer) et une règle d'élimination (utile quand on veut utiliser).

à l'encontre des préconisations actuelles en faveur d'énoncés le moins formels possibles. Je souligne alors le fait qu'exprimer les quantifications avec les quantificateurs, même écrits en mots, est déjà une formalisation, et que la symbolisation n'est qu'une étape supplémentaire, pas forcément la plus compliquée.

– C. Hache, maître de conférence à l'Université Paris Diderot en didactique des mathématiques, présent également en tant que formateur dans ce stage, reprend quant à lui le tableau des manipulations des quantificateurs pour dire qu'il y est bien visible que l'on démontre parfois en choisissant un exemple, notamment dans la technique du contre-exemple, ce qui peut laisser les élèves perplexes car ces derniers étant la plupart du temps en présence d'énoncés universels, on leur dit plus souvent le contraire.
– Une stagiaire raconte que si elle écrit $2 \leqslant 3$, la plupart de ses élèves de Terminale considèrent que c'est faux, ce qui permet à R. Cori de parler du principe du maximum d'information (voir page 120) : « d'une façon générale on est réticent à écrire quelque chose qui est restrictif par rapport à l'information dont on dispose ».

Analyse globale de l'exposé sur la structure modulaire du raisonnement mathématique

Les stagiaires ont moins participé dans cette séquence (notamment parce qu'ils ont été moins sollicités), l'exposé est présenté de façon assez magistrale. La dialectique démonstrateur/utilisateur peut être une façon d'expliquer une difficulté des élèves qui ont à changer de position au sein d'une même démonstration. Mais cet ancrage dans la classe n'est pas exploité par le formateur. Le vocabulaire et les expressions employées (*position de démonstrateur, position d'utilisateur*, *subir, choisir une variable*) sont encore une fois relativement imagés, mais ils sont plus complexes que les expressions utilisées dans l'exposé de la matinée, et donc moins facilement utilisables en classe. Ainsi, cette séquence semble moins opérationnelle en terme de liens avec la pratique.

Présentations d'activités par des professeurs du secondaire du groupe Logique de l'IREM de Paris

La séquence qui suit, et termine la première journée de formation, est une phase de présentation d'activités proposées en classe. G. Notter, professeur au Lycée de la Maison d'Éducation de la Légion d'Honneur à Saint Denis, et C. Huet, professeur au collège et au lycée Jean-Baptiste Say à Paris, présentent des activités sur les connecteurs ET et OU et une activité sur les théorèmes de Thalès et Pythagore.

Activités sur les connecteurs ET et OU au collège

La première activité présentée (voir annexe page 604), sur les connecteurs ET et OU, n'a en fait pas encore été testée dans une classe dans sa version finale. Elle a été élaborée à partir d'un exercice proposé par une collègue du groupe dans une classe de Sixième. Elle est présentée par G. Notter. Plusieurs points sur les connecteurs ET et OU sont abordés avec les stagiaires :

– quelques points sensibles autour du langage, par exemple le fait qu'il peut y avoir ambiguïté sur la façon d'entendre « les entiers dont le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5 » (formulation qui peut paraître bizarre, obtenue par mise à la forme négative de « les entiers dont le chiffre des unités est 0 ou 5 »), qui veut sans doute signifier « les entiers dont le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5 » mais qui peut être entendue comme « les entiers dont le chiffre des unités n'est pas 0 ou n'est pas 5 », auquel cas tous les entiers conviennent.
– Leurs tables de vérité, qui ne sont pas explicitement données, mais évoquées comme un savoir partagé.
– Les lois de Morgan, qui sont explicitement écrites.

C. Huet présente ensuite un exercice qu'elle a proposé à ses élèves de Sixième également sur les connecteurs ET et OU (voir en annexe page 609). Elle indique que cet exercice n'était pas planifié à l'avance dans sa progression, mais lui a été suggéré par des discussions avec les élèves autour du ET utilisé dans des exercices de géométrie pour relier deux conditions portant sur un objet. Dans l'exercice qu'elle présente, elle demande aux élèves de « dire [pour chaque phrase] si elle est vraie ou fausse », et la phrase n° 3 est : « 204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24 ». C. Huet est membre du groupe logique depuis 3 ans, a suivi des cours de logique mathématique dans sa formation universitaire, et est donc parfaitement consciente de la différence entre *si... alors* et *donc*. Aussi commente-t-elle elle-même l'utilisation de phrases avec *donc*, en expliquant qu'elle préfère éviter les phrases en *si..., alors...* en Sixième, et en arguant que le *donc* est finalement ce qu'on utilise le plus souvent en mathématiques. Cette position est en contradiction avec l'importance donnée dans la matinée par R. Cori à cette différence. Le choix de C. Huet montre une difficulté à prendre en compte cette différence dans la pratique, avec des élèves. C'est donc avec une suggestion pratique que je reprends cette question : je suggère aux stagiaires d'utiliser un vocabulaire différent, ce qui oblige à des énoncés d'exercices différents, pour ne pas entretenir la confusion : les propositions, par exemple celles en *si..., alors...*, sont *vraies* ou *fausses*, les raisonnements exprimés par de phrases avec *donc* sont *corrects* ou *incorrects*.

Dans la présentation de la première activité, l'accent est plutôt mis sur le contenu en jeu, en expliquant notamment le pourquoi des changements par rapport à l'activité initiale. Dans la présentation de la deuxième activité, l'accent est plutôt mis sur le déroulement, comment elle est venue à l'idée du professeur, comment s'est passée la séance, ce qu'ont pu finalement faire les élèves. Finalement elles se complètent bien, le contenu de la première activité se retrouvant dans la deuxième.

Les stagiaires restent silencieux pendant tout cet exposé. Ici encore ils sont moins sollicités que dans l'exposé de la matinée, puisqu'aucune question ne leur est posée. Sans doute aussi n'ont-ils pas eu assez de temps pour rentrer dans les activités qui sont finalement présentées sans qu'ils aient pu les faire eux même et donc identifier clairement le contenu mathématique en jeu, les différentes réponses possibles.

Activités sur les théorèmes de Thalès et de Pythagore

La présentation se poursuit avec une activité sur les théorèmes de Pythagore et de Thalès que C. Huet a proposée dans sa classe de Troisième (voir en annexe page 614). Elle explique d'abord comment elle introduit les termes *théorème direct*, *contraposée*, *réciproque* dans une séance d'une heure avant d'attaquer la géométrie, puis comment dans l'activité proposée les élèves sont invités à d'abord se questionner sur la forme du théorème qu'ils vont utiliser (forme directe, réciproque, contraposée).

C. Huet prend explicitement position en faveur de l'utilisation du terme *contraposée* dans sa classe de Troisième. J'évoque alors les instructions officielles qui n'encouragent pas à l'utiliser, et je les commente en allant plutôt dans le sens de C. Huet.

Cela suscite des réactions chez les stagiaires, la discussion s'engage sur la question de la présentation sous forme de deux implications ou d'une équivalence, des erreurs de rédaction des élèves qui confondent les deux connecteurs… En choisissant de présenter cette activité, les formateurs savent qu'ils vont tomber sur ces questions polémiques. C. Huet indique que dans sa classe elle sépare partie directe et réciproque. Sans prendre position, je commente en revenant encore une fois sur la distinction entre implication et déduction et en insistant sur le fait que l'équivalence est un outil puissant puisqu'une seule équivalence permet de conclure dans quatre situations différentes.

Activités sur les connecteurs ET et OU en classe de Seconde

G. Notter explique ensuite où et comment elle aborde les connecteurs ET et OU dans sa classe de Seconde, avec l'idée de montrer une progression tout au long de l'année (voir en annexe page 618).

Elle explique comment le deuxième exercice, extrait d'un manuel, ne lui convient pas à cause de l'énoncé. Par ailleurs, elle ne le propose plus, même en modifiant l'énoncé, car il a amené trop de discussions dans la classe, qu'elle a trouvées intéressantes mais très chronophages. L'enjeu de ces discussions est le principe du maximum d'information qui amène à considérer qu'il est faux d'affirmer « A OU B » si l'on sait que « A ET B » est vraie. Elle précise qu'elle continue cependant à aborder cette question en cours, et que cela amène souvent les élèves à poser dans les jours suivants des questions à chaque occurrence d'un « et » ou d'un « ou ».

Elle raconte ensuite comment elle a laissé les élèves mener une résolution d'inéquation produit en manipulant des connecteurs ET et OU, avant de proposer d'utiliser un tableau de signes qui est alors apparu comme un outil évitant une résolution fastidieuse.

Dans son récit de ces moments de classe, G. Notter décrit d'une part une réflexion par rapport à des exercices spécifiques sur les connecteurs ET et OU et par rapport à des propositions de manuels, d'autre part la manière dont elle se saisit de certains autres exercices pour travailler sur ces connecteurs.

R. Cori fait ensuite deux remarques sur l'utilisation des variables :
- Dans l'expression « déterminez le signe de $(x-3)(3x+2)$ », rien ne signifie que x est muette [12].
- Dans le premier exercice (où il faut compléter un tableau : dans la première colonne il faut écrire des inégalités avec x, dans la seconde l'appartenance de x à un certain intervalle, dans la troisième représenter une droite graduée avec une partie colorée), il y a une variable dans les deux premières colonnes du tableau mais pas dans la troisième.

Un commentaire que je fais sur le premier exercice nous amène à faire un peu de calcul propositionnel, à parler de tautologie (terme que les stagiaires ne connaissent pas tous), et notamment de la tautologie « $(A \Rightarrow B)$ OU $(B \Rightarrow A)$ » et de la confusion possible entre les deux propositions « $\big(\forall x\,(A[x] \Rightarrow B[x])\big)$ OU $\big(\forall x\,(B[x] \Rightarrow A[x])\big)$ », qui n'est pas toujours vraie, et « $\forall x \big((A[x] \Rightarrow B[x])$ OU $(B[x] \Rightarrow A[x])\big)$ » qui est toujours vraie. Ce court moment qui s'apparente à des résolutions d'exercices de logique mathématique semble ne pas être évident pour les stagiaires qui demandent plusieurs fois de répéter certaines explications. C'est une des difficultés dans l'organisation du stage : les connaissances en logique mathématique qui interviennent dans certaines remarques à propos d'activités pour la classe ne sont pas disponibles pour tous les stagiaires.

12. Bien que cette expression ne soit pas une proposition, on peut par extrapolation donner un sens au fait que la variable x y est muette.

Analyse globale de la séquence de présentation d'activités

Nous avons vu que le contexte institutionnel actuel concernant l'enseignement des notions de logique pouvait amener des difficultés, d'une part du fait du manque de précision des objectifs du programme sur ces notions, d'autre part parce que l'enseignement de ces notions doit se faire au fil des autres chapitres.
En présentant des activités qu'elles ont elles-mêmes expérimentées dans leurs classes, G. Notter et C. Huet montrent ce qu'elles ont proposé, et comment cela s'est déroulé. Nous voyons notamment comment elles se saisissent de certains moments pour aborder des questions de logique, comment l'expérience permet des réajustements et une plus grande réactivité. Elles ne proposent pas des activités clés en main, mais donnent à voir la réflexion qu'elles mènent depuis plusieurs années sur l'enseignement de la logique. Dans cette réflexion, elles font référence à la logique mathématique. Elles montrent aussi la complexité de la mise en œuvre dans la classe, par des hésitations (par exemple G. Notter sur un exercice qu'elle choisit de ne plus faire) ou des choix pratiques décalés par rapport à des considérations théoriques (par exemple C. Huet qui choisit dans un exercice Vrai/Faux pour des sixièmes de proposer des phrases avec *donc* plutôt qu'avec *si... alors*).
Des éléments théoriques, éventuellement des rappels de ce qui a été exposé dans la matinée, viennent compléter cette réflexion. Il s'agit d'avantage d'éléments pour les professeurs, pour l'analyse des activités, pour développer une certaine habileté de manipulation de ces notions de logique, que d'éléments directement destinés aux élèves. La présence de plusieurs formateurs favorise ces interventions : à côté de celui qui parle, plusieurs autres formateurs sont présents, qui peuvent alors saisir un élément du discours sur lequel ils pensent qu'il est intéressant de revenir. Cependant, nous avons vu que des remarques nécessitant des connaissances en logique sont abordées peut-être trop rapidement pour être bien comprises par tous les stagiaires.
Finalement, comme dans la matinée, les activités présentées servent surtout d'exemples pour montrer les questions à se poser quant à l'enseignement de notions de logique. En particulier, le langage est toujours au cœur de plusieurs remarques qui sont faites sur la rédaction des textes des activités. Ces textes sont porteurs de nos pratiques langagières et de leurs implicites, mais avec parfois des effets de contrat qui les mettent en porte-à-faux avec la logique (quand par exemple un texte d'exercice peut amener à penser que « A ET B » peut être vraie sans que « A OU B » le soit, ou que dans la gestion des variables, des propositions avec une variable libre sont données comme équivalentes à des proposition sans variable libre).

8.2.9 Analyse globale de la première journée

La première journée du stage répond à la nécessité d'un double apport théorique et pratique pour l'enseignement des notions de logique, puisqu'elle contient, à l'instar des autres journées du stage, deux séquences d'exposés théoriques et une séquence de présentation d'activités pour la classe. Cependant, la séparation n'est pas aussi nette : des allusions à la classe sont régulièrement présentes dans les exposés théoriques et des commentaires théoriques sont présents dans la présentation d'activités. Sans que cela soit explicitement dit aux stagiaires, cette imbrication est aussi une source d'inspiration pour un enseignement de notions de logique qui respecte la contrainte d'être présent de façon transversale.

Par exemple, à l'occasion de la présentation des activités, les formateurs présents font des commentaires qui soulignent des propriétés des notions de logique en jeu. Ces commentaires sont autant de digressions qu'un professeur peut faire dans sa classe. Les formateurs se heurtent par contre à deux difficultés auxquelles un enseignant est également confronté :
– l'aspect chronophage de ces commentaires,
– certains commentaires s'appuient sur des présentations parfois assez formelles de propriétés des notions de logique en jeu. Il y a donc un équilibre délicat à trouver entre approche naïve et discours formalisé.

Ces commentaires sont l'occasion d'un réinvestissement des connaissances décontextualisées à partir d'autres situations (par exemple, après avoir caractérisé le statut – muette ou parlante – des variables, à l'occasion de la présentation d'une activité, les stagiaires sont invités à se demander quel est le statut de la variable x dans la phrase « déterminez le signe de $(x-3)(3x+2)$ », ce qui permet de pointer que rien, à part un effet de contrat associé à ce type d'énoncé d'exercice, ne signale qu'il faut envisager toutes les valeurs possibles de la variable x).

Les questions que les formateurs posent sur des formulations courantes en mathématiques, et auxquelles ils répondent par une analyse utilisant des notions de logique, sont une autre façon de rendre la logique partout présente. C'est une entrée plus inhabituelle que les commentaires accompagnant la résolution d'exercices. En effet, d'une certaine façon, les commentaires lors de la résolution d'un exercice peuvent s'apparenter à des « compléments mathématiques » et, que les stagiaires aient ou non l'habitude de cette pratique dans leur classe, c'est en tout cas une démarche qu'ils peuvent facilement concevoir. Bien sûr, se poser des questions sur la façon de formuler un théorème, essayer de comprendre ce qu'a dit un élève et l'aider à le reformuler, sont également des pratiques courantes. Mais il est rare d'y répondre en adoptant l'angle proposé dans le stage (se poser la question de la structure logique d'une proposition pour en évaluer la complexité, du statut des variables, des éventuelles ambiguïtés qui peuvent amener différentes interprétations d'un énoncé). La première séquence montre bien cela : il faut plusieurs interventions du formateur pour que les stagiaires identifient la raison pour laquelle ils ne réagissent pas de la même façon face à la proposition « n est un carré parfait et n est impair » et face à la proposition « n est impair $\Rightarrow n$ est premier », et la formulent en termes de quantification universelle implicite.

Cette approche naïve des notions de logique à travers l'étude du discours mathématique n'exclut pas que certaines propriétés soient données de façon plus formelle. Les formateurs donnent par exemple les tables de vérité des connecteurs et proposent à cette occasion un exercice classique des cours de logique propositionnelle (écrire les 16 connecteurs binaires à l'aide des connecteurs usuels NON, ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À), parlent de tautologies, étudient l'équivalence entre certaines propositions [13]. Les éléments qui sont proposés pour cette étude sont d'abord utilisés comme outils dans le cas d'une situation particulière (comme la comparaison des propositions de l'exercice 1 du test rappelées ci-dessus), puis sont décontextualisés et prennent ainsi le statut d'objets. Cette décontextualisation est faite dans le fil du discours des formateurs, il n'y a pas un temps bien délimité d'institutionnalisation avec des définitions et des propriétés.

Nous pouvons identifier dans la formation plusieurs moments différents qui s'apparentent aux différentes phases de la dialectique outil/objet décrite par R. Douady (les parties entre guillemets sont extraites de Douady, 1986, pp. 14 à 20) :

– *Phase « Ancien »* : dans la résolution des exercices du test de début de stage, « des concepts mathématiques sont mis en œuvre [par les stagiaires] comme outils explicites pour résoudre au moins partiellement le problème ».
– *Phase « Recherche nouveau implicite »* : mais les stagiaires « rencontrent des difficultés pour résoudre complètement le problème ». Nous avons vu que dans l'exposé sur l'analyse du langage, cette phase de recherche est très pilotée par le formateur qui enrichit le milieu des connaissances nécessaires à l'évolution de la situation, pratique que j'ai apparentée au cours dialogué de M. Hersant.
– *Phase « Explicitation et institutionnnalisation locale »* : « certains éléments ont joué un rôle important dans la phase précédente et peuvent être appropriés par les élèves [ici les stagiaires]. Ils sont formulés soit en termes d'objet, soit en terme de pratique avec leurs conditions d'emploi du moment ». Dans l'exposé sur l'analyse du langage, l'institutionnalisation se fait surtout à travers la répétition de certaines phrases, et il se dessine ainsi des caractéristiques des objets. Par exemple :
  - l'aspect syntaxique des connecteurs est associé au mot fabrique : *à partir de propositions, on en fabrique d'autres en utilisant ce qu'on appelle les connecteurs.*
  - Une proposition mathématique est une *affirmation concernant des objets mathématiques*, qui est *susceptible d'être vraie ou fausse.*
  - Certaines propositions *parlent d'un objet qui s'appelle* n (la variable n est parlante), d'autres non (la variable n est muette).
– *Phase « Institutionnalisation-statut d'objets »* : « l'enseignant [ici le formateur] expose ce qui est nouveau et à retenir avec les conventions en usage ». Il n'y a que peu de moments dans la formation qui pourraient s'apparenter à une telle phase, les formateurs choisissent de rester dans une approche naïve des notions de logique.

13. Pour des propositions du langage propositionnel ou du langage des prédicats, en s'appuyant sur une idée intuitive de « être vraie » dans le deuxième cas, sans faire appel à la notion de modèle.

– *Phases « Familiarisation - réinvestissement » et « complexification de la tâche et nouveau problème »* : dans l'exposé sur l'analyse du discours mathématique, le formateur invite les stagiaires à réinvestir tout de suite certaines notions, par exemple à classer certaines expressions mathématiques en nom ou proposition. L'utilisation des connaissances sur les notions de logique pour l'analyse des activités proposées en classe peut être vue comme une complexification de la tâche des stagiaires : il ne s'agit plus seulement de regarder comment parlent les mathématiciens, mais de prendre également la position de l'enseignant soucieux de l'apprentissage de ses élèves, et d'examiner son propre langage.

Nous pouvons donc dire qu'il se constitue un *savoir de référence*, à l'échelle du stage (c'est-à-dire qu'au niveau de la communauté de la formation, il est constitué sur un temps long, les trois jours, et il est partagé par l'ensemble des acteurs), ancré dans la pratique d'enseignant. Mais d'une certaine façon la constitution de ce savoir n'est pas menée à terme. En effet, beaucoup d'informations données aux stagiaires ne sont que verbalisées, il y a finalement assez peu de choses écrites, et il n'y a pas vraiment mise en forme d'un corpus au sens matériel [14].

Dans les données analysées jusqu'ici, il y a peu d'interventions des stagiaires qui pourraient nous renseigner sur la façon dont ils reçoivent tout ce qui est dit dans le stage, notamment sur leur adhésion ou non à l'entrée dans la logique par l'étude du langage, et sur la façon dont ils s'approprient les connaissances. Je vais donc maintenant présenter l'analyse de deux corpus de données dans lesquels ils ont beaucoup plus la parole. Tout d'abord l'analyse d'une séquence pendant laquelle certains stagiaires viennent présenter eux-mêmes des activités, ensuite l'analyse d'un questionnaire-bilan qu'ils ont eu à remplir à la fin du stage.

8.3 Les activités présentées par les stagiaires

Le troisième jour de stage a lieu deux mois après les deux premiers. Il est suggéré aux stagiaires d'expérimenter une activité sur des notions de logique dans leur classe dans cette période et de la présenter aux autres stagiaires lors de la dernière journée. Il n'y a aucun caractère d'obligation [15]. Les formateurs proposent aux stagiaires de les accompagner dans la conception de leur activité, et de venir assister à la classe. Lors de la session 2013, 5 stagiaires ont présenté des activités, dont un groupe de 2 collègues. Ces 2 collègues

14. Dans cette thèse, je me suis concentrée sur l'analyse du discours du formateur. Une autre piste intéressante pour cerner le *savoir de référence* qui se constitue serait d'étudier ce qui est écrit par les formateurs, et les notes prises par les stagiaires.

15. Voici le texte d'un courriel envoyé aux stagiaires un mois avant la dernière journée : « Je vous rappelle que nous avons prévu lors de la dernière journée de stage un temps d'échange autour d'activités proposées dans vos classes. Afin de préparer au mieux ce temps, je vous demande de bien vouloir m'informer si vous souhaitez participer, et dans ce cas de me dire de quelle activité il s'agit (même de l'envoyer par mail si possible). »

animaient déjà avant le stage un atelier « Logique » en Sixième, ils étaient venus au stage dans l'idée de l'enrichir, d'avoir des outils théoriques pour y réfléchir. Nous étions convenus à la fin des deux premiers jours de stage que j'irais assister à l'une des séances d'atelier. Il n'y a pas eu d'autres sollicitations des stagiaires qui ont présenté une activité cette année là.

J'analyse ces présentations comme des indicateurs de l'influence des deux premiers jours de stage. Il ne s'agit pas d'une évaluation méthodique de leur effet, mais d'une lecture orientée.

Je présente d'abord les activités proposées par les stagiaires, puis une analyse détaillée d'une d'entre elles (les autres se trouvent en annexe), avant d'exposer quelques conclusions globales.

8.3.1 Les activités présentées

Vrai/Faux en Sixième

(Analyse en annexe page 622)

Activité de type Vrai/Faux (avec possibilité de répondre « je ne sais pas »), essentiellement autour d'implications (il y a en tout 10 affirmations dont 7 sont, ou sous-entendent, des implications). Il est d'abord prévu un temps de travail individuel, puis un temps de travail par groupe.

Les énoncés sont appelés des affirmations. Les formulations utilisées sont très diverses (une seule utilisation de la formulation « si…, alors… »).

Il y a un mélange de propositions et de déductions (affirmation 10 : « 204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24 »).

Vrai/Faux en Troisième

(Analyse en annexe page 627)

Activité de type Vrai/Faux sur 4 propositions explicitement universellement quantifiées.

Là encore les énoncés sont appelés des affirmations. Le premier est de la forme « il n'existe pas… », les trois autres de la forme « pour tout… ».

Dans leur présentation, les professeurs qui ont proposé cet exercice soulignent qu'ils n'auraient peut-être pas pensé à quantifier aussi explicitement les énoncés avant les deux premiers jours du stage.

Atelier logique en Sixième

(Analyse en annexe page 629)

L'atelier est proposé sur 4 séances à tous les sixièmes de l'établissement, par groupe de demi-classe, dans le cadre d'ateliers pour développer des compétences transdisciplinaires.

Les élèves ont à résoudre, individuellement ou en groupe, plusieurs séries d'exercices de quatre types. Les exercices se présentent comme des « jeux logiques », qui nécessitent de raisonner, mais qui ne font pas directement travailler les élèves sur des notions de logique mathématique.

Les professeurs qui présentent ces activités disent qu'ils sont venus au stage parce qu'ils ressentaient un manque de connaissances théoriques permettant de comprendre ce qui était réellement travaillé dans ces exercices.

Activité circuit en Seconde

(Analyse ci-après)

Activité de type Vrai/Faux sur des implications. Le cadre est non mathématique (il s'agit d'affirmations sur un circuit électrique). Les énoncés sont appelées conjectures. Les élèves votent puis débattent. Certaines phases se concluent par une institutionnalisation sur la démonstration de la vérité ou de la fausseté d'une conjecture en « Si A alors B », qui est la forme commune à toutes les conjectures proposées dans l'activité.

Vrai/Faux en Seconde

(Analyse en annexe page 647)

Exercice de type Vrai/Faux sur des implications et leur réciproque, puis sur des équivalences.

Les énoncés sont appelés implications ou équivalences, elles sont formulées avec les flèches, et ne sont pas explicitement universellement quantifiées.

8.3.2 Activité circuit en Seconde

(L'intégralité des échanges est donnée en annexe page 638)

La stagiaire qui présente l'activité a connu cette activité lors de sa formation d'enseignante à Grenoble. Il s'agit d'une activité présentée dans la brochure *Le vrai et le faux au collège et au lycée* de M. Gandit et M.C. Masses-Demongeot (Gandit & Masse-Demongeot, 2001). L'activité est analysée dans cette brochure. J'en reprends le propos dans l'analyse présentée ci-après, en insistant plus sur les aspects liés à la quantification.

Analyse a priori

On distribue aux élèves le schéma du circuit électrique ci-dessous :

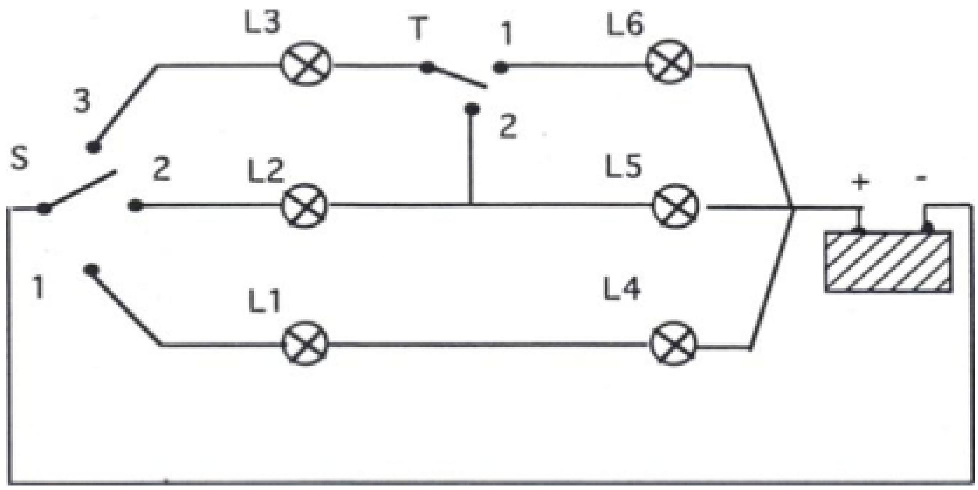


FIGURE 8.9 – Schéma de l'activité *Circuit* présentée par une stagiaire

On leur propose ensuite des conjectures, et ils doivent se demander si elles sont vraies ou fausses. Pour chaque conjecture, après un moment de réflexion, on procède à un vote dans lequel les élèves doivent se prononcer pour VRAI, FAUX ou AUTRE. Ce vote est suivi d'une phase de débat, éventuellement d'un deuxième vote si l'on sent que des positions ont bougé de manière significative. Un moment d'institutionnalisation clôt parfois la discussion à propos d'une conjecture.

La première conjecture est **si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi**. Dans cette conjecture, il n'est pas seulement question du circuit et des lampes, mais aussi d'un locuteur qui raisonne. Un tel raisonnement, nous l'avons déjà dit, n'est pas vrai ou faux mais plutôt correct ou non. Ainsi, se prononcer sur la valeur de vérité de cette conjecture, c'est, d'une certaine façon, rentrer dans le contrat qui demande, derrière cette mise en scène, de se prononcer sur la proposition « si la lampe 4 brille, alors la lampe 1 brille aussi » qui est sous-jacente au raisonnement. L'utilisation de l'expression *je suis certain que* renforce l'idée qu'on ne regarde pas une position particulière des interrupteurs, mais bien tous les cas possibles, ce qui signifie que l'on s'intéresse à l'implication universellement quantifiée sur toutes les positions possibles des interrupteurs. L'utilisation du terme *brille* amène un autre élément sujet à discussion : est-ce qu'une ampoule qui est faiblement allumée brille ? Toutes ces nuances sont voulues par les concepteurs de l'activité, car le but de l'étude de cette première conjecture est de faire sentir la nécessité de mettre en place un *modèle*, ce qui permet d'être d'accord sur le sens des mots, et donc de se prononcer sur la véracité de la même conjecture.

La deuxième conjecture est ensuite proposée dans un langage plus formalisé : **si non L2 alors non L5**, Li signifiant « le courant passe dans la lampe n° i ». J'utilise les termes

suivants pour analyser les réponses possibles :
- je parle de l'implication pour désigner la conjecture avec une quantification universelle portant sur les cas possibles (la valeur de vérité de chaque proposition Li dépend de la variable « position des interrupteurs », même si celle-ce n'apparaît pas dans sa formulation).
- je parle d'une instanciation de l'implication [16] pour désigner l'implication pour une position particulière des interrupteurs (pour chaque position des interrupteurs, on a une instanciation de la proposition Li qui est soit vraie soit fausse).

Pour la première conjecture, l'implication [17] était vraie, et donc toutes les instanciations de l'implication également. Le fait de considérer l'implication ou une instanciation de l'implication n'amenait donc pas de différence dans les réponses. Au contraire, pour la conjecture 2, l'implication est fausse, et les instanciations de l'implication sont majoritairement vraies (la seule instanciation fausse est le cas de la position (S3, T2)). Le but de l'étude de cette conjecture est l'institutionnalisation d'une méthode pour décider de la vérité de propositions de la forme *Si A alors B*, en s'appuyant sur la notion de contre-exemple [18] :

> – une conjecture est dite fausse si elle admet un contre exemple : c'est-à-dire que l'hypothèse est vérifiée mais pas la conclusion.
> – Une conjecture est dite vraie s'il est impossible qu'elle soit fausse, c'est-à-dire si l'on démontre qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple.

Notons que dans cette institutionnalisation, il n'est pas fait mention de quantification. À l'issue de l'étude des deux premières conjectures, tout a été explicité de façon à ce que chacun se prononce effectivement sur la même proposition : une implication universellement quantifiée, dans le cas d'un fonctionnement normalisé du circuit.

La troisième conjecture est **Si L3 alors L2**. Cette fois-ci, il n'y a aucune instanciation de l'implication pour laquelle prémisse et conclusion sont vraies toutes les deux, ce qui signifie que l'implication « Si L3 alors non L2 » est vraie. Mais il n'est pas valide de conclure de l'un de ces deux argument que la conjecture 3 est fausse, car cela ne démontre pas l'existence d'un contre-exemple. La conjecture 3 ne permet cependant pas de montrer qu'un tel raisonnement n'est pas correct puisqu'il amène à la bonne conclusion.

C'est finalement l'étude de la quatrième conjecture, **Si L1 et L3, alors L2 et non L5**, qui va invalider un tel raisonnement. En effet, ici encore, il n'y a aucune instanciation de l'implication pour laquelle prémisse et conclusion sont vraies toutes les deux. Mais par contre, il n'y a aucun contre-exemple puisqu'il n'y a aucune instanciation de l'implication

16. Ce terme n'est utilisé ni par M. Gandit et M.C. Demongeot, ni par P3. Je ne suggère pas de l'utiliser avec des élèves et je suis même sceptique sur son utilisation avec les professeurs, mais par contre il m'a paru nécessaire dans cette analyse.

17. Celle sous-jacente à la conjecture 1.

18. Je me sers ici du texte proposé par P3 qui reprend celui de la brochure de M. Gandit et M.C. Masse-Demongeot

pour laquelle la prémisse soit vraie. Pour clarifier les différents statuts des instanciations de l'implication, trois termes sont institutionnalisés [19] :

- un exemple est un cas qui verifie l'hypothèse et la conclusion.
- Un contre exemple est un cas pour lequel l'hypothèse est vraie alors que la conclusion est fausse.
- Un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse n'est pas vérifiée.

Il n'est pas explicitement dit qu'une instanciation de l'implication avec un exemple ou un hors-sujet est vraie. Finalement, en se ramenant à ce qui a été institutionnalisé suite à la conjecture 2, seuls les contre-exemples sont importants : soit il y en a au moins un, soit on montre qu'il ne peut pas y en avoir. Distinguer exemple et hors-sujet ne sert donc pas directement pour statuer sur la vérité ou non de la conjecture, mais plutôt pour distinguer deux erreurs que les élèves peuvent faire :

- conclure à la vérité de l'implication à partir d'une instanciation pour laquelle prémisse et conclusion sont vraie,
- conclure à la fausseté d'une implication à partir d'une instinciation pour laquelle la prémisse est fausse (les élèves pensent souvent que dans ce cas l'instanciation est fausse).

Pour la quatrième conjecture, tous les cas sont des hors-sujet. Dresser la liste exhaustive de tous ces cas, ce qui est possible puisqu'il n'y en a que 6, constitue ici une preuve de l'absence de contre-exemple.

Présentation de l'activité

P3 est la troisième stagiaire qui présente une activité proposée dans sa classe. Lors des deux premières présentations, des difficultés liées à la quantification universelle implicite associée aux implications, et la distinction entre *si... alors* et *donc* ont été rappelées.

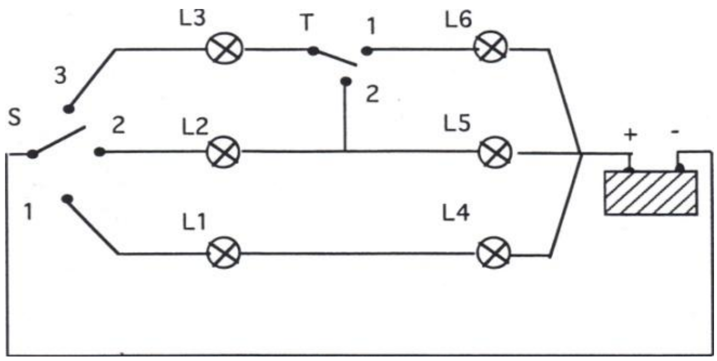
P3 a proposé cette activité dans une classe de Seconde. Les élèves ont travaillé par groupes de 4 ou 5 pour les phases de réflexion sur les conjectures. Elle présente le déroulement de l'activité, des tableaux résumant les résultats des votes, et quelques arguments d'élèves en s'appuyant sur le document ci-après qui a été distribué aux autres stagiaires.

19. Je me sers ici encore du texte proposé par P3 qui reprend celui de la brochure de M. Gandit et M.C. Demongeot

Initiation à la logique
Séance extraite de « le vrai et le faux au collège et au lycée »
par Michèle Gandit, IREM de Grenoble.

Description de la séance :

La séance a été présentée devant une classe de seconde de 33 élèves répartis par groupes de 4/5.
On distribue à chacun le circuit électrique suivant :



Plusieurs phrases sont proposées. On les appelle des conjectures car à priori, on ne connait pas leur valeur de vérité. Pour chaque conjecture, on demande aux élèves si elles sont justes ou fausses. Après un moment de réflexion, on effectue un vote suivie d'une phase de discussions. A l'issu de ce débat, un deuxième vote sera réalisé si besoin suivi d'un moment d'institutionnalisation.

Voici les résultats des votes obtenus ainsi que les remarques/ arguments présentés par les élèves.

Conjecture n°1 :

Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi.

	VRAI	FAUX	AUTRE
Vote 1	27	2	4
Vote 2	26	6	1

« C'est vrai car si la lampe 4 brille, alors il y a du courant qui circule dans le fil relié à la lampe 1 »
« C'est faux car il est possible que l'ampoule ne marche pas »
« C'est vrai dans certains cas, faux dans d'autres cas : Si on a S2 alors la lampe 1 ne brille pas … »
«… Dans ce cas la, la lampe 4 ne brille pas non plus »
« On ne sait pas puisqu'on ne connaît pas la position de l'interrupteur »
« Peut-être que le courant passe mais que la lampe ne brille pas »

Mise en place du modèle mathématique :
On se met d'accord pour se situer dans le modèle suivant :
- Voir briller = le courant passe
- On suppose que les lampes et la batterie fonctionnent parfaitement.
- On suppose que les lampes sont de même puissance.

Dans ce cadre, il n'y a plus de doutes possible et tout le monde se met d'accord sur le fait que la conjecture n°1 est vraie.
Dans la suite, pour signifier que le courant passe dans la lampe n°i, nous écrirons Li .

Conjecture n°2 :

Si non L2 alors non L5 .

VRAI	FAUX	AUTRE
10	15	8

« Si on a S3 et T1 alors la lampe 1 ne brille pas et la lampe 5 non plus »
« Oui mais dans d'autres cas on peut avoir la lampe 2 qui brille mais pas la 5 »
« Donc des fois c'est vrai, des fois c'est faux »

Le contre-exemple :

- Une conjecture est dite fausse si elle admet un contre exemple : c'est-à-dire que l'hypothèse est vérifiée mais pas la conclusion.
- Une conjecture est dite vraie s'il est impossible qu'elle soit fausse, c'est-à-dire si l'on démontre qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple.

Conjecture n°3

Si L3 alors L2.

VRAI	FAUX	AUTRE
5	25	3

« On a un contre-exemple »
« Si la lampe 3 brille, alors on a S3 et pour que la lampe 2 brille, il faut S2 »

Conjecture n°4 :

Si L1 et L3 alors L2 et non L5

VRAI	FAUX	AUTRE
4	22	7

« C'est pas possible alors c'est faux »
« Du coup on ne pas dire si c'est juste ou faux… »
« Si c'est pas possible, alors on ne peut pas dire que c'est faux »

Qu'est ce qu'une conjecture vraie ? C'est une conjecture qui n'a pas de contre-exemple. Quel contre-exemple peut-on donner ici ?
On considère la conjecture suivante : Si A, alors B

- Un exemple est un cas qui vérifie l'hypothèse A et la conclusion B.
- Un contre exemple est un cas pour lequel l'hypothèse est vraie alors que la conclusion est fausse
- Un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse n'est pas vérifiée.

La conjecture 4 n'admet donc aucun contre-exemple elle est donc vraie. A noter qu'elle n'admet aucun exemple non plus mais que des hors-sujet.

Pour la conjecture 2 :

	Hypothèse « non L2 »	Conclusion « non L5 »	Ce cas est un…
S1 et T1	V	V	EX
S1 et T2	V	V	EX
S2 et T1	F		HS
S2 et T2	F		HS
S3 et T1	V	V	EX
S3 et T2	V	F	CE

La première conjecture (« Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi ») est distribuée sans aucun rappel sur les circuits électriques, ce qui amène certains élèves à dire AUTRE pour la première conjecture parce qu'ils ne se rappellent plus de ces notions d'électricité. La plupart des élèves répondent VRAI pour cette conjecture, en argumentant : « il y a du courant dans le fil relié à la lampe 1 », les quelques qui répondent FAUX donnent des arguments sur la qualité du matériel qui pourrait modifier les résultats : « il est possible que l'ampoule ne marche pas ». Finalement, après la phase de débat, lors d'un nouveau vote, plusieurs élèves basculent vers la réponse FAUX car ils sont convaincus par ces arguments de possibles problèmes matériels.

Les réponses AUTRE ne sont pas commentées par P3. Elles témoignent pourtant de difficultés d'ordre logique. Par exemple, un élève argumente « c'est vrai dans certains cas, faux dans d'autres cas : si on a S2 alors la lampe 1 ne brille pas », ce qui témoigne d'une conception erronée de l'implication. En effet, ici seule la vérité de la conclusion est prise en compte. Un élève corrige d'ailleurs cet argument : « dans ce cas la lampe 4 ne brille pas non plus ». Une autre réponse est reliée à l'implicite de la quantification universelle : « on ne sait pas puisqu'on ne connaît pas la position de l'interrupteur ».

Sur la conjecture n° 2 (« si non L2 alors non L5 »), les votes sont assez partagés. P3 met en relation les hésitations des élèves exprimées dans le débat et ce qui a été vu dans le stage sur la quantification universelle implicite. Dans les réponses des élèves citées (« Si on a S3 et T1 alors la lampe 2 ne brille pas et la lampe 5 non plus », « Oui mais dans d'autres cas on peut avoir la lampe 2 qui brille mais pas la 5 »), aucune ne permet de conclure ni à la vérité ni à la fausseté de la conjecture, et elles sont en fait toutes les deux des instanciations vraies de l'implication (la première car prémisse et conclusion sont vraies, la deuxième car la prémisse est fausse). Dans le premier cas, il s'agit donc d'un élève qui conclut que l'implication est vraie à partir d'une instanciation vraie (prémisse et conclusion vraies), dans l'autre cas, il s'agit d'un élève qui conclut que l'implication est fausse à partir d'une instanciation vraie, mais qu'il considère sans doute fausse (prémisse fausse). Nous retrouvons les deux erreurs évoquées page 382. Là non plus P3 ne commente pas cet aspect logique des réponses, elles sont données simplement pour montrer que les élèves ne sont pas d'accord sur la vérité ou non de la conjecture. Nous ne savons pas si certains élèves ont correctement cité un contre-exemple pour infirmer la proposition.

Pour la conjecture n° 3 (« si L3 alors L2 ») il n'y a aucune position des interrupteurs qui rende vraie la prémisse et la conclusion (ce qui se traduit dans le langage de P3 par « cette fois-ci on n'a aucun exemple possible »). Tout le monde se met assez facilement d'accord.

Pour la conjecture n° 4 (« Si L1 et L3 alors L2 et non L5 »), la prémisse est toujours fausse (P3 traduit : « dans ce cas là [ce qui se passe] c'est qu'on ne peut pas avoir L1 et L3 en même temps »). C'est un cas qui embête les élèves, et une grande majorité d'entre eux vote pour FAUX ou AUTRE. En s'appuyant sur ce qui a été institutionnalisé suite à la conjecture n° 2, la conjecture est déclarée vraie car elle n'admet aucun contre-exemple. Mais cet argument ne semble pas convaincre tous les élèves. P3 définit alors les termes *exemple*, *contre-exemple*[20], *hors-sujet*. Elle présente ensuite un tableau dans lequel toutes les positions possibles des interrupteurs sont listées, et le complète avec les élèves pour la conjecture n° 2 en donnant la valeur de vérité de la prémisse, celle de la conclusion, et le statut de chaque cas. Ils n'ont pas eu le temps de faire un tel tableau pour la conjecture n° 4 qui posait problème.

Dans sa présentation, P3 parle essentiellement du déroulement de l'activité dans sa classe. Elle utilise quelques éléments de logique pour commenter l'activité (lien avec la quantification universelle implicite dans la phase sur la conjecture n° 2, la conjecture n° 4 est une implication vraie car l'hypothèse est toujours fausse). Les réponses des élèves servent à illustrer les différentes positions, elles ne sont pas commentées du point de vue de la logique mise en œuvre.

Discussion qui suit la présentation

Un stagiaire (S13) réagit tout de suite sur la notion de hors-sujet. Dans la discussion, il y a une certaine confusion due à l'absence de deux termes distincts pour l'implication et pour une instanciation de l'implication :

— S13 : Hors-sujet ça veut dire que $\boxed{\text{l'implication}}$ est quand même vraie de toute façon.

(ici S13 parle de ce que j'ai appelé instanciation de l'implication)

— P3 : Hors-sujet oui ça veut dire que $\boxed{\text{c'est}}$ vrai. Ça veut dire que l'hypothèse n'est pas vérifiée donc il n'y a forcément aucun contre-exemple donc $\boxed{\text{c'est}}$ vrai.

(ici par contre le premier « c'est » désigne une instanciation de l'implication, mais le deuxième désigne l'implication universellement quantifiée, la quantification universelle étant signifiée par « forcément »)

— Z. Mesnil : un hors-sujet c'est quelque chose qui ne peut pas permettre d'infirmer la conjecture. C'est dans ce sens là je pense que c'est hors-sujet, c'est-à-dire que ça ne peut pas être quelque chose qui dit que $\boxed{\text{c'est}}$ vrai ou qui dit que $\boxed{\text{c'est}}$ faux.

(« c'est » renvoie ici à « conjecture », donc à l'implication, mais l'utilisation de ce terme imprécis contribue à la confusion dans l'échange)

— S13 : Pour le...

— Z. Mesnil : Un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse n'est pas vérifiée parce que...

— S13 : Si L2 est vraie...

— P3 : L2 là est forcément fausse puisqu'on a trouvé un contre-exemple.

20. En fait déjà défini suite à la conjecture 2.

(P3 confond L2 et conjecture n° 2)

— Z. Mesnil : Oui mais du coup si L2 est vraie…

— S13 : Donc l'implication est vraie.

— Z. Mesnil : Oui mais du coup on ne peut pas savoir, elle est vraie…

— S13 : Du point de vue d'un élève oui je comprends.

— Z. Mesnil : C'est pas l'implication qui est vraie, c'est l'implication instanciée à ce cas là.

(La distinction entre implication et instanciation de l'implication est introduite par une formatrice)

— S13 : Oui voilà c'est ça.

— Z. Mesnil : Donc ça ne dit pas…

— S14 : S'il n'y avait que des exemples et des hors-sujet, alors $\boxed{\text{ça}}$ serait vrai.

(Ici « ça » désigne l'implication)

Dans la matinée, le mot « implication » a été utilisé indifféremment pour désigner l'implication universellement quantifiée et l'implication sans quantification. Les stagiaires n'ont donc pas à leur disposition de vocabulaire pour distinguer entre les deux.

P3 a utilisé l'expression « table de vérité » pour présenter le tableau dressé suite aux hésitations sur la conjecture n° 4 (dernier tableau du document présenté par P3, voir page 638). S13 conteste cette dénomination car ce qui est dans la dernière colonne n'est pas une valeur de vérité. P3 reconnaît l'utilisation abusive de ce terme, mais ne revient pas sur le but d'un tel tableau. Il me semble cependant important de souligner que son but n'est pas de faire une table de vérité, et qu'il n'est pas question pour elle d'aborder avec les élèves la vérité de chaque instanciation et donc la délicate question de la table de vérité du connecteur IMPLIQUE. Ce tableau sert uniquement à présenter la liste de tous les cas, à les catégoriser, puis à conclure sur l'existence ou non de contre-exemple et donc sur la vérité ou la fausseté de la conjecture.

S13 intervient encore une fois car il a l'impression que la notion de hors-sujet confond un peu implication et raisonnement, ce qui est repris par C. Hache : « Oui. On peut dire ça. C'est non L2 donc non L5, c'est hors-sujet de regarder un cas où L2 est vraie. C'est hors-sujet pour le donc, pas forcément pour le implique. » Là encore ces discussions témoignent de la complexité des notions en jeu. Dans la première discussion sur la notion de hors-sujet (ci-dessus), j'avais amené l'idée de la distinction entre implication et instanciation de l'implication, qui expliquait la confusion dans la discussion. Ici, S13 et C. Hache ont exprimé un point de vue, je signale un désaccord, mais l'échange n'est pas conclu en l'absence d'éléments suffisamment précis (il faudrait préciser ce que veut dire « hors-sujet pour le donc », et « hors-sujet pour le implique ») pour trancher.

J'insiste ensuite sur le fait qu'être dans une situation où il n'y a qu'un nombre fini de cas permet de conclure à la non-existence de contre-exemple par un simple examen de tous les cas possibles.

Je reviens également sur l'implicite de la quantification universelle des implications proposées en conjecture. Cet implicite est l'objet du débat autour de la conjecture n° 2. P3 a d'ailleurs relié dans sa présentation les hésitations autour de cette conjecture à « ce dont on parle depuis le début du stage », et je fais l'hypothèse que c'est bien à la quantification universelle implicite qu'elle pense, même si elle ne la nomme pas directement. Dans l'institutionnalisation proposée, qui indique comment se prononcer sur une conjecture, la quantification universelle n'est pas mentionnée. Je cherche à savoir dans quelle mesure elle est tout-de-même présente, par exemple dans des interventions orales :

> — Z. Mesnil : Ces implications elles sont quantifiées sur tous les cas possibles finalement, alors là il y en a 6, mais c'est vraiment complètement implicite. Est-ce que toi dans ta discussion ça t'est arrivé de dire « est-ce que dans tous les cas ? », « est-ce que pour tous les cas ? »
>
> — P3 : Ben oui forcément. Quand on arrive à la première qui est fausse, quand ils disent des fois c'est vrai des fois c'est faux, ah oui mais il faudrait montrer justement est-ce que c'est vrai dans tous les cas ou est-ce qu'il existe un moment où c'est faux.
>
> — Z. Mesnil : Et c'est vrai que moi je trouve que dans la manière dont c'est rédigé là, ça reste très implicite dans ce qui est écrit. Mais comme tu dis ça vient forcément à l'oral.

C. Hache souligne l'importance d'associer contre-exemple et quantification universelle, ce qui, nous l'avons vu, n'est que très rarement fait dans les manuels, et n'est pas vraiment fait ici non plus.

Je fais aussi un commentaire sur la formulation de la première conjecture, qui est présentée sous forme d'un raisonnement, pas d'une proposition. S13 conteste : « La première aussi c'est bien une proposition conditionnelle. Si je vois L1 alors, le "alors" est juste implicite mais c'est bien... » Là non plus nous n'avons finalement pas à notre disposition une définition qui permet de trancher, et finalement ma réponse est, une fois encore, plus un point de vue qu'une véritable contre-argumentation :

> Moi je sais que la conjecture 1 quand je la lis j'ai plus envie de répondre « oui » ou « non » que « vrai » ou « faux ». Quelqu'un qui dit « je vois la lampe n° 4 briller ah ben je suis certain que la lampe 1 brille aussi » je lui dis « tu as raison » ou « tu as tort ». Il se met en jeu puisqu'il dit je, du coup on lui répond par rapport à ce qu'il est en train d'élaborer comme raisonnement. Alors évidemment derrière son raisonnement il y a une implication, il y a une proposition qu'il considère comme vraie, nous on la voit cette proposition,

mais ce qui est écrit ça n'est pas la proposition, c'est la personne en train de raisonner.

P3 rappelle que cette façon de présenter les choses est délibérée, pour amener des désaccords et la nécessité de la mise en place d'un modèle. Je signale alors cette importance, dans des situations qu'on appelle *de la vie courante*, de fixer certains aspects pour pouvoir se mettre d'accord, ce qui finalement est un peu en contradiction avec l'aspect *vie courante*.

P3 conclut en signalant que cette activité a servi à ses élèves comme situation emblématique, notamment pour la notion de contre-exemple.

Analyse globale de la séquence

Dans l'activité présentée par P3, il s'agit d'évaluer la vérité de conjectures de la forme « si A alors B ». On n'est pas dans un contexte mathématique. Une première étape est donc de « normaliser » ce contexte pour pouvoir traiter mathématiquement la situation. Il est ensuite institutionnalisé le fait que de telles conjectures sont fausses lorsqu'elles admettent un contre-exemple, et vraies lorsqu'on peut démontrer qu'elles n'en admettent pas. Les conjectures proposées présentent différentes combinatoires des valeurs de vérité de la prémisse et de la conclusion (conjecture fausse mais Vrai/Vrai dans la majorité des cas, conjecture vraie mais aucun cas Vrai/Vrai, conjecture vraie car aucun cas avec prémisse vraie).

L'activité aborde la notion de contre-exemple, et propose de définir celles d'exemple et de hors-sujet. Elle traite également de la façon de prouver qu'une conjecture de la forme *si A alors B* est vraie ou fausse. Même si cela est sous-jacent, elle ne parle pas explicitement de quantification universelle, ni directement de la table de vérité de l'implication (pour le premier point, cela peut-être considéré comme regrettable par rapport à ce qui est dit dans le stage, pour le deuxième point, les formateurs ne suggèrent pas d'aborder cette table de vérité au lycée).

Dans sa présentation, P3 commente peu les aspects logiques de l'activité, qu'elle semble cependant avoir bien en tête. Les exemples de réponses d'élèves ne sont pas commentées non plus sous l'angle de la logique. Ces manques viennent peut-être en partie du peu d'explication de ce qui est attendu dans ces présentations d'activités. Il est seulement demandé aux stagiaires qui le souhaitent de « présenter une activité », pas d'en faire une analyse du point de vue de la logique. Ceci pourrait peut-être être amélioré en guidant plus ces présentations, en proposant aux stagiaires une grille d'analyse de l'activité et des réponses des élèves. Cependant, un autre élément sans doute tout aussi important que ce défaut de cadrage est le manque d'habitude des stagiaires de faire de telles analyses.

Plusieurs notions de logique sont présentes dans l'activité, sa présentation, les discussions qui suivent :

– La quantification universelle implicite des conjectures formulées sous la forme *si A alors B* : P3 met en relation les hésitations des élèves au moment de la conjecture n° 2 et la quantification universelle implicite des conjectures, mais elle n'utilise pas cette terminologie (elle évoque « ce dont on parle depuis le début du stage »). Ce point ne revient pas dans les discussions qui suivent l'activité. Cela ne signifie pas pour autant qu'il ne soit pas identifié comme un point important par les stagiaires, et deux raisons peuvent expliquer qu'il soit ici si brièvement évoqué : d'une part, il a déjà été longuement question de ce point dans la présentation qui a précédé celle de P3, d'autre part, c'est l'objet explicite de la discussion sur la conjecture n° 2, et même si le terme « quantification universelle » n'est pas employé, l'enjeu présenté tourne bien autour de la question « dans tous les cas ou pas ».

– La notion de proposition : elle est évoquée à propos de la conjecture n° 1 (si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi) sur laquelle il y a désaccord entre une formatrice, qui souligne que ça n'est pas une proposition mais plutôt le récit d'un raisonnement, et un stagiaire qui la considère comme une proposition conditionnelle. Rien n'indique que ce stagiaire ait été convaincu par les arguments de la formatrice, rien n'indique l'opinion des autres stagiaires. Cette formulation pose des problèmes délicats. D'une part, l'utilisation de la première personne du singulier est un artifice de formulation, lié à la volonté d'introduire la nécessité de se placer dans un modèle pour se mettre d'accord. Le mathématicien voit facilement la proposition cachée derrière cet artifice. D'autre part la conjecture ne parle pas d'objets mathématiques, nous sommes donc en dehors de ce qui a été discuté lors de la première journée de stage. Et c'est finalement comme cela que peut s'expliquer la confusion ; d'un côté la formatrice se rapporte à une définition naïve de la notion de proposition mathématique (mais qui n'a pas été explicitement donnée aux stagiaires, nous l'avons vu dans l'analyse de la première journée du stage), d'un autre côté le stagiaire se rapporte à une autre définition valide hors du domaine mathématique.

- La distinction entre implication universellement quantifiée et instanciation d'une telle implication : les conjectures sont des implications universellement quantifiées, mais exemple, hors-sujet, contre-exemple nous ramènent à des instanciations. Dans le stage, il n'a pas été proposé de vocabulaire pour différencier ces deux objets. Dans les discussions, il y a donc une certaine confusion : des stagiaires utilisent l'expression « c'est vrai/faux », mais ce « c'est » renvoie parfois à l'implication, parfois à une instanciation. Nous voyons à travers les quelques réponses d'élèves citées qu'il en est de même pour eux. La confusion est levée avec les élèves par l'utilisation d'expressions signifiant la quantification : « c'est vrai dans tous les cas », « dans certains cas », « ce cas est un exemple »...
- La table de vérité de l'implication : elle est sous-jacente à l'activité (puisqu'il est dit que seul un contre-exemple permet de montrer qu'une conjecture est fausse, et non un hors-sujet) et est mentionnée dans les discussions qui suivent, les stagiaires semblent l'avoir bien en tête. Mais elle n'est pas un objectif de l'activité, ce que mentionne bien P3 dans une discussion autour du tableau présenté à la fin de l'activité. Dans ce tableau figurent pour chaque cas la valeur de vérité de l'hypothèse, de la conclusion, mais pour en déduire le statut de ce cas (exemple, hors-sujet, contre-exemple) et non une valeur de vérité de l'instanciation de l'implication.

8.3.3 Analyse globale des quatre présentations

(Dans ce qui suit, P1 désigne la professeure qui a présenté l'activité Vrai/Faux en Sixième, P2 et P'2 les professeurs qui ont présenté l'activité Vrai/Faux en Troisième et les ateliers logique en Sixième, P3 la professeure qui a présenté l'activité circuit, et P4 la professeure qui a présenté l'activité Vrai/Faux en Seconde).

Les activités présentées par les stagiaires sont essentiellement des exercices du type Vrai/Faux. Nous avons vu que ce type d'exercice était également très présent avec le logo « logique » dans les manuels. Ce sont des exercices en apparence faciles à rédiger pour un enseignant (nous verrons plus loin quelques difficultés retrouvées dans les exercices proposés par les stagiaires) et faciles à adapter au contenu du chapitre en cours, et donc bien adaptés pour faire de la logique de manière transversale comme le préconise le programme. Le discours de P4 illustre bien ce point :

> — P4 : Et du coup après quand j'ai commencé les vecteurs, ben justement, comme j'en étais arrivée aux propriétés du parallélogramme, je me suis dit « tiens, ça serait peut-être intéressant qu'ils voient la différence entre quand on écrit avec des vecteurs on a des équivalences, quand on écrit avec des longueurs on n'en a pas », pour qu'ils voient aussi la puissance des vecteurs. Donc du coup voilà, c'est sorti de ma tête comme ça, ça ne nous a pas pris très longtemps.

Derrière ces exercices Vrai/Faux il y a l'enjeu des techniques de démonstration : comment on démontre qu'une proposition universellement quantifiée (et particulièrement une implication) est vraie, comment on utilise un contre-exemple pour démontrer qu'une proposition universellement quantifiée (et particulièrement une implication) est fausse. Seule P3 propose un exemple d'institutionnalisation, mais qui n'est pas sa propre production (c'est l'institutionnalisation proposée dans la brochure de l'IREM de Grenoble (Gandit & Masse-Demongeot, 2001)). P4 évoque « des choses mises noir sur blanc », mais sans préciser quoi. Les professeurs de collège (P1, P2 et P'2) ne semblent pas viser une institutionnalisation, mais seulement la pratique de ce genre de tâche, qui donne l'occasion de travailler sur des conceptions fausses des élèves, ou tout simplement sur du contenu mathématique. D'autres stagiaires soulignent cet intérêt, comme on le voit dans ce dialogue à propos de l'affirmation n° 6 du Vrai/Faux en Sixième (« étant donné que les longueurs PA et PB sont égales, le point P est le milieu de $[AB]$ ») :

> — S1 : C'est vrai que cette question là elle ressort souvent quand on fait la médiatrice.
>
> — S2 : Mais c'est intéressant aussi de le faire avant d'avoir fait la médiatrice pour voir justement les idées fausses.
>
> — S1 : Oui, oui, je suis d'accord.
>
> — P1 : Mais moi toutes les affirmations qui parlent de multiples de diviseurs, ça a été bien traité, j'étais assez contente.
>
> — S1 : C'est vrai que c'est intéressant de leur poser la question avant parce que quand tu le vois ils s'en rappellent.

Par contre, même sans institutionnalisation, le but est bien d'instaurer une pratique. Les exercices proposés donnent lieu à des discussions, des précisions de la part des professeurs, notamment sur la quantification universelle implicite, et ces activités servent d'exemple emblématique auquel élèves et professeur peuvent se référer.

Dans leurs présentations, les professeurs témoignent de difficultés chez leurs élèves qu'ils associent aux quantifications universelles implicites. P1 et P4 ont utilisé des expressions signifiant cette quantification universelle telles que « forcément », « obligatoirement », « nécessairement ». Seuls P2 et P'2 ont explicité les quantifications en utilisant le quantificateur universel *Pour tout* (mais il ne s'agit pas d'implications, or c'est vraiment pour ce type de proposition que la pratique de la quantification implicite est la plus courante). P4 fait part de son impression que les élèves comprennent mieux cette quantification quand elle est soulignée par des termes du langage courant (comme ceux listés ci-dessus) que quand elle est explicitée avec le quantificateur *Pour tout*. Tout se passe comme si les professeurs adoptaient une position conciliant nécessité d'expliciter les quantifications et méfiance vis-à-vis d'un langage trop formel en trouvant des expressions du langage courant pour signifier les quantifications.

Les stagiaires semblent également bien conscients que leurs élèves parlent parfois de ce que j'ai appelé instanciation de l'implication (mais sans forcément « appliquer » correctement la table de vérité de l'implication, que les élèves ne connaissent bien sûr pas, pour conclure sur la vérité ou non de ces instanciations), et parfois de l'implication universellement quantifiée. Mais les stagiaires n'ont pas à leur disposition (et les formateurs n'ont pas proposé) de termes pour signifier cette distinction et les termes utilisés dans les échanges restent confus (voir par exemple l'échange analysé page 387).

Le dernier point que je voudrais souligner dans ces présentations concerne la notion de proposition, et la question de la vérité. À plusieurs reprises lors des deux premières journées, les formateurs avaient suggéré de faire attention à ne poser la question de la valeur de vérité qu'à propos de propositions mathématiques. Pourtant, dans son activité Vrai/Faux, P1 a mélangé des propositions et des déductions (la dernière phrase est « 204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24 »). Et il y a une discussion entre une formatrice et un stagiaire pour savoir si la première conjecture dans l'activité circuit (« si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi ») est ou non une proposition mathématique. Cette notion ne semble donc pas encore très claire pour certains stagiaires. Nous touchons sans doute là aux limites d'une approche naïve. De plus, pour la quantification universelle implicite par exemple, les formateurs ont pu montrer, et les stagiaires ont pu vérifier, qu'elle amenait des difficultés, alors que la distinction implication/déduction a été moins abordée sous l'angle des problèmes qu'elle pouvait amener dans la classe.

8.4 Bilan de la formation 2013

Un questionnaire-bilan a été proposé lors de la dernière journée de stage en mars 2013. J'ai également envoyé ce questionnaire-bilan par courriel aux participants des stages des trois années précédentes.

Ce questionnaire-bilan me sert à mesurer l'impact potentiel du stage sur les pratiques des enseignants en matière d'enseignement de notions de logique. Je parle d'impact potentiel car je ne récolte que des intentions, que les stagiaires n'ont pas vraiment eu le temps de confronter à leur mise en œuvre dans la classe. Celles-ci pourraient être revues à la baisse sous l'influence du manque de temps, ou de la réaction éventuellement peu enthousiaste des élèves.

8.4.1 Analyse *a priori* du questionnaire

Question 1 : sur ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

1) Cochez la case adaptée, et complétez la colonne du milieu pour les points attendus :

En vous inscrivant à ce stage vous étiez venu chercher :	Essentiel-lement	en partie	**Si ce point était attendu, le stage a-t-il répondu à vos attentes ? Mettre une note de 1(non pas du tout) à 4 (oui tout-à-fait)**	pas vraiment	pas du tout
Des activités toutes prêtes pour les élèves.					
Une élaboration collective d'activités pour les élèves.					
Des outils pour une analyse critique des propositions des manuels sur la logique (pages de cours ou exercices).					
Des connaissances théoriques en logique mathématique.					
Des éléments culturels pour alimenter votre réflexion sur l'enseignement de la logique.					
Des outils pour aider les élèves à mieux maîtriser l'expression en mathématiques.					
Des outils pour aider les élèves pour l'apprentissage de la démonstration.					
Autres :					

FIGURE 8.10 – Ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

Les réponses à cette question me renseignent sur les besoins ressentis des professeurs qui suivent le stage. Les propositions de réponses ont été élaborées pour pouvoir être comparées aux besoins supposés par les formateurs, mais aussi en fonction de réponses données lorsque cette question a été posée oralement en début de stage. Dans les 5 premières lignes je prends en compte 3 dimensions de l'activité du professeur en amont de la classe :

– la conception d'activités pour les élèves. Les stagiaires peuvent être en attente de « matériel » pour la classe, avec deux positions différentes quant aux apports d'un stage : attendre qu'il livre des outils clés en main, ou qu'il soit un lieu d'élaboration collective d'outils. Les gradations dans les réponses permettent que les deux attentes co-existent. La question sur une éventuelle attente concernant les manuels résulte de l'étude qui a montré qu'ils ne sont pas des ressources très lisibles pour les enseignants.
– Les connaissances mathématiques de l'enseignant. Les stagiaires les ressentent-ils comme suffisantes pour enseigner des notions de logique ? Nous avons vu que la formation en logique mathématique pouvait être très différente d'un enseignant à l'autre, selon son âge et son cursus scolaire.
– Un aspect plus culturel des connaissances de l'enseignant. Moins directement lié à l'activité en classe, il peut cependant contribuer à la réflexion sur l'enseignement de notions de logique.

Les 2 lignes suivantes sont consacrées à l'aide que peut apporter le professeur à ses élèves. Nous retrouvons dans les deux types d'aide proposés les deux piliers langage et raisonnement de la logique. J'ai préféré le terme « démonstration » au terme « raisonnement » parce qu'il revient plus souvent dans les commentaires des stagiaires (notamment des professeurs de collège, peut-être parce que la démonstration est plus facilement identifiée comme un objet dont ils peuvent enseigner certaines caractéristiques).

Questions 2 et 3 : sur l'importance accordée au contenu théorique en logique mathématique et l'approche par l'analyse du langage mathématique

2) Ce stage vous semble t-il suffisant comme formation théorique en logique mathématique?

OUI […] NON […]

Commentaires (en particulier si vous avez répondu non) :

FIGURE 8.11 – Satisfaction des stagiaires relativement au contenu théorique

La question des apports théoriques est un élément important des choix de contenu du stage. Il est indiqué aux stagiaires au début du stage que l'absence de la logique mathématique dans la formation initiale des professeurs explique la part non négligeable des apports théoriques dans le stage. Cependant, des questions de temps limitent ce contenu, et il est réduit à quelques éléments que les formateurs jugent essentiels. Ce choix exclut des développements tels que, par exemple, la notion de théorie, de conséquence logique, de modèle… (un temps de la troisième journée de stage est généralement consacrée au développement d'une question traitée par la logique mathématique. En 2013, R. Cori a présenté les axiomes de la théorie des ensembles et exposé quelques questions de consistance de la théorie). Bien sûr, la satisfaction d'un stagiaire sur ce point dépend du contenu proposé mais aussi de ses attentes.

3) La stratégie choisie dans cette formation pour introduire ces notions de logique est une approche naïve (les notions de variables, expressions mathématique, proposition, sont prises dans leur sens intuitif et non pas définies formellement) basée sur l'étude du langage utilisé dans la pratique des mathématiciens. Cela vous paraît-il adapté à une formation pour les professeurs :

OUI [...] NON [...]

Commentaires (en particulier si vous avez répondu non) :

Figure 8.12 – Adhésion des stagiaires à l'approche de la logique à travers l'étude du discours mathématique

Pour les concepteurs de la formation, l'entrée formelle dans la logique mathématique, telle qu'elle se fait dans un cours de logique mathématique à l'université, serait inadaptée à un tel stage, surtout sur un temps aussi court. L'objectif d'une telle formation est de privilégier une approche plus « pratique », directement en lien avec l'activité de l'enseignant, à partir d'un matériau issu de la classe. Ici, le matériau choisi est le langage mathématique et la logique mathématique est abordée à travers son utilisation pour étudier ce langage. Ces deux questions visent donc à soumettre à l'appréciation des stagiaires les choix de contenu qui résultent d'une réflexion *a priori* des formateurs.

Question 4 : sur les connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

4) Dans la formation, plusieurs notions de logique mathématique ont été abordées. Pour chaque aspect de ces notions, notez de 1 (non pas du tout) à 4 (oui tout-à-fait) :

	Vos connaissances sur cette notion avant le stage étaient-elles suffisantes pour votre enseignement ?	L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il personnellement intéressé ?	L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru utile pour réfléchir à l'enseignement de la logique ?	L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru directement exploitable dans vos classes ?
variable				
proposition				
connecteur ET/OU				
négation				
implication				
équivalence				
quantificateur				
Le raisonnement en général				
Le raisonnement par récurrence				
Le raisonnement par contraposée				
Le raisonnement par l'absurde				

FIGURE 8.13 – Sentiment des stagiaires sur leurs connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

Cette question vise à pouvoir comparer l'avant et l'après stage sur chacune des notions. Pour l'avant, seul l'aspect « connaissances pour l'enseignement » est mentionné. Cela reste assez vague mais le but est surtout d'évaluer l'impact du stage. Bien sûr, il y a un biais : c'est une question qui porte sur un sentiment sur ce qui se passait avant le stage, mais ce sentiment a pu être modifié par ce qui a été vu dans le stage. Pour l'après stage, trois aspects sont distingués : l'intérêt personnel des stagiaires, l'utilité pour réfléchir à l'enseignement de notions de logique, l'exploitabilité en classe. À travers ces trois aspects, nous suivons en quelque sorte l'activité du professeur de la conception de ses séquences de classe à leur réalisation.

Question 5 : sur l'impact potentiel sur les pratiques en matière d'enseignement de notions de logique

5) Cochez les cases adaptées :

	Avant la formation, vous aviez l'habitude de :				La formation vous a apporté des éléments pour :	
	Souvent	Assez souvent	Rarement	Jamais	Oui	Non
Faire des commentaires relevant de la logique lorsque l'occasion se présente (écriture d'une propriété, correction d'un exercice…)						
Prendre un temps pour discuter une formulation d'élève.						
Concevoir des activités portant sur la logique.						
Utiliser directement les exercices estampillés « logique » des manuels.						
Utiliser en les modifiant les exercices estampillés « logique » des manuels.						
Rédiger des synthèses à destination des élèves sur des notions de logique.						
Utiliser ce que proposent les manuels dans les pages sur la logique.						
Expliciter les quantifications dans les énoncés des propriétés.						

FIGURE 8.14 – Impact potentiel du stage sur les pratiques des enseignants en matière d'enseignement de notions de logique

Cette question vise à évaluer l'impact potentiel du stage non plus avec une entrée par notion au niveau des connaissances, mais plutôt au niveau des pratiques.

Les deux premières propositions portent sur des commentaires « improvisés » faisant appel à des notions de logique. Les trois propositions suivantes concernent la conception d'activités. Puis deux propositions concernent l'institutionnalisation de connaissances sur des notions de logique. Enfin, la dernière proposition est liée à un point de vue défendu dans le stage : l'explicitation des quantifications est nécessaire pour une bonne compréhension des énoncés par les élèves.

Question 6 : sur l'éclairage historique sur la logique et son enseignement

6) Les éléments historiques sur la logique et son enseignement vous ont-il paru avoir leur place dans ce stage ?

Figure 8.15 – Satisfaction des stagiaires à propos de l'éclairage historique sur la logique et son enseignement

Là encore il s'agit d'évaluer un choix de contenu, choix argumenté par le fait que la logique est une branche méconnue des mathématiques, et que sa place dans les programmes de lycée a connu une histoire mouvementée.

Questions 7, 8, 9, 10, 11 : sur l'impact de la formation sur les pratiques en classe

Ces questions sont formulées sous la forme « la formation a-t-elle eu un impact. . . ? », ou « est-ce que ce stage a modifié. . . ? » Dans le cas d'une réponse notifiant un changement, je demande un exemple précis, pour essayer justement d'être au plus proche des pratiques, et pas seulement des intentions.

7) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques en matière d'enseignement de notions de logique ?

OUI [...] NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

8) Est-ce que ce stage a modifié votre façon de vous exprimer dans vos classes (à l'oral, dans la rédaction du cours, dans les énoncés d'exercices…) ?

OUI [...] NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

9) Est-ce que ce stage a modifié votre prise en compte de la façon dont les élèves s'expriment (en vous donnant des outils pour expliquer leurs erreurs, pour comprendre des malentendus dus à des ambiguïtés…) ?

OUI [...] NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

10) Est-ce que ce stage a modifié votre façon d'envisager le raisonnement (en apportant un éclairage sur les différents types de raisonnement, sur les règles qui justifient les inférences, en vous donnant des outils d'analyse des raisonnements de vos élèves…) ?

OUI [...] NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

11) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques de manière plus générale ?

OUI [...] NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

Figure 8.16 – Impact de la formation sur les pratiques en classe

La question 7) porte sur l'enseignement de notions de logique d'une façon générale. Les questions 8) et 9) portent plus précisément sur l'expression, celle du professeur d'abord, puis sur sa prise en compte de l'expression des élèves. Le travail sur le langage occupe une place très importante dans le stage, un objectif étant de faire prendre conscience aux stagiaires de la complexité des pratiques langagières de la communauté mathématique, et de la nécessité d'adapter ces pratiques à un contexte d'enseignement avec des élèves qui ne les partagent pas *a priori*. La question 10) complète les deux précédentes, en portant cette fois-ci sur le pilier raisonnement de la logique. La question 11) porte sur les pratiques en général. D'une certaine façon, elle double les questions précédentes : dans le stage il est essentiellement question d'expression et de raisonnement, c'est donc là-dessus que l'on peut s'attendre à des modifications des pratiques. Mais elle permet aussi d'ouvrir sur d'autres éléments des pratiques qui n'étaient pas directement visés par le stage.

8.4.2 Résultats

Ces résultats sont obtenus à partir de l'analyse de 25 bilans :
– 20 bilans ont été remplis à la fin du stage par les stagiaires de 2013 (11 professeurs de collège, et 9 professeurs de lycée).
– 5 anciens stagiaires m'ont renvoyé un bilan par courriel (4 de la session 2012 et 1 de la session 2011, 2 professeurs de collège et 3 professeurs de lycée).

Les professeurs n'ont pas toujours répondu à toutes les questions, d'où de possibles variations dans les effectifs d'une question à l'autre.

Je n'ai pas distingué dans les réponses celles des stagiaires de 2013 et celles des stagiaires des années précédentes, d'une part parce que je n'ai eu que peu de réponses de stagiaires d'avant 2013, d'autre part parce qu'il n'y avait pas de différence significative dans les réponses.

Question 1 : sur ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

« En vous inscrivant à ce stage vous étiez venu chercher » : J'ai gradué numériquement les réponses de 1 (pas du tout attendu) à 4 (essentiellement attendu), puis fait la moyenne.

Des activités toutes prêtes pour les élèves.	2,64
Une élaboration collective d'activités pour les élèves.	2,52
Des outils pour une analyse critique des propositions des manuels sur la logique (pages de cours ou exercices).	2,83
Des connaissances théoriques en logique mathématique.	3,12
Des éléments culturels pour alimenter votre réflexion sur l'enseignement de la logique.	3,29
Des outils pour aider les élèves à mieux maîtriser l'expression en mathématiques.	3,04
Des outils pour aider les élèves pour l'apprentissage de la démonstration.	2,92

FIGURE 8.17 – Ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

Nous retrouvons dans les éléments les plus attendus des connaissances théoriques en logique mathématique, attente dont nous pouvions faire l'hypothèse au vu de l'absence de logique mathématique dans la formation initiale.

L'élément le plus attendu, un apport culturel pour alimenter la réflexion sur l'enseignement de la logique, est également d'une certaine façon une connaissance « du contenu », une connaissance qui ne serait pas mathématique mais plutôt épistémologique, historique, philosophique. Cependant, dans l'intitulé de la question, cette connaissance est orientée vers son utilisation pour la préparation de la classe, ce qui la situe également en partie du côté d'une connaissance « didactique ».

L'élément le plus attendu par les professeurs de lycée concerne les propositions des manuels. La présence d'exercices ou de pages spécifiquement consacrés à la logique et au raisonnement est une nouveauté, et ne se fait qu'au lycée. Il n'est donc pas étonnant que la demande sur ce sujet soit plus importante et, au vu de l'étude de ces exercices ou de ces pages, que les enseignants soient perplexes quant à leur utilisation.

Les éléments les moins attendus concernent les activités pour les élèves, même si elles restent une attente mentionnée par une majorité de professeurs.

J'envisage deux façons de lire cette différence d'attente entre connaissances pour l'enseignant et activités pour les élèves. On peut tout d'abord faire l'hypothèse que les professeurs donnent priorité aux connaissances du contenu, surtout dans un domaine où ils sentent qu'ils en manquent. Une autre hypothèse envisageable est que les professeurs gardent « à leur charge » la conception d'activités, ce qui est une façon d'exercer une certaine liberté pédagogique.

Questions 2 et 3 : sur l'importance accordée au contenu théorique en logique mathématique et l'approche par l'analyse du langage mathématique

Les réponses à la question 2 sont également partagées entre les stagiaires qui trouvent que le stage est suffisant comme formation théorique en logique mathématique (12) et ceux qui pensent qu'il n'est pas suffisant (13).

Il était demandé des commentaires en particulier en cas de réponse négative, et la plupart soulignent qu'il s'agit seulement d'une initiation, permettant éventuellement de remobiliser certaines connaissances pour les stagiaires ayant déjà eu un enseignement de logique, et regrettent qu'il ne s'agisse pas d'un enseignement plus approfondi et mieux structuré comme un réel cours de logique. Certains mentionnent qu'un tel cours est impossible dans un temps aussi réduit. Ils suggèrent alors qu'il soit plutôt proposé en complément du stage, dont ça n'est pas l'unique but.

Pour ce qui est de la question 3, les stagiaires approuvent unanimement la stratégie choisie dans la formation (introduire les notions de logique à travers une approche naïve basée sur l'étude du langage mathématique).

Question 4 : sur les connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

Les stagiaires devaient eux-mêmes donner une évaluation chiffrée entre 1 (non pas du tout) et 4 (oui tout à fait). Je donne ici les moyennes des réponses, en indiquant à chaque fois celles des professeurs de collège (C), de lycée (L) et le total (T).

	Vos connaissances sur cette notion avant le stage étaient-elles suffisantes pour votre enseignement ?			L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il personnellement intéressé ?			L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru utile pour réfléchir à l'enseignement de la logique ?			L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru directement exploitable dans vos classes ?		
	C	L	T	C	L	T	C	L	T	C	L	T
Variable	3,08	3,4	3,22	3,23	3,11	3,18	3,38	3,13	3,29	2,15	2,22	2,18
Proposition	2,77	2,56	2,68	3,77	3,63	3,71	3,46	3,13	3,33	2,77	2,75	2,76
Connecteurs ET et OU	3,46	3,2	3,35	3,77	3,44	3,64	3,62	3,22	3,45	3,08	3	3,05
Négation	2,77	3,2	2,96	3,77	3,56	3,68	3,62	3,33	3,5	3	3	3
Implication	3,08	3,3	3,17	3,69	3,33	3,55	3,38	3,22	3,32	2,69	3,11	2,86
Équivalence	3,31	3,3	3,3	3,62	3,33	3,5	3,38	3	3,23	2,5	2,8	2,63
Quantificateur	2,73	3,2	2,95	3,85	3,67	3,77	3,69	3,67	3,68	2,93	3,13	3
Le raisonnement en général	2,77	3,1	2,91	3,46	3	3,27	3,38	2,67	3,09	3	2,13	2,67
Le raisonnement par récurrence	3,31	3,67	3,45	2,9	2,13	2,56	2,91	1,75	2,42	1,78	1,5	1,65
Le raisonnement par contraposée	3	3,5	3,22	3,14	2,89	3,04	3,38	2,44	3	2,54	2,11	2,36
Le raisonnement par l'absurde	3,23	3,56	3,36	3,08	2,5	2,85	3,45	2	2,84	2,1	2	2,06

FIGURE 8.18 – Sentiment des stagiaires sur leurs connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

Il y a chez les professeurs de lycée un sentiment assez homogène de bonne connaissance des notions de connecteur ET et OU, négation, implication, équivalence, quantificateur, qui sont mentionnées dans le programme. Ils ont ce même sentiment de bonne connaissance de la notion de variable, qui n'est pas mentionnée dans les objectifs concernant les notations et le raisonnement mathématiques, mais qui est évidemment une notion présente dans d'autres domaines (algèbre et analyse notamment). Ce sentiment contraste alors avec celui concernant la notion de proposition, dont aucun stagiaire professeur de lycée ne déclare avoir une connaissance tout à fait suffisante avant le stage.

Dans les réponses des professeurs de collège, il y a moins d'homogénéité sur ces notions : les connecteurs ET et OU sont ceux que les stagiaires déclarent le mieux connaître (sans doute de par leur « proximité » avec l'utilisation de ces mêmes mots dans le langage courant, dont nous avons vu qu'il fallait se méfier), et il y a un certain écart avec les notions de négation ou de quantificateur. Cette hétérogénéité peut s'expliquer par le fait que ces notions de logique ne sont pas explicitement présentes dans les programmes du collège, et selon la classe où ils enseignent, les professeurs de collège ne les rencontrent pas toutes (par exemple, les quantificateurs n'étant presque jamais présents explicitement au collège, il n'est pas étonnant que cette notion soit celle qu'ils déclarent la moins bien connaître).

Nous pouvons aussi relever dans ces réponses la bonne connaissance déclarée des types de raisonnement, un peu plus chez les professeurs du lycée (là aussi cela peut se lire en relation avec les contenus des programmes). Le raisonnement le mieux connu est le raisonnement par récurrence, qui, plus que les autres types de raisonnement, est l'objet d'un enseignement spécifique. Les stagiaires déclarent par contre une moins bonne connaissance du raisonnement en général, que de types particuliers de raisonnement, ce que l'on peut associer à une absence de connaissances théoriques concernant l'objet *démonstration.*

Les professeurs de collège déclarent des connaissances avant le stage un petit peu moins bonnes que les professeurs de lycée, et inversement, ils déclarent un intérêt personnel pour l'apport du stage sur ces notions légèrement supérieur : le stage semble alors vu comme apportant réellement des connaissances manquantes. Mais globalement, les stagiaires déclarent avoir été intéressés par l'apport du stage sur les éléments du langage mathématique, particulièrement sur la notion de proposition et sur les quantificateurs. Ce qui concerne le raisonnement a moins intéressé les stagiaires, avec notamment peu d'intérêt pour l'apport du stage sur le raisonnement par récurrence, qui n'a en fait pas été explicitement évoqué dans le stage, si ce n'est à titre d'exemple de type de raisonnement[21].

Les professeurs trouvent également en moyenne que l'apport du stage sur ces notions de logique est utile pour réfléchir à l'enseignement de la logique. Nous pouvons noter ici

21. Dans d'autres éditions du stage, le raisonnement par récurrence avait été évoqué à propos de l'implication et de la quantification universelle. Il avait notamment été suggéré de changer le nom de la variable dans l'étape d'hérédité (pour montrer « pour tout n, $P[n]$ », on montre notamment l'hérédité de la propriété, c'est-à-dire « pour tout k, $(P[k] \Rightarrow P[k+1])$ »).

aussi une plus grande satisfaction sur l'apport du stage à propos des éléments du langage mathématique, et notamment des quantificateurs, et au contraire moins de satisfaction sur le raisonnement, et notamment le raisonnement par récurrence.

L'exploitabilité en classe de l'apport du stage est par contre moins bien notée par les stagiaires. Sur les notions de connecteur ET et OU, de négation, d'implication, de quantificateur, qui sont beaucoup étudiées dans le stage [22], l'apport de celui-ci est déclaré exploitable en classe, mais avec une moins grande satisfaction que l'apport sur le plan de l'intérêt personnel ou de la réflexion sur l'enseignement de la logique. Par contre, tout le travail fait sur la notion de variable, et dans une moindre mesure celui fait sur la notion de proposition, n'est pas vraiment déclaré exploitable en classe. Ici encore, nous retrouvons une moins grande satisfaction pour ce qui concerne le raisonnement.

Question 5 : sur l'impact potentiel sur les pratiques en matière d'enseignement de notions de logique

Pour cette question, je n'ai pas distingué les réponses des professeurs de collège et des professeurs de lycée. Les chiffres correspondent au nombre de professeurs ayant donné chaque réponse, avec encore une fois des variations dans les effectifs dues à certains bilans incomplets.

Pour les lignes 4 à 7, qui portent sur les manuels et sur la rédaction de synthèses, je n'ai gardé que les réponses des professeurs de lycée, car les exercices estampillés logique sont surtout présents dans les manuels de lycée. La rédaction de synthèses sur des notions de logique me semblait également relever plutôt du lycée (d'ailleurs, plusieurs professeurs de collège ont de manière spontanée expliqué que ça n'avait pas de sens pour eux de répondre pour ces lignes).

22. La moins grande satisfaction concernant la notion d'équivalence peut s'expliquer par le fait qu'elle est moins étudiée dans le stage.

	Avant la formation, vous aviez l'habitude de :				La formation vous a apporté des éléments pour :	
	Souvent	Assez souvent	Rarement	Jamais	Oui	Non
Faire des commentaires relevant de la logique lorsque l'occasion se présente (écriture d'une propriété, correction d'un exercice)	8	9	7	0	21	1
Prendre un temps pour discuter une formulation d'élève	6	10	7	1	20	1
Concevoir des activités portant sur la logique	0	3	15	6	17	5
Utiliser directement les exercices estampillés « logique » des manuels	0	5	3	3	5	5
Utiliser en les modifiant les exercices estampillés « logique » des manuels	0	0	5	6	8	2
Rédiger des synthèses à destination des élèves sur des notions de logique	0	3	1	7	4	5
Utiliser ce que proposent les manuels dans les pages sur la logique	0	2	5	4	5	4
Expliciter les quantifications dans les énoncés des propriétés	5	6	10	3	20	1

FIGURE 8.19 – Impact potentiel du stage sur les pratiques des enseignants en matière d'enseignement de notions de logique

Regardons les deux premières et la dernière lignes. Sur ces points, les stagiaires déclarent que la formation leur a apporté des éléments. Cependant, les deux premiers points, faire des commentaires relevant de la logique et prendre un temps pour discuter une formulation d'élève, sont déclarés déjà présents dans les pratiques de plusieurs stagiaires. L'apport du stage peut donc être vu plutôt comme un soutien de certaines pratiques déjà présentes que comme une réelle modification. Nous pouvons cependant parler de modification potentielle en ce qui concerne l'explicitation des quantifications.

Finalement, c'est sur les deux éléments « concevoir des activités portant sur la logique » et « utiliser en les modifiant les exercices estampillés des manuels » que l'apport du stage peut amener de réelles modifications des pratiques. Ces résultats peuvent sembler en contradiction avec les résultats à la question précédente, qui montraient que c'était sur la question de l'exploitabilité en classe de l'apport du stage que les stagiaires étaient le moins satisfaits. Une explication possible est que le détail par notion dans la question 4 « refroidit » les stagiaires : il est plus facile de se projeter concepteur d'activités sur la logique, éventuellement en modifiant des exercices des manuels, car on reste d'une certaine façon du côté de savoir-faire. Concevoir un travail spécifique sur une notion précise est plus délicat car se pose alors la question de ce qu'il y a à institutionnaliser, des savoirs associés à cette notion. Cette explication est cohérente avec les réponses à la question 5 sur l'élément « rédiger des synthèses sur des notions de logique » qui montrent que ça n'est pas quelque chose qui est déjà dans les pratiques des professeurs, et pour lequel la moitié des professeurs disent que le stage n'a rien apporté. [23]

Question 6 : sur l'éclairage historique sur la logique et son enseignement

Un seul stagiaire donne un réponse mitigée à la question « Les éléments historiques sur la logique et son enseignement vous ont-il paru avoir leur place dans ce stage ? », en ajoutant en commentaire que ça ne lui paraissait pas une priorité dans un stage sur un temps court. Tous les autres répondent que ces éléments sont intéressants, et plusieurs mentionnent l'intérêt que ce point de vue historique peut avoir pour aborder des notions de logique avec les élèves.

23. Je rappelle que les formateurs ne prennent pas position sur cette question de la rédaction ou non de synthèses, et n'ont pas proposé lors du stage 2013 d'exemples de telles synthèses.

Questions 7, 8, 9, 10, 11 : sur l'impact de la formation sur les pratiques en classe

	Professeurs de collège		Professeurs de lycée		Total	
	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Non
7) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques en matière d'enseignement de notions de logique ?	9	3	6	5	15	8
8) Est-ce que ce stage a modifié votre façon de vous exprimer dans vos classes (à l'oral, dans la rédaction du cours, dans les énoncés d'exercices) ?	10	3	8	3	18	6
9) Est-ce que ce stage a modifié votre prise en compte de la façon dont les élèves s'expriment (en vous donnant des outils pour expliquer leurs erreurs, pour comprendre des malentendus dus à des ambiguïtés) ?	7	5	5	6	12	11
10) Est-ce que ce stage a modifié votre façon d'envisager le raisonnement (en apportant un éclairage sur les différents types de raisonnement, sur les règles qui justifient les inférences, en vous donnant des outils d'analyse des raisonnements de vos élèves) ?	2	10	1	8	3	18
11) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques de manière plus générale ?	8	6	4	3	12	9

FIGURE 8.20 – Impact de la formation sur les pratiques en classe

Dans leurs commentaires pour la question 7, 3 stagiaires de 2013 répondent que la formation n'a pas encore eu d'impact mais qu'ils espèrent que ça sera le cas.

Dans les exemples donnés (pour chaque question il était demandé un exemple précis en cas de réponse positive), les stagiaires mentionnent dès la question 7 une attention particulière à ce qu'ils disent ou écrivent (ils se « surveillent », sont « plus rigoureux »...). Ceci est repris dans les réponses à la question 8, dans lesquelles les quantificateurs sont mentionnés dans 13 réponses, avec des nuances dans leur utilisation qu'illustrent les exemples de réponses ci-dessous :

– question 7 : « Lorsque je prépare moi même une activité, je propose des énoncés avec quantificateurs et sans quantificateurs (mes élèves n'auront pas toujours des enseignants ayant suivi la formation, je préfère qu'ils s'habituent aux deux types d'énoncés). », « Je parle volontiers des quantificateurs (lorsqu'ils sont implicites). », « Précédemment, j'intervenais sur l'utilisation des quantificateurs essentiellement pour les classes scientifiques. Maintenant, je le fais avec toutes mes classes. »
– question 8 : « Expliciter parfois les quantificateurs dans certains énoncés d'exercices (vrai/faux). », « Toujours les quantificateurs ! Je les écris presque systématiquement et en parle absolument tout le temps à l'oral (même pour des résolutions d'équations en Seconde). »

Pour la question 7, certains stagiaires mentionnent également une modification de la place donnée à la logique dans leur enseignement : « Utilisation d'activités de réflexion sur la logique des énoncés. », « Faire des séances spécifiquement de logique. », « Je fais plus facilement des digressions sur des notions de logique. »

En ce qui concerne la prise en compte de l'expression des élèves, une moitié seulement des stagiaires déclarent que la formation a eu un impact. Cela est cohérent avec des observations déjà évoquées dans l'analyse des résultats des autres questions : le stage semble avoir d'abord une influence sur la façon dont les professeurs présentent les mathématiques à leurs élèves, plutôt que sur ce qu'ils peuvent faire en lien avec des productions d'élèves (en proposer, les guider, les corriger. . .) Là encore, les exemples donnés vont dans le sens d'une plus grande attention aux implicites ou malentendus possibles.

La question 10 confirme que l'impact du stage en ce qui concerne le raisonnement est faible.

La dernière question n'apporte pas vraiment d'éléments nouveaux, les exemples sont essentiellement ceux déjà donnés pour les questions 7 et 8.

8.4.3 Analyse globale du questionnaire

Dans leurs réponses à ce questionnaire-bilan, les stagiaires déclarent un impact important du stage sur leur façon de dire, de rédiger des mathématiques avec leurs élèves, notamment sur la quantification.

L'apport théorique du stage est apprécié, même si les avis sont partagés sur la suffisance ou non de cet apport. Le choix de l'entrée dans la logique par l'étude du langage mathématique est unanimement approuvé.

Plusieurs réponses montrent que les stagiaires sont plus satisfaits de l'apport du stage en ce qui concerne justement ces connaissances théoriques, que de l'apport pratique du stage (activités pour la classe). Cependant, les stagiaires semblent prendre conscience des implicites et ambiguïtés des pratiques langagières des mathématiciens, qu'ils adoptent dans leur classe, et une bonne majorité d'entre eux déclarent une modification de ces pratiques, ce qui est un apport du stage qui se situe bien du côté de l'activité du professeur en classe.

Les stagiaires enseignant en lycée ont une attente pour ce qui concerne la logique dans les manuels, et ils disent en majorité que le stage apporte des éléments pour développer une analyse critique de ce qu'ils y trouvent.

Dans plusieurs réponses il y a un déséquilibre manifeste entre l'apport du stage du côté du langage et l'apport du côté du raisonnement, qui satisfait moins les stagiaires.

Notons enfin que l'apport du stage sur la notion de variable, qui a une place importante dans le stage, ne semble pas non plus convaincre les stagiaires, qui ont notamment du mal à voir une exploitation possible en classe du travail fait sur cette notion. Nous pouvons cependant considérer que l'adhésion au travail fait sur les quantifications implicites est en relation étroite avec le discours sur les variables : la quantification est une opération sur des variables, qui est une particularité du langage mathématique et qui s'apprend. L'expliciter permet notamment de rendre visible le statut muet des variables quantifiées. Le travail sur la notion de proposition, autre élément important du stage, est jugé plus positivement.

Conclusion de l'étude de la formation continue « Initiation à la logique »

Dans les premières parties de cette thèse, j'ai montré l'importance du travail sur le langage dans différents systèmes logiques et le manque de précisions quant au *savoir à enseigner* relatif aux notions de logique au programme du lycée, d'autant plus dommageable qu'il n'y a pas de *savoir de référence* sur lequel les enseignants peuvent s'appuyer. Ces résultats m'ont menée vers une troisième question de recherche orientée vers la formation des enseignants : « comment une formation permet-elle que se constitue un savoir de référence utile aux enseignants pour appréhender la complexité des notions de logique et les intégrer efficacement dans leur enseignement ? »

Les études épistémologique et didactique de la première partie de la thèse m'ont permis de dégager des besoins supposés de formation, que j'ai validés expérimentalement en m'appuyant sur les résultats d'un questionnaire soumis à des enseignants de Seconde :

– besoin d'une formation théorique, de connaissances sur les notions de logique, mais abordées en lien avec l'activité mathématique. Quelques enseignants, mais ils restent minoritaires, ressentent un manque de connaissances, qu'ils aient ou non eu une formation, même minimale, en logique mathématique. Quelques autres enseignants, qui n'ont eu aucune formation en logique mathématique, considèrent que les connaissances en acte dont ils usent dans leur propre activité mathématique sont suffisantes pour enseigner les notions de logique. Il y a donc un besoin de faire prendre conscience aux enseignants du fait que la complexité des notions de logique nécessite des outils permettant d'adopter une position réflexive indispensable quand il s'agit de transmettre ces connaissances.

– Besoin de constituer une référence qui amorce la transposition didactique. Ce *savoir de référence* devrait permettre de préciser le *savoir à enseigner* et de mettre en place un *savoir enseigné* qui prenne en compte les dimensions outil et objet des notions de logique.

– Besoin de ressources à destination des élèves, et surtout d'outils pour l'analyse d'activités permettant de travailler sur les notions de logique (outils pour une rédaction particulièrement rigoureuse des activités portant explicitement sur des notions de logique, outils pour dégager un possible travail sur des notions de logique dans des activités où elles ne sont pas spécifiquement visées).

– Besoin de réhabiliter le pilier langage de la logique. Les enseignants associent plus spontanément la logique au raisonnement. Par ailleurs, ils montrent une défiance vis-à-vis de la formalisation du langage, et il y a donc un besoin de montrer comment cette formalisation peut aussi lever des ambiguïtés et participer à la conceptualisation des notions, de logique bien sûr, mais aussi de mathématiques en général.

Je me suis ensuite intéressée à une formation particulière : la formation *Initiation à la logique* proposée par l'IREM de Paris dans le cadre de la formation continue des enseignants. Le langage est au cœur de cette formation, puisque ses concepteurs font le choix d'étudier les notions de logique à partir d'une approche naïve basée sur l'analyse du langage et du discours mathématique. Parallèlement à ma question de recherche portant sur la constitution d'un savoir de référence, j'ai également analysé la façon dont les formateurs amènent les stagiaires à prendre conscience des implicites et des ambiguïtés des pratiques langagières des mathématiciens, et comment cet axe fort du contenu de la formation est perçu par les stagiaires.

Sur la constitution d'un *savoir de référence*

Dans la formation, les notions de logique sont abordées à travers une approche naïve : elles ne sont pas mathématiquement définies comme cela serait fait dans un cours de logique mathématique. Pourtant, elles acquièrent un statut d'objet en étant décontextualisées des situations où elles sont rencontrées. Il y a des phases ponctuelles d'institutionnalisation, prises en charge par les formateurs. Elles sont prévues par le formateur dans l'exposé sur l'analyse du discours mathématique, ou insérées dans un moment qui ne leur est pas particulièrement destiné (présentation d'activités pour la classe par exemple). Certaines propriétés des notions de logique sont alors précisées, et sont réinvesties dans d'autres situations, il y a ainsi une mise en œuvre de la dialectique outil/objet. Une autre forme d'institutionnalisation se fait à travers la répétition de certaines expressions, la décontextualisation étant alors plutôt à la charge des stagiaires. La logique mathématique fonctionne comme *savoir savant* auquel se réfèrent les formateurs, mais le *savoir enseigné* dans la formation est une adaptation de ce savoir à des fins de formation des enseignants dans laquelle les formateurs oscillent entre plus ou moins de formalisme. Selon qu'ils ont ou non des connaissances en logique mathématique, les stagiaires peuvent plus ou moins relier ce qui est dit au *savoir savant*.

Je dirai donc qu'il se constitue un *savoir de référence* à l'échelle du stage, dans le sens de conceptions partagées de notions de logique, caractérisées par les formateurs, et d'un vocabulaire institué pour parler de ces notions. Mais les formateurs ne proposent pas de corpus matériel qui l'exposerait. Une partie non négligeable de la constitution de ce savoir reste donc à la charge de chaque stagiaire et dépend alors des connaissances et des intérêts de chacun.

Le travail reste donc à poursuivre pour organiser ce *savoir de référence*. Il y a un noyau de contenu bien identifié, autour des éléments constitutifs du langage mathématique (variables, propositions, connecteurs, quantificateurs). Il y a des situations « d'introduction »[24] de ces notions, qui fonctionnent plutôt bien (on pourrait cependant envisager d'y introduire plus de situations de formulation, avec un travail en groupe, nous avons vu que dans le stage la production de connaissances reste essentiellement du côté du formateur). Mais l'institutionnalisation pourrait être plus formalisée, pas forcément pendant la formation, mais par exemple en distribuant aux stagiaires un document dans lequel les notions seraient plus étudiées sous leur aspect objet (et qui s'apparenterait donc plus à un cours de logique).

Sur le choix de l'entrée par l'étude sur le langage

Les stagiaires approuvent unanimement dans le bilan la stratégie choisie. Mais plus encore que cette approbation, le fait que les trois quarts des stagiaires déclarent un impact de la formation sur la façon dont ils s'expriment dans leur classe montre une pertinence de ce choix. Plusieurs stagiaires mentionnent notamment un réel changement de pratiques quant à l'explicitation des quantifications, qu'ils jugent nécessaire à une bonne compréhension des élèves (même si elle n'est évidemment pas suffisante). L'impact de la formation est d'autant plus fort que la remise en question de certaines pratiques langagières des mathématiciens produit un effet de surprise. Nous avons vu dans les deux premières séquences du stage comment le formateur amène les stagiaires à se rendre compte que ces pratiques portent plusieurs implicites qui peuvent être autant de difficultés pour les élèves. La première séquence dans laquelle est mise au jour la quantification universelle implicite des implications semble vraiment « faire mouche » et atteindre son double but de mettre en évidence une telle pratique et de montrer le déficit d'outils pour l'analyser. Les notions de variable, proposition, connecteur, quantificateur sont des éléments constitutifs d'un langage qui sert de référence pour analyser des énoncés couramment utilisés en mathématiques. Si la plupart des stagiaires se disent donc conscients que les quantifications sont importantes à souligner, ils ne font cependant pas tous les mêmes choix pour l'explicitation des quantifications : certains vont utiliser beaucoup plus les quantificateurs universel et existentiel dans leurs énoncés, d'autres font le choix de marquer cette quantification par des termes plutôt empruntés au langage courant (toujours, forcément, dans tous les cas).

24. Je mets des guillemets pour signifier qu'il ne s'agit pas de notions nouvelles pour les professeurs, ces situations ne sont donc pas des situations d'introduction de nouveau, mais plutôt de nouvelle utilisation de ces notions.

La deuxième séquence du stage portait sur la notion de proposition. Les stagiaires se déclarent en moyenne très intéressés personnellement par l'apport du stage sur cette notion, pour laquelle ils sentaient leurs connaissances avant le stage à peine suffisantes. Pourtant, cet apport du stage leur paraît difficilement exploitable en classe. Il en va de même pour la notion de variable. Celle-ci occupe une place très importante dans le stage, avec des apports théoriques sur le statut (parlante ou muette) de la variable et la notion de signe mutificateur. Comme nous l'avions vu dans l'analyse des programmes et des manuels, ces deux notions de proposition et de variable sont quasiment absentes du *savoir à enseigner*. Il y a donc une réelle prise de position des formateurs qui leur accordent une place importante dans le stage, mais leur discours semble encore insuffisant pour que les stagiaires leur accordent une telle place dans la classe. Pour continuer à défendre une telle position, il me paraît nécessaire de relier le discours théorique à des phénomènes que les professeurs peuvent observer dans leur classe (comme c'est fait pour la quantification universelle implicite associée à l'implication). Il y a donc un travail didactique d'identification des situations où des conceptions erronées des notions de variable ou de proposition posent problème. Ce qui bien sûr est d'autant plus difficile qu'elles ne sont pas l'objet d'activités spécifiques.

Sur les effets sur les pratiques

Nous avons déjà vu que les stagiaires déclarent une modification de leurs pratiques concernant la façon dont ils s'expriment en classe.

À plusieurs moments dans le stage les pratiques individuelles sont mises en relation avec des pratiques institutionnelles (hésitation des enseignants à faire des moments d'institutionnalisation mis en relation avec les hésitations du programme, pratiques langagières qui sont celles de la communauté). Les trois quarts des stagiaires déclarent que le stage leur a apporté des éléments pour concevoir des activités portant sur la logique. Plusieurs propositions d'activités pour la classe sont faites pendant le stage, mais les stagiaires les découvrent en même temps qu'est raconté leur déroulement effectif. Les discussions au sujet de ces activités seraient sans doute plus riches en laissant aux stagiaires plus de temps pour les découvrir et imaginer une utilisation possible. Par ailleurs, là aussi le stage gagnerait sûrement à être accompagné d'une ressource papier dans laquelle ces activités seraient présentées.

Les données que j'ai récoltées sont trop limitées pour pouvoir donner des résultats sur une éventuelle modification des pratiques. C'est finalement plutôt l'activité des stagiaires en tant qu'« élèves » de la formation que j'ai pu observer. Pour étudier un effet sur les pratiques, il faudrait compléter cela d'observations des stagiaires dans leur activité d'enseignant, c'est-à-dire de retour dans leur classe.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse porte sur l'enseignement de notions de logique dans la classe de mathématiques. J'ai adopté la perspective proposée par la Théorie Anthropologique du Didactique en suivant le schéma d'étude de la transposition didactique (Chevallard, 1985), c'est-à-dire des adaptations nécessaires du *savoir savant* au *savoir à enseigner* (transposition didactique externe), puis du *savoir à enseigner* au *savoir enseigné* (transposition didactique interne). J'ai situé le questionnement dans une institution particulière : le lycée, pour lequel nous pouvons parler aujourd'hui d'une réintroduction de la logique dans les programmes, contexte particulièrement intéressant, et pour lequel peu de recherches didactiques ont été menées. Je suis volontairement restée « en dehors de la classe », en me concentrant plutôt sur la partie externe de la transposition didactique, les questions à ce sujet étant déjà nombreuses.

La question qui se pose n'est pas celle de l'enseignement de la logique mathématique, mais de la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique, ce que j'ai appelé *la logique des mathématiques*. J'ai alors structuré mon travail en postulant qu'il était nécessaire, pour les notions de logique, de modifier le schéma classique de la transposition. Les programmes donnent pour objectif l'apprentissage de notions de logique dans leur dimension outil au service de l'activité mathématique, et ne visent pas des connaissances sur ces notions en tant qu'objets. Pourtant, « officialiser certaines connaissances qui, jusque là, n'ont été que des outils, leur donner un statut d'objet mathématique est une condition d'homogénéisation et de constitution d'un savoir de la classe, et pour chacun une façon de jalonner son propre savoir et par là d'en assurer la progression » (Douady, 1986). En accord avec cette position, j'ai considéré que l'enseignement de notions de logique ne peut pas se faire sans un savoir à l'origine d'un processus de transposition didactique. Mais en raison de cette particularité de la logique des mathématiques qui relève plus chez les mathématiciens d'un savoir-faire que d'un savoir mathématique, j'ai suggéré de penser cette transposition en introduisant un *savoir de référence* entre le savoir savant (la logique mathématique) et le savoir à enseigner. La constitution d'un tel savoir de référence se ferait en « identifiant des catégories d'objets et de traitement communes à des pratiques efficaces, qui sont quant à elles spécifiques de situations, contextualisées et personnalisées » (J. Rogalski & Samurçay, 1994).

La logique étudie le langage et le raisonnement. S'intéresser à la logique dans l'enseignement des mathématiques ouvre donc un très vaste champ d'investigation. Il fallait faire des choix. J'ai privilégié les questions concernant le langage, sans pour autant mettre le raisonnement de côté, puisque les deux sont liés : expression et raisonnement vont de pair.

En revanche, je n'ai pas tranché entre un point de vue global sur la logique, nécessaire pour comprendre certains enjeux de son enseignement, et un point de vue plus local sur des notions précises (proposition, variable, connecteurs ET et OU, implication, négation, quantificateurs, types de raisonnement), nécessaire pour une analyse plus fine de la transposition didactique. J'ai ainsi alterné entre ces deux points de vue tout au long de l'étude.

Études épistémologique et didactique

Un savoir de référence pour l'enseignement des notions de logique n'existe pas actuellement. Une référence m'était cependant nécessaire. Une étude épistémologique, qui m'a permis d'identifier des régularités et des différences dans les finalités attribuées à la logique et dans le niveau de formalisation des notions, a été la première étape dans la constitution d'une telle référence. La deuxième étape a été une étude de travaux didactiques. J'y ai cherché quelle utilisation de la logique était pertinente pour l'analyse didactique, et comment elle pouvait nourrir la réflexion sur le langage et le raisonnement dans la classe de mathématiques.

Du point de vue épistémologique, j'ai mené une étude de différents systèmes logiques dans trois époques. Dans l'Antiquité grecque, la logique d'Aristote est une logique des termes, et celle des Stoïciens est une logique des propositions. Au XVII^e siècle, la logique de Port-Royal, inspirée des réflexions de Descartes, prend position contre l'excès de formalisme, et s'oppose ainsi sur ce point à Leibniz qui tente de formaliser la logique aristotélicienne. Enfin, au XIX^e siècle, on assiste à la gestation et à la naissance de la logique mathématique, de Boole et la mathématisation de la logique aristotélicienne à Frege et la logicisation des mathématiques. Du point de vue didactique, j'ai sélectionné des travaux mettant en évidence l'apport de l'analyse logique pour des questions didactiques sur le raisonnement, notamment ceux de V. Durand-Guerrier, et le langage, notamment ceux de C. Laborde. J'ai également mis en parallèle l'activité de reformulation très présente en mathématiques avec les registres de représentation sémiotique de R. Duval. J'ai ainsi dégagé quatre axes pour réfléchir à la constitution d'un savoir de référence : le travail sur le langage (qui est au commencement de tous les systèmes étudiés), la validité des raisonnements (qui est le but de tous ces systèmes), la nécessaire formalisation (pour dégager la validité des raisonnements du contenu des propositions) et la dialectique entre syntaxe et sémantique (la formalisation amène ces deux aspects, qui permettent des allers-retours entre manipulation formelle des signes et interprétation). Je reviens maintenant plus en détail sur chacun de ces axes.

Tous les systèmes logiques étudiés proposent une importante étude du langage préalable à celle des raisonnements. La notion de proposition y est primordiale. Aristote la définit comme un « discours dans lequel réside le vrai ou le faux », et propose une catégorisation qui distingue quatre types de propositions selon un critère de quantité et un critère de qualité. Mais cette catégorisation est insuffisante pour décrire les propositions mathématiques. Il a fallu attendre Frege pour qu'à la fin du XIXe siècle, l'analyse de la proposition en sujet-copule-prédicat soit remplacée par une analyse en termes de fonction et argument, donnant ainsi naissance au langage des prédicats de la logique mathématique actuelle. Le langage actuel des mathématiciens s'inspire du formalisme de Frege, mais n'est en aucun cas une utilisation stricte d'un langage formel. Nous avons vu avec la thèse de C. Laborde (Laborde, 1982) qu'il est le lieu de l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle. Cette interaction a pour conséquences des formulations spécifiques et des transformations linguistiques parfois difficiles à comprendre et à utiliser, notamment pour les élèves. La mise au jour de la structure logique des propositions, à l'aide du langage des prédicats, aide à déceler la complexité de certaines formulations. Mais l'interprétation des énoncés produits dans la classe de mathématiques demande également de prendre en compte les pratiques langagières de la communauté mathématique. L'analyse de la tâche du labyrinthe (Durand-Guerrier, 1999) que j'ai relatée montre comment la pratique de quantification universelle implicite des implications amène un malentendu avec certains élèves.

Ces systèmes logiques sont établis comme des contributions à la science du raisonnement. Pour les auteurs de la logique de Port-Royal, « la logique est l'art de bien conduire sa raison dans la connaissance des choses », elle a surtout besoin d'être exercée et la formalisation des raisonnements est vue comme une entrave au fonctionnement de l'intuition. Chez Leibniz et chez Frege au contraire, la logique doit fournir un système de signes dans lequel pourront s'exprimer les raisonnements, cette expression formelle étant la garantie de leur infaillibilité. M. Gandit (Gandit, 2004) dénonce la place trop importante que prend l'aspect formel d'une preuve au début de l'apprentissage de la démonstration au collège. Mais se méfier de la formalisation au moment de la découverte du raisonnement déductif ne veut pas dire qu'elle ne puisse pas apporter ultérieurement un éclairage pour qui commence à en avoir une bonne pratique. Ainsi, au niveau de l'enseignement supérieur, A. Selden et J. Selden (Selden & Selden, 1995) suggèrent de présenter les théorèmes et les définitions dans une formulation informelle, qui permet la compréhension intuitive, et dans une formulation formelle, qui permet de faire le lien avec la structure d'une preuve et le contrôle de sa validité. Ce rôle différent qu'ils attribuent à chaque type de formulation est un premier argument en faveur de l'importance de la reformulation dans l'activité mathématique, sur laquelle je reviens dans le paragraphe suivant.

Pour ce qui est du niveau de formalisation, il y a une différence importante entre Aristote, les Stoïciens, la logique de Port-Royal d'un côté, et Leibniz, Boole, Frege de l'autre : les premiers se contentent du langage courant pour exprimer les raisonnements, les seconds proposent un autre langage, celui de l'algèbre pour Leibniz et Boole, et un système de signes nouveaux pour Frege. Pour autant, ces systèmes peuvent tous être qualifiés de formels, dans le sens où ils proposent une mise en forme des propositions et des raisonnements selon un code plus ou moins contraignant. Pour rendre compte de la plus ou moins grande formalisation des propositions dans le langage actuel des mathématiciens, j'ai distingué trois registres de représentation sémiotique, au sens de R. Duval : le registre de la langue naturelle (dont fait partie la proposition « les entiers divisibles par 4 sont pairs »), le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats (dans lequel les connecteurs sont explicites, et les quantifications exprimées par des quantificateurs, comme par exemple dans la proposition « quel que soit l'entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ »), et le registre intermédiaire (entre les deux autres ; par exemple la proposition « si 4 divise n, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ » contient des variables, et ne fait ainsi pas partie du registre de la langue naturelle, et contient une quantification universelle implicite associée à la formulation en *si…, alors…* et une quantification existentielle marquée par « avec », et ne fait ainsi pas partie du registre formalisé). Le mathématicien use selon ses besoins de différentes formulations équivalentes, qui relèvent de l'un ou l'autre de ces registres. En reliant cette pratique de reformulation aux registres de représentation sémiotique de R. Duval, nous pouvons alors, à l'instar de ce qu'il dit d'une façon générale sur les registres de représentation sémiotique, arguer d'une part que ces différentes formulations sont nécessaires à la compréhension, d'autre part que les reformulations mettant en jeu des changements de registre peuvent s'accompagner de problèmes de non-congruence particulièrement complexes pour les élèves.

Dans les systèmes étudiés il n'y a pas de séparation nette entre les deux plans syntaxique et sémantique (même dans les systèmes de Leibniz, Boole ou Frege, dans lesquels les propositions sont exprimées à l'aide d'un système de signes spécifiques, il n'y a pas d'approche syntaxique indépendante de l'interprétation des signes). Mais la dialectique entre ces deux aspects est très présente : des règles concernant l'équivalence des propositions sont établies sur des fondements sémantiques, puis utilisées pour des manipulations indépendantes de la signification des signes (par exemple les règles de conversion dans la logique d'Aristote, qui deviennent des « règles de calcul » dans la mathématisation qu'en propose Boole), et l'adéquation entre l'utilisation formelle des signes et leur interprétation est une préoccupation constante des logiciens qui proposent des langages formels (par exemple, Frege précise qu'un des signes qu'il utilise, qui correspond au connecteur IMPLIQUE, ne peut pas se traduire dans tous les cas par « si…, alors… »). D'un point de vue didactique, les travaux de V. Durand-Guerrier (Durand-Guerrier, 1996) et V. Deloustal-

Jorrand (Deloustal-Jorrand, 2004) sur l'implication, de F. Chellougui (Chellougui, 2004) sur les quantificateurs, de I. Ben Kilani (Ben Kilani, 2005) sur la négation montrent que la prise en compte des deux dimensions syntaxique et sémantique est essentielle pour une bonne compréhension des notions de logique.

Les points de vue épistémologique et didactique sont complémentaires pour dégager des caractéristiques d'une référence qui soit opérationnelle pour l'enseignement des notions de logique. J'ai proposé *une référence* correspondant à ces caractéristiques, mais au delà de son utilisation dans cette recherche, je souhaite qu'elle contribue à une réflexion collective qui permettrait d'instituer *un savoir de référence* sur ce sujet.

Proposition d'une référence pour l'enseignement de notions de logique

Dans l'élaboration de la référence qui est l'objet de la deuxième partie de la thèse, les notions de logique mathématiques sont étudiées à travers l'analyse du langage utilisé en mathématiques. Afin de rendre compte de la complexité de ces notions, je combine trois points de vue : le point de vue de la logique mathématique, la prise en compte des pratiques langagières de la communauté mathématique, les difficultés d'élèves montrées dans différentes études didactiques.

Dans cette approche multiple, la distinction entre ce que j'ai appelé le *langage mathématique*, qui concerne les objets mathématiques et eux seulement, et ce que j'ai appelé le *discours mathématique*, dans lequel intervient l'être humain qui examine ces objets, a alors été essentielle. Elle permet de délimiter la possible référence à la logique mathématique, qui ne s'occupe que du langage mathématique, et justifie de faire appel à la dimension plus pragmatique des pratiques langagières.

J'ai d'abord présenté les éléments constitutifs du langage mathématique, en commençant naturellement par la notion de proposition. Je n'ai pas cherché à définir cette notion (il est difficile de le faire sans adopter une approche formelle, ce qui n'était pas mon but) mais à préciser ce qui est une proposition mathématique (une expression mathématique qui dit des faits sur des objets mathématiques), et ce qui n'en est pas (par exemple une expression telle que « soit x un réel », qui met en jeu un locuteur qui introduit une variable dans une démonstration). Cette précision est notamment essentielle dans la distinction entre implication et déduction (entre « si A alors B » et « A donc B »). De la même façon, je n'ai pas défini la notion de variable, mais j'ai insisté sur deux points liés à l'activité mathématique. Tout d'abord, sur le fait que les variables sont un élément caractéristique du langage mathématique, dont la pratique du langage courant ne nous donne pas les règles d'utilisation (par exemple, les phénomènes d'anaphore [25], fréquents dans le langage courant, ne s'appliquent pas à des variables). Ensuite, sur le fait que la distinction, rarement faite dans la classe de mathématiques, entre variable *parlante* et variable *muette* participe à la compréhension des énoncés mathématiques, en permettant de répondre avec un critère syntaxique (repérer les *signes mutificateurs*) à une question essentielle pour l'interprétation sémantique (de qui parle l'énoncé ?).

Ensuite, pour les connecteurs ET et OU, l'implication, la négation, les quantificateurs, j'ai adopté systématiquement les trois points de vue déjà mentionnés. J'ai alors souligné plusieurs difficultés possibles pour les élèves dans l'utilisation du langage mathématique, et donné des éléments pour les expliciter. Certaines de ces possibles difficultés sont dues à la confrontation, pour certains termes, d'un usage conforme à la logique mathématique avec un usage différent dans le langage courant (j'ai par exemple distingué le *et-propositionnel* du *et-couple*, montré comment le principe du maximum d'information pouvait amener à déclarer fausse une conjonction pourtant vraie). D'autres sont dues aux implicites et aux ambiguïtés dans les pratiques langagières des mathématiciens (des implicites notamment en ce qui concerne les quantifications, par exemple la bien connue quantification universelle implicite des implications, des ambiguïtés comme celle d'une proposition de la forme « s'il existe un x tel que $P[x]$ alors $Q[x]$ », qui n'est pas une proposition existentielle, même si elle en a l'air).

J'ai me suis finalement appuyée sur la formalisation proposée par la déduction naturelle pour l'étude des raisonnements. Une difficulté pour les élèves et les étudiants est de distinguer dans un texte de démonstration les propositions mathématiques qui concernent les objets mathématiques, et les parties du texte qui permettent de suivre le cheminement du raisonnement, par exemple les introductions de variables, ou la justification d'une inférence permettant de déduire une nouvelle proposition à partir des propositions posées en hypothèses ou déjà démontrées. La confusion entre implication et déduction relève de ce type de difficulté. La référence à la logique mathématique permet aussi d'éclairer certains points complexes liés aux différents types de raisonnement : différence entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée, lien entre exemple et contre-exemple, intervention d'un « et » et d'un « ou » dans le raisonnement par disjonction des cas, gestion de la quantification universelle dans l'étape d'hérédité d'un raisonnement par récurrence.

À l'issue de cette partie, je disposais d'une référence pour l'enseignement de notions de logique et pour la suite de mon étude didactique. L'établissement de cette référence a permis d'une part de clarifier certains aspects des notions de logique, d'autre part de répertorier des points sensibles les concernant, méritant une attention particulière dans la suite de l'étude.

25. Procédé consistant à rappeler un mot ou groupe de mots précédemment énoncé par un terme grammatical.

Étude du savoir à enseigner

Munie de cette référence, j'ai ainsi pu entreprendre dans la troisième partie de la thèse l'étude du *savoir à enseigner*. Le savoir à enseigner est à l'articulation des deux phases de la transposition didactique. Les questions qui le concernent sont alors posées à partir de deux points de vue : tout d'abord, en le considérant comme aboutissement de la transposition didactique externe, nous pouvons nous interroger sur son positionnement par rapport à la référence élaborée, ensuite, en le considérant comme point de départ de la transposition didactique interne, nous pouvons étudier l'ensemble de conditions et de contraintes qu'il crée pour les professeurs.

J'ai d'abord conduit une étude écologique (Artaud, 1997) de la place de la logique dans les programmes de mathématiques pour la classe de Seconde et les documents d'accompagnement, en prenant une perspective historique qui a montré que la position actuelle succède à deux positions extrêmes : la logique est présente comme une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de 1969 à 1981, mais est ensuite exclue des programmes de 1981 à 1999. Dans tous les textes institutionnels étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est bien un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques, mais il n'y a pas de fonction attribuée à la logique pour atteindre cet objectif dans les programmes de 1981 et de 1990, ce dernier précisant même que « tout exposé de logique mathématique est exclu ». Au contraire, des notions de logique sont explicitement citées dans les programmes de 1969 (« mathématiques modernes »), et de 2009. Il y a, dans ces deux périodes, deux niches pour la logique, qui correspondent aux deux piliers de la logique : une *niche raisonnement* et une *niche langage*. Il n'y a pas de grande différence entre les deux périodes concernant le travail sur le raisonnement. Concernant le langage au contraire, les approches sont différentes. Pendant la période des mathématiques modernes, l'apprentissage d'un langage mathématique spécifique était explicitement visé, ce qui est nettement moins revendiqué actuellement. Dans ces deux périodes, nous pouvons parler d'un *habitat flou* pour la logique : elle doit être présente partout, son étude accompagne celle des notions vues dans les autres chapitres. Il y a cependant là encore une différence notable entre les deux périodes : pendant la période des mathématiques modernes, un chapitre spécifique était consacré à la logique, même s'il était bien précisé que son seul but était de poser des bases qui seraient ensuite réinvesties à de multiples occasions. Dans le programme pour la classe de Seconde de 2009, il est au contraire précisé qu'il ne faut pas faire de cours sur les notions de logique. L'étude des documents accompagnant les programmes de 1969 et de 2009 confirme la différence de positionnement entre les deux époques. Les deux programmes mentionnent à peu près les mêmes notions de logique à étudier, mais la présence des notions de proposition et de variable dans le *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* de 1970 confirme l'importance donnée au langage à cette époque. Ce document propose un très synthétique cours de logique mathématique, montrant ainsi qu'elle est une référence assumée et revendiquée, mais ne donne pas d'exemples d'activités sur des notions de logique. À l'inverse, le document ressource *Notations et raisonnement mathématiques* de 2009 propose une série d'exercices mettant en jeu les notions de logique du programme, mais aucune considération théorique sur ces notions. La logique mathématique ne semble donc pas être suggérée comme référence, même pour les professeurs. Malheureusement, aucune autre référence n'est proposée pour expliciter les éléments de complexité qui sont soulignés dans ce document (par exemple, on y souligne l'emploi simultané des mots « et » et « ou » dans la phrase « $A(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ **ou** $x = 2$ donc les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont 1 **et** 2 », mais sans donner la moindre explication de ce phénomène langagier).

Pour compléter l'étude du savoir à enseigner, j'ai mené une étude de manuels. Les manuels scolaires sont une ressource largement utilisée par les enseignants et participent ainsi à la transposition didactique interne. Par ailleurs, ils proposent une interprétation des programmes. J'ai là aussi adopté une perspective historique qui éclaire les choix actuels. L'analyse des pages qui présentent les notions de logique dans 3 manuels de 1969 et dans tous les manuels de 2010 montre que les notions de logique (hormis bien sûr les types de raisonnement) sont présentées comme éléments du langage. Mais en 1969, conformément à la ligne directrice du programme et du document complémentaire, il y avait un enjeu de construction d'un langage mathématique spécifique, alors qu'en 2009, le travail sur le langage semble plutôt concerner la maîtrise de la langue française et les usages particuliers qu'elle aurait en mathématiques. Ainsi, dans les manuels de 1969, les notions de logique sont présentes comme outils et comme objets, ces deux dimensions étant articulées à travers des commentaires sur l'activité mathématique s'appuyant sur la logique mathématique. Dans les manuels de 2010, la logique mathématique est beaucoup moins une référence, les manuels se conformant là encore aux indications du programme. La présentation des notions est faite de façon beaucoup moins formalisée, et le vocabulaire utilisé est beaucoup moins précis. Les notions ne sont pas définies, et sont même parfois mal délimitées (plusieurs manuels confondent ainsi « si A alors B » et « A donc B »). Par ailleurs, la dimension syntaxique est beaucoup moins présente dans les manuels de 2010. Cela est cohérent avec la volonté d'éviter tout formalisme et le recours à un langage spécifique pour les mathématiques. Dans les manuels de 2010, conformément à la demande du programme, la dimension outil des notions de logique est donc mise en avant et la dimension objet est quasiment absente.

L'analyse des exercices proposés par 5 manuels de 2010 confirme la faible place de la dimension objet des notions de logique. J'ai relevé dans ces manuels un grand nombre de types de tâches, mais chacune n'est proposée qu'un petit nombre de fois et seulement dans certains manuels. Seuls des exercices de type Vrai/Faux sur des implications ou des propositions écrites explicitement avec un quantificateur, ou des exercices classiques sur implication et réciproque apparaissent partout. Par ailleurs, les manuels proposent peu de techniques de résolution de ces exercices, et encore moins d'éléments justifiant ces techniques. Par exemple, dans les Vrai/Faux sur des implications, la technique du contre-exemple est donnée dans presque tous les manuels, mais, hormis dans un manuel, elle n'est jamais reliée au fait que la négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle (il est d'ailleurs rarissime que les implications soient universellement quantifiées de façon explicite). Le recours à un contre-exemple pour infirmer une implication n'est donc pas du tout justifié. Pour ce qui est des Vrai/Faux sur des propositions quantifiées, aucun manuel ne donne une liste exhaustive des quatre techniques (montrer/infirmer une proposition universelle, montrer/infirmer une proposition existentielle ; les quatre techniques se ramènent en fait à deux en s'appuyant sur la négation). Les propositions existentielles sont de toute façon moins l'objet de tâches proposées aux élèves que les propositions universelles : montrer une proposition existentielle est une tâche rare, infirmer une proposition existentielle est une tâche pratiquement inexistante. Une analyse plus complète des praxéologies proposées dans les manuels permettrait de préciser ce constat d'absence des techniques et de leurs justifications. Enfin, les manuels de 2010 ne proposent presque aucune activité sur les notions de proposition et de variable, éléments pourtant essentiels du langage mathématique. En particulier, les tâches de reformulation, dont j'ai souligné l'importance dans la première partie, sont, sauf rare exception, absentes.

Ainsi, qu'il s'agisse des pages consacrées aux notions de logique, ou des exercices, mon étude met en évidence une grande diversité entre les manuels de 2010. Ceci s'explique notamment par l'absence d'une référence fixée par le programme actuel (le contraste avec les manuels de 1969 est à cet égard éloquent : le programme prenait clairement comme référence la logique mathématique). Nous pouvons également voir une deuxième explication : l'apparition relativement récente et seulement par intermittence de la logique dans le secondaire n'a pas encore permis que s'établisse une tradition pour son enseignement. L'étude des manuels montre également qu'ils ne constituent pour les enseignants qu'une ressource assez pauvre, qui est loin de permettre de répondre aux multiples difficultés recensées.

Globalement, le savoir à enseigner actuel concernant les notions de logique est donc très imprécis. Ce constat s'ajoute à l'absence d'un savoir de référence. On le voit, mettre en place un enseignement permettant d'atteindre les objectifs fixés par le programme sur les notions de logique n'est pas une tâche facile. La formation des enseignants est un élément essentiel dans le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Nous avons déjà dit qu'en France, la logique, et particulièrement la logique mathématique, y est peu présente. J'espère avoir montré dans ces trois premières parties à quel point cela est dommageable.

Analyse d'une formation continue « Initiation à la logique »

J'ai voulu contribuer activement à la réflexion sur la formation à la logique des enseignants. La référence proposée dans la deuxième partie est un premier élément. En complément, les analyses menées dans la quatrième partie de cette thèse, dont je vais faire un bilan ici, avaient un premier but très général : mieux cerner les besoins de formation en confrontant des besoins supposés (inférés des résultats des premières parties) aux besoins ressentis par des professeurs, et un deuxième but plus spécifique : étudier la pertinence d'une formation à la logique prenant comme porte d'entrée l'étude du discours mathématique.

Les résultats d'un questionnaire proposé à 50 enseignants de Seconde ont d'abord permis de préciser le ressenti des enseignants qui ont répondu par rapport aux connaissances en logique mathématique [26]. Une large majorité d'entre eux a en fait eu au moins une initiation à la logique mathématique. Parmi ceux-là, quelques uns considèrent ces connaissances insuffisantes pour mettre en place un enseignement permettant d'atteindre les objectifs fixés par le programme, et une large majorité a eu du mal à concevoir des activités allant dans ce sens. Cela confirme que les connaissances théoriques qu'apporte la logique mathématique doivent être articulées dans la formation avec l'activité mathématique pour être opérationnelles pour l'enseignement, le lien n'étant pas si immédiat. Par ailleurs, parmi les enseignants interrogés qui ont déclaré n'avoir pas eu de formation spécifique en logique mathématique, la moitié considèrent que leurs connaissances suffisent pour mettre en place un enseignement conforme aux attentes programme. L'étude du document ressource de 2009 et des manuels, dans lesquels plusieurs points sensibles soulignés dans la deuxième partie de la thèse sont ignorés, ou mentionnés sans explication, amène à remettre en question ce sentiment de connaissances suffisantes, et à penser pour la formation à des situations qui montrent que des connaissances logiques qui ont pu être suffisantes pour faire des mathématiques ne sont pas toujours suffisantes pour les enseigner.

Par ailleurs, les résultats du questionnaire montrent que les enseignants adhèrent majoritairement à la ligne de conduite du programme qui préconise un travail sur les notions de logique au fil des autres chapitres, en insistant sur la dimension outil de ces notions. Plusieurs d'entre eux ressentent cependant le besoin de proposer des temps d'institutionnalisation, mais, comme nous pouvons nous y attendre vu les indications du programme et le manque de référence, il n'y a pas de pratiques d'institutionnalisation stables. Une large majorité des enseignants déclare également avoir eu du mal à trouver ou concevoir des activités pour atteindre les objectifs fixés par le programme. Une formation devra ainsi également proposer des ressources, et des outils pour concevoir des activités, ou au

26. 17 de ces 50 enseignants sont des stagiaires de la formation « Initiation à la logique » de l'IREM de Paris. Les réponses au questionnaire témoignent alors de l'existence de besoins ressentis, plus que de l'importance quantitative de ces besoins.

moins pour que les enseignants soient en mesure de faire une analyse critique des exercices proposés dans les manuels permettant de les améliorer.

Pour avancer dans la réflexion sur la formation à la logique, j'ai alors procédé à une étude de cas : le stage *Initiation à la logique* proposé par l'IREM de Paris dans le cadre de la formation continue des enseignants. J'ai d'abord situé son contenu par rapport aux besoins de formation identifiés. Le double apport théorique et pratique évoqué est présent dans le projet du stage, qui par ailleurs met le langage au cœur de la formation. Ses concepteurs font ainsi le choix d'étudier les notions de logique à partir d'une approche naïve basée sur l'analyse du langage et du discours mathématique. Nous retrouvons l'approche choisie pour la constitution de la référence proposée dans la deuxième partie de la thèse, l'analyse de la formation me permet ainsi d'en tester la pertinence. Je me suis également intéressée à la constitution d'un savoir de référence et parallèlement j'ai analysé comment les formateurs amènent les stagiaires à prendre conscience des implicites et des ambiguïtés des pratiques langagières des mathématiciens, et comment cet axe fort du contenu de la formation est reçu par les stagiaires.

Dans la formation, les notions de logique acquièrent un statut d'objet en étant décontextualisées des situations où elles sont rencontrées. Certaines propriétés des notions de logique sont alors précisées et sont réinvesties dans d'autres situations. Il y a ainsi une mise en œuvre de la dialectique outil/objet, et il se constitue à l'échelle du stage un *savoir de référence*, dans le sens de conceptions partagées, parce que caractérisées par les formateurs, de notions de logique et d'un vocabulaire institué pour parler de ces notions. Outre l'institutionnalisation d'un discours qui se fait à travers la répétition, les formateurs proposent des institutionnalisations très locales sur telle ou telle notion, dispersées dans diverses séquences. Il me semble alors que la mise en texte du savoir, et son organisation en un tout cohérent, restent en partie à la charge des stagiaires à travers leur prise de notes. Cette impression pourrait être soumise à une analyse plus systématique de ce qui est noté au tableau et des notes prises par les stagiaires.

L'entrée par l'étude du langage pour une formation à la logique, dont nous pouvions déjà soutenir la pertinence épistémologique grâce à l'étude de différents systèmes logiques, et que j'ai choisie pour la constitution d'une référence, semble être ici validée par sa mise en œuvre : dans un questionnaire-bilan, les stagiaires approuvent unanimement la stratégie choisie. Mais plus encore que cette approbation, le fait que les trois quarts des stagiaires déclarent un impact positif de la formation sur la façon dont ils s'expriment dans leur classe, et que plusieurs stagiaires mentionnent un réel changement de leurs pratiques quant à l'explicitation des quantifications, montre la pertinence de ce choix. L'objectif de la formation d'arriver, à travers une succession de situations, à faire partager aux stagiaires la nécessité de s'intéresser au langage mathématique et d'avoir des outils précis pour l'analyser semble donc atteint. Il ne touche cependant pas avec la même efficacité toutes les notions abordées. En particulier, j'ai observé et analysé une succession de situations mises en place pour introduire les notions de proposition et de variable, mais le discours sur ces notions est perçu par les stagiaires comme difficilement exploitable en classe. Une explication possible, outre le fait que l'accent n'est pas mis sur ces notions dans les programmes, est que les enseignants perçoivent moins facilement la connexion avec des difficultés des élèves… (au contraire, par exemple, le discours sur les quantifications implicites est illustré par des activités proposées en classe où cet implicite a posé problème, et les stagiaires y trouvent facilement une explication à des réponses de leurs propres élèves).

Les données sur lesquelles je m'appuie sont insuffisantes pour assurer un effet réel sur les pratiques des enseignants. Les trois quarts des stagiaires déclarent que le stage leur a apporté des éléments pour concevoir des activités portant sur la logique, mais une analyse de ces activités serait nécessaire pour cerner vraiment l'apport du stage. Lors de la troisième et dernière journée du stage, quelques stagiaires ont présenté des activités proposées dans leurs classes. L'analyse de cette séquence a montré que certains points restaient obscurs et imprécis dans le discours des enseignants, comme la différence entre implication et déduction, la notion de proposition, la différence entre implication entre propositions et implication universellement quantifiée.

La formation dure trois jours. Même si, dans la conjoncture actuelle, elle fait partie des stages plutôt longs, elle n'en demeure pas moins rapide et ponctuelle. Ainsi, même si les stagiaires repartent avec des outils pour enseigner les notions de logique, ils ne sont plus accompagnés dans la confrontation de leurs intentions à la réalité de la classe. Certains des premiers stagiaires ont rejoint le groupe Logique de l'IREM de Paris dès 2010. Les nombreuses questions que nous nous y posons encore montrent qu'il n'est pas facile d'y répondre seul dans sa classe. La mise en place de groupes de travail sur les questions de logique et de raisonnement, comme ceux de différents IREM qui collaborent au sein du groupe « Logique et raisonnement » de la Commission Inter Irem Lycée, est alors importante pour que les enseignants y trouvent ressources et soutien.

Perspectives

Nous avons vu tout au long de la conclusion générale de cette recherche que plusieurs points mériteraient d'être approfondis. Cela permet d'envisager plusieurs pistes de travail que je vais décrire sommairement.

Sur les relations entre logique et mathématiques. La distinction que j'ai proposée entre logique mathématique et logique des mathématiques reste à préciser. J'en ai suggéré une définition (voir l'introduction, page 13) qui m'a été utile pour les analyses, mais qu'il faudrait « confronter au terrain ». J'entends par là repérer dans l'activité des mathématiciens la mise en œuvre de cette logique : voir où et quand elle intervient, préciser les connaissances mises en jeu et voir comment les mathématiciens les formulent.

Dans ce cadre, la période de la naissance de la logique mathématique mérite une étude plus approfondie, notamment une étude des débats qui ont animé la communauté mathématique à l'époque de la crise des fondements.

Sur les notions de proposition et de variable. L'étude épistémologique a montré l'importance des notions de proposition et de variable pour une contribution de la logique à un travail sur le langage. Leur étude peut cependant être approfondie :

– pour la notion de proposition, l'étude du vocabulaire employé pour les désigner, notamment chez les auteurs du début de la logique mathématique, peut nous renseigner sur la façon dont a été prise en compte la complexité de cette notion. Les travaux de O. Ducrot sont également une piste à creuser pour faire des ponts avec la linguistique, quand bien même cette discipline a beaucoup évolué depuis.
– Pour la notion de variable, nous avons vu les réticences de Frege à en donner une définition. Russell, au contraire, a tenté de le faire. Là encore, l'étude des textes originaux de ces auteurs peut nous aider à mieux comprendre cette notion.

Mais c'est surtout en direction de la classe que la réflexion sur ces notions est à poursuivre. Où est-ce qu'une conception erronée de ces notions peut poser problème aux élèves, aux professeurs ? Qu'est-ce qu'une clarification de ces notions peut apporter ? Quelles situations proposer pour les aborder ? Quels mots utiliser pour en parler ? Autant de questions qui, à ma connaissance, n'ont pas encore été directement abordées dans la recherche en didactique des mathématiques.

Sur l'importance de la notion de reformulation. J'ai postulé l'importance de la reformulation dans l'activité mathématique. Là encore, il faudrait confronter ce postulat au terrain en observant ce qu'il en est dans le langage et dans l'activité des mathématiciens. Quand est-ce qu'ils reformulent ? Dans quel but ? Peut-on décrire des caractéristiques de formulations utilisées à tel ou tel moment de leur activité ?

Du côté de la classe, les activités ayant pour objectif spécifique un travail de reformulation sont pratiquement inexistantes. De telles tâches, qui sont donc à inventer, pourraient-elles avoir un impact sur l'expression des élèves ? Par ailleurs, j'ai mis cette notion de reformulation en parallèle avec la coordination des registres de représentation sémiotique de R. Duval. Ce parallèle est à approfondir et à mettre en œuvre pour l'analyse de productions d'élèves.

Sur la formation des enseignants. J'ai étudié une formation particulière et j'ai souligné des pistes qui n'ont pas été développées ici :
- pour enrichir la formation : proposer des situations de formulation dans lesquels les stagiaires sont invités à mettre en mots leurs conceptions des notions de logique, à les confronter les unes avec les autres, à les contrôler en les appliquant. L'institutionnalisation pourrait ainsi s'ancrer davantage dans l'activité des stagiaires.
- Pour enrichir l'analyse : faire une étude plus systématique de ce qui est noté au tableau par les formateurs ou des diaporamas qu'ils utilisent et de ce qui est pris en note par les stagiaires, pour mieux cerner le savoir de référence qui se constitue à l'échelle du stage.

Par ailleurs, une méthodologie générale d'évaluation des effets d'une formation est encore à définir. Avec une telle méthodologie, un axe de travail pourrait être d'analyser plusieurs formations à la logique.

Entrer dans la classe : étudier les pratiques des enseignants. À l'issue de ce travail, je peux faire l'hypothèse de difficultés pour les enseignants à mettre en place un enseignement de notions de logique, et d'une diversité dans les pratiques due notamment à l'absence de savoir de référence, qui renforce l'importance des choix personnels.

Ces hypothèses peuvent être soumises à une étude des pratiques en suivant par exemple la méthodologie de la double approche d'A. Robert et J. Rogalski. Une question spécifique à la logique se pose alors : comment constituer un corpus de données adéquat permettant de saisir des pratiques sur un enseignement qui se doit d'être transversal ?

Entrer dans la classe : étude du savoir enseigné. Je me suis pour l'instant concentrée sur la partie externe de la transposition didactique, même si la question de la formation était un moyen d'aborder le savoir enseigné. Étudier le savoir enseigné est une autre approche de l'étude des pratiques des enseignants. Dans les deux cas, l'étude de l'activité des élèves est un complément indispensable. J'ai relevé un certains nombre de difficultés mises au jour dans des recherches en didactique, les expérimentations proposées pourraient servir de base pour réactualiser les résultats dans le contexte du lycée (les études portant notamment sur les quantificateurs ont plutôt été menées avec des étudiants du supérieur).

Par ailleurs, l'étude des manuels et des praxéologies qu'ils proposent est pour l'instant incomplète. Un constat global d'absence relative des techniques et des technologies associées aux types de tâches proposés étant suffisant pour mon propos, je n'ai pas fait de relevé systématique des praxéologies. Cela pourrait permettre de préciser ce constat. D'une façon plus générale, la notion d'organisation mathématique (OM) peut être un fil conducteur de l'étude de la transposition didactique, comme le préconisent M. Bosch et J. Gascòn (Bosch & Gascón, 2005) qui introduisent notamment une OM de référence au côté de l'OM savante.

À l'évidence, l'enseignement de la logique dans la classe de mathématiques est un sujet vaste et sensible. La réflexion à ce propos doit à mon sens associer logiciens, mathématiciens, didacticiens, enseignants (éventuellement aussi linguistes, psychologues…). Il convient d'abord de se mettre d'accord sur une référence, sur des incontournables qu'elle doit comporter. J'ai proposé une contribution à une réflexion qui doit être collective, j'espère surtout qu'elle sera une base d'échanges constructifs.

Références

Adda, J. (1975). L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques. *Nico*.

A.P.M.E.P. (1968). Charte de chambéry. *brochure APMEP*, *1*.

A.P.M.E.P. (1972). Charte de caen. *brochure APMEP*, *6*.

Aristote. (2007). *Organon.* III*. Premiers Analytiques.* Paris : Traduit par J.Tricot, Librairie Philosophique J.Vrin.

Aristote. (2008). *Organon.* I*. Catégories.* II*. De L'interprétation.* Paris : Traduit par J.Tricot, Librairie Philosophique J.Vrin.

Aristote. (2012). *Organon.* V*. Topiques.* Paris : Traduit par J.Tricot, Librairie Philosophique J.Vrin.

Arnauld, A., & Nicole, P. (1992). *La logique ou l'art de penser.* Paris : Notes et postface de Charles Jourdain, Gallimard.

Arsac, G. (1989). La transposition didactique en mathématiques. In G. Arsac, M. Develay, & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie* (p. 3-36). IREM et LIRDIS de Lyon.

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul et al. (Eds.), *Actes de la 14ème École d'Été de didactique des mathématiques* (p. 101-139). Houlgate.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10*(2.3), 241–286.

Austin, J. L. (1970). *Quand dire cest faire.* Paris : Seuil.

Barbazo, E., & Pombourcq, P. (2010). 100 ans d'A.P.M.E.P. *brochure APMEP*, *192*.

Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Bkouche, R. (1992). L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique. *Repères-IREM*, *9*, 5-14.

Blanché, R. (1970). *La logique et son histoire d'Aristote à Russell.* Paris : Librairie Armand Colin.

Boole, G. (1992). *Les lois de la pensée.* Paris : Traduction et introduction de Souleymane Bachir Diane, Librairie Philosophique J.Vrin.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), (p. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bouveresse, J. (2006). Descartes, le "bon sens", la logique et les vérités éternelles. In *Essai* V*, Descartes, Leibniz, Kant.* Marseille : Éditions Agone.

Brun, J. (1957). *Les Stoïciens : textes choisis.* Paris : Presses Universitaires de France.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève.

Cori, R. (s. d.). *Langage mathématique.* Université Paris Diderot.

Cori, R., & Lascar, D. (1993). *Logique mathématique tome 1. Calcul propositionnel ; algèbre de boole ; calcul des prédicats.* Paris : Masson.

Couturat, L. (1905). *L'algèbre de la logique.* Paris : Gauthier-Villars.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Descartes, R. (1991). *Discours de la méthode.* Paris : Édition établie et présentée par Frédéric de Buzon, Gallimard.

Dorier, J.-L. (1997). *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions.* Note de synthèse, Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(0), 5-31.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics IV*, 239–289.

Ducrot, O. (1966). Logique et linguistique. *Langages*, *1*(2), 3-30.

Ducrot, O. (1991). *Dire et ne pas dire : principes de sémantique linguistique.* Hermann.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, *50*, 57-79.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.* Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In A. Bronner et al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, actes de la 16ème École d'Été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. spécificité de l'analyse. quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(3), 295–342.

Durand-Guerrier, V., & Ben Kilani, I. (2004). Négation grammaticale versus négation logique dans lapprentissage des mathématiques. exemple dans lenseignement secondaire tunisien. *Les Cahiers du Français Contemporain*, *9*, 29-55.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37–65.

El Faqih, E. M. (1991). *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Epp, S. (1999). The language of quantification in mathematics instruction. In L. Stiff & R. Curio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (p. 188-197). National Council of Teachers of Mathematics.

Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques.* Traduction et introduction de C. Imbert. Éditions du Seuil.

Frege, G. (1999). *Idéographie.* Paris : Traduction, préface, notes et index par Corine Besson, Librairie Philosophique J.Vrin.

Freund, M. (2011). *Logique et raisonnement.* Paris : Ellipses Editions.

Gandit, M. (2004). Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : première partie. *Petit x*, *65*, 36-49.

Gandit, M., & Masse-Demongeot, M.-C. (2001). *Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée.* IREM de Grenoble.

Gentzen, G. (1955). *Recherches sur la déduction logique.* Paris : traduit de L'allemand par R. Feys et J. Ladriere. Presses Universitaires de France.

Gochet, P., & Gribomont, P. (1990). *Logique, méthodes pour l'nformatique fondamentale vol. 1.* Paris : Editions Hermès.

Grenier, D. (2009). Changer le rapport aux élèves en intégrant l'activité de recherche dans les classes. In L. Coulange & C. Hache (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* (pp. 161–178). ARDM et IREM de Paris.

Groupe Logique de l'IREM de Paris. (2014). Au collège comme au lycée : une activité sur les connecteurs ET et OU. *PLOT*, *45*, 13-17.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(2), 167–210.

Hache, C. (2013). Langage mathématique à la transition primaire/collège. In *Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève, actes du 39ème colloque de la Copirelem* (pp. 452–463). IREM de Brest.

Hache, C. (2014). Logique, langage, énoncés et preuves en mathématiques. In *21ème colloque de la Corfem, Grenoble.* (in press)

Hache, C., & Mesnil, Z. (2012). Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques. In M. Gandit & B. Grugeon-Allys (Eds.), *Corfem, actes des 18ème et 19ème colloques* (pp. 201–223). Université et IUFM de Franche-Comté.

Hanna, G., & De Villiers, M. (2011). *Proof and proving in mathematics education.* Springer.

Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *4*(2), 241–258.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de doctorat. Université scientifique et médicale institut national polytechnique de Grenoble.

Lacombe, D. (s. d.). *Cours de logique élémentaire et exercices.* Université Paris 7.

Lacombe, D. (2007). Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler. In *Séminaire de l'IREM de Paris.*

Largeault, J. (1970). *Logique et philosophie chez Frege.* Paris : Beatrice-Nauwelaerts.

Legrand, M. (1983). Les cosmonautes. compte rendu d'une recherche du groupe "apprentissage du raisonnement"de l'IREM de Grenoble. *Petit x*(1), 57-73.

Leibniz, G. W. (1998). *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités. 24 thèses métaphysiques et autres textes logiques et métaphysiques.* Paris : Introduction et notes par J.B Rauzy, Presses Universitaires de France.

Le Mignot, A. (2011). Avant et après boole, l'émergence de la logique moderne. 2 - la percée due à boole. *CultureMATH*.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 89–102). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Radford, L. (1985). *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitements logiques : contributions à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Rakotovoavy, F. (1983). *Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques, de certains adjectifs marqueurs de variance.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Ravel, L. (2003). *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. exemple de l'arithmétique en terminale s spécialité mathématique.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourrier Grenoble.

Rebière, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner et al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, actes de la 16ème École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 219–232). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Rogalski, J., & Rogalski, M. (2004). Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *9*, 175-203.

Rogalski, J., & Samurçay, R. (1994). Modélisation dun savoir de référence et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. In G. Arsac, Y. Chevallard, J. Martinand, & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35–71). Grenoble : la Pensée Sauvage.

Rogalski, M. (2007). Gustave Choquet et l'enseignement des mathématiques à luniversité. *La Gazette des mathématiciens 111*, 77-83.

Selden, A., & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 123-151.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10*(2.3), 133–170.

Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (Ed.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation. actes du colloque GDM-2001.*

Vernant, D. (1993). *La philosophie mathématique de Bertrand Russell.* Paris : Vrin.

Vygotski, L. (1997). *Pensée et langage.* Paris : La Dispute.

Liste des manuels scolaires étudiés

Algèbre, 2e ACT, collection ALEPH'0, Classiques Hachette, 1969

Mathématique 2e CT, collection QUEYSANNE-REVUZ, Fernand Nathan, 1969

Mathématique, 2e A, V.LEPINARD, André Desvigne, 1969

Maths 2nd, collection Indice, BORDAS, 2009

Mathématiques 2nd, collection Hyperbole, NATHAN, 2010

2nd, collection Math'x, DIDER, 2010

Maths 2nd repères, HACHETTE EDUCATION, 2010

Math 2nd, Travailler en confiance, NATHAN, 2010

Odyssée mathématiques 2nd, HATIER, 2010

Transmath 2nd, NATHAN, 2010

Symbole maths 2nd, BELIN, 2010

Déclic, Mathématiques 2nd, HACHETTE EDUCATION, 2010

Maths 2nd , collection Pixel, BORDAS, 2010

Programmes et documents d’accompagnement étudiés

1957. Instructions complémentaires relatives à l’enseignement des mathématiques.

1960. Instructions du 19 juillet 1960. Programmes de mathématiques des classes de Seconde A’, C, M et M’.

1963. Note du 29 janvier 1963. Emploi de certains termes et de certains symboles dans l’exposé d’une question de mathématiques.

1965. Circulaire du 20 août 1965. Programme de mathématiques pour les classes de Seconde.

1969. Arrêté du 3 juillet 1969. Programme de mathématiques. Classes de Seconde.

1970. Instruction du 6 février 1970. Commentaire pour les programmes de mathématiques de la classe de Seconde.

1973. Arrêté du 30 mai 1973. Programme de mathématiques. Classes de Seconde.

1981. Arrêté du 26 janvier 1981. Programme de mathématiques. Classe de Seconde.

1990. Arrêté du 25 avril 1990. Programme de mathématiques. Classe de Seconde.

1999. BO du 12 août 1999. Programme de mathématiques. Classe de Seconde.

2000. Accompagnement des programmes. Mathématiques. Classe de Seconde.

2004. BO du 9 septembre 2004. Programme de mathématiques. Classe de Première de la série littéraire. Enseignement obligatoire au choix.

2008. BO du 28 août 2008. Programmes du collège. Programmes de l’enseignement de mathématiques.

2009. BO du 12 juillet 2009. Mathématiques. Classe de Seconde.

2009. Ressources pour la classe de Seconde. Notations et raisonnement mathématiques.

2009. Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège. Raisonnement et démonstration.

2010. BO du 30 septembre 2010. Mathématiques. Cycle terminal de la série économique et sociale et de la série littéraire. Classe de Première.

2010. BO du 30 septembre 2010. Mathématiques. Cycle terminal de la série scientifique. Classe de Première.

2011. BO du 13 octobre 2011. Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques de la série économique et sociale et de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série litteraire.

2011. BO du 13 octobre 2011. Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de Classe terminale de la série scientifique.

Articles des bulletins APMEP cités

Bulletin de l'APMEP n° 112, mars 1946.

M. Weber, *Axiomes et postulats en géométrie*, pp. 48-49.

Bulletin de l'APMEP n° 128, mars 1949.

G. Thovert, *L'Axiomatique dans l'enseignement*, pp. 112 à 114.

Bulletin de l'APMEP n° 165, décembre 1954.

M. Weber, *Les mathématiques et la réalité extérieure*, pp. 17 à 25.

Bulletin de l'APMEP n° 198, mars 1959.

L. Félix, *Quelques termes et symboles de plus en plus employés*, p. 234.

Bulletin de l'APMEP n° 217, octobre-novembre 1961.

Pair, *Une expérience d'enseignement de notions modernes*, pp. 29 à 35.

Bulletin de l'APMEP n° 217, octobre-novembre 1961.

J. Balibar, *Un exemple d'abstraction, de formalisme et de métathéorie. La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu avec les axiomes de la théorie des ensembles*, pp. 11 à 26.

Bulletin de l'APMEP n° 217, octobre-novembre 1961.

J. Balibar, *Matériaux pour un dictionnaire : Déduire*, pp. 39 à 42.

Bulletin de l'APMEP n° 217, octobre-novembre 1961.

J. Dixmier, J-L Aubrac, G. Walusinski, *A propos des quantificateurs* $\forall$ *et* $\exists$, pp. 35 à 37.

Bulletin de l'APMEP n° 222, avril 1962.

J. Balibar, *Un exemple d'abstraction, de formalisme et de métathéorie. La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu avec les axiomes de la théorie des ensembles*, pp. 155 à 164.

Bulletin de l'APMEP n° 231, mai-juin 1963.

G. Walunsinski, *Matériaux pour un dictionnaire : Implication*, pp. 399-400.

Bulletin de l'APMEP n° 239, avril-mai 1964. D. Lacombe, J. Chayé, A Gillet, A. Duval, *Les mots et les symboles*, pp. 343 à 358.

Bulletin de l'APMEP n° 240, juillet 1964.

D. Lacombe, *Les mots et les symboles*, pp. 449 à 458.

Bulletin de l'APMEP n° 241, octobre 1964.

D. Lacombe, C. Picard, *Les mots et les symboles*, pp. 53 à 58.

Bulletin de l'APMEP n° 251, janvier-février 1966.

A. Z. Krygowska, *Éléments de logique dans l'enseignement secondaire des mathématiques*, pp. 35 à 48.

Bulletin de l'APMEP n° 258, mai-septembre 1967.

Commission Lichnérowicz, *Rapport préliminaire de la commission ministérielle*, pp. 246 à 271.

Bulletin de l'APMEP n° 258, mai-septembre 1967.

M. Glaymann, *Fonctions caractéristiques des connecteurs*, pp. 165 à 176.

Bulletin de l'APMEP n° 260, janvier-février 1968.

M. Glaymann, *Introduction à la logique*, pp. 7 à 23.

Bulletin de l'APMEP n° 261, mars-avril 1968.

L. Schwartz, *Le modèle d'une théorie des ensembles*, pp. 87 à 94.

Bulletin de l'APMEP n° 292, février 1974.

M. Carmagnole, *Insertion de la logique dans l'enseignement élémentaire*, pp. 51 à 57.

Bulletin de l'APMEP n° 300, septembre 1975.

Groupe de recherche pédagogique en Sixième-Cinquième de l'IREM de Bordeaux, *Des simulateurs logiques en classe de Sixième*, pp. 441 à 449.

Bulletin de l'APMEP n° 301, Décembre 1975

J. Adda, *Une manière d'intégrer des éléments de logique dans l'enseignement des mathématiques en classe de Sixième*, pp. 755 à 759.

Bulletin de l'APMEP n° 323, Avril 1980

Dossier Second Cycle, pp. 261 à 368.

Annexe A

Quelques notions de logique mathématique

Je présente ici certaines notions de logique mathématique auxquelles je me réfère dans cette thèse. Je m'inspire du livre *Logique mathématique, tome 1, Calcul propositionnel, algèbres de Boole, calcul des prédicats* de René Cori et Daniel Lascar (Cori & Lascar, 1993).

D. Lacombe, dans un séance du séminaire de l'IREM de Paris, décrit le lien entre logique mathématique et mathématiques en l'associant à la notion, bien connue aujourd'hui, de modélisation :

> La logique mathématique c'est une branche des mathématiques, une branche des mathématiques appliquées, mais appliquées à quoi ? Appliquées aux mathématiques. Ce qui donne à la logique mathématique dès le début cet aspect circulaire, de serpent se mordant la queue, qui en fait, fait son charme. Mais ceci étant dit, ça n'est pas si paradoxal que ça, il suffit de considérer quelque chose qui est tout à fait connu maintenant, c'est la notion de modèle mathématique. [...] Les objets qui constituent le modèle mathématique ne sont pas du tout ceux qui constituent le domaine qu'on veut modéliser [...] [Pour la logique mathématique] le domaine extra mathématique qu'il s'agit de modéliser c'est ce qu'on appelle quelquefois la métamathématique, il vaudrait mieux dire la métamathématique naïve, qui s'occupe non pas des objets mathématiques mais de ce qu'on fait lorsqu'on traite des objets mathématiques, ce qui n'est pas du tout la même chose. (Lacombe, 2007)

Comme toute modélisation, la logique mathématique participe donc à mon sens à la compréhension de ce qu'elle modélise, c'est-à-dire que la logique mathématique aide à comprendre ce que nous faisons quand nous faisons des mathématiques, et notamment ce que j'ai appelé *la logique des mathématiques* (voir page 13). C'est bien dans ce sens qu'elle est utile dans l'enseignement des mathématiques, et pour les professeurs et pour les élèves. Faire de la logique mathématique nécessite alors doublement une bonne pratique des mathématiques, d'une part parce que c'est un domaine des mathématiques qui, dans son aspect formel et abstrait, est difficile (bien sûr, le calcul propositionnel ne se limite pas aux tables de vérité !), et d'autre part parce qu'une bonne connaissance de ce qui est modélisé, c'est-à-dire des mathématiques, est nécessaire.

A.1 Syntaxe et sémantique du calcul propositionnel

En logique mathématique, on appelle formules propositionnelles (ou propositions) certaines des suites finies constituées avec les éléments d'un ensemble P de variables propositionnelles, les symboles de connecteurs propositionnels et les parenthèses. En voici une définition plus précise :

<u>Définition :</u> L'ensemble des formules propositionnelles construites sur P est le plus petit sous-ensemble de l'ensemble des mots (un mot est une suite finie de symboles) formés sur l'alphabet décrit précédemment qui :
– contient P
– chaque fois qu'il contient un mot F, contient aussi le mot $\neg F$
– chaque fois qu'il contient des mots F et G, contient aussi les mots : $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$ et $(F \Leftrightarrow G)$ (Cori & Lascar, 1993, p. 18)

Dans leur cours, les auteurs choisissent d'utiliser les connecteurs NON ($\neg$), ET ($\wedge$), OU ($\vee$), IMPLIQUE ($\Rightarrow$) et ÉQUIVAUT À ($\Leftrightarrow$), ainsi que les parenthèses. Ce choix n'est pas le seul possible. Toutes les formules propositionnelles peuvent s'écrire par exemple seulement avec le connecteur NON et l'un des connecteurs ET, OU ou IMPLIQUE (par exemple dans son *Idéographie*, Frege n'utilise que NON et IMPLIQUE, il privilégie le fait d'avoir un langage minimal [1], là où les auteurs du Cori-Lascar font le choix d'une redondance volontaire et utilisent les 5 connecteurs couramment utilisés dans l'activité mathématique). D'où une difficulté bien connue dans un cours de logique mathématique que soulignent R.Cori et D.Lascar :

> certains mots et certains symboles utilisés dans le langage mathématique courant (que nous appelons le métalangage) apparaissent aussi dans les divers langages formels qui seront parmi les principaux objets de notre étude. (Cori & Lascar, 1993, p. 18)

Dans les résultats importants qui se démontrent en restant au niveau syntaxique, nous pourrons retenir :

(1) la justification de la démonstration par induction sur l'ensemble des formules :

> Considérons une propriété $\mathcal{P}(F)$ qui concerne les formules, et supposons d'une part que $\mathcal{P}(F)$ soit vraie pour toute formule F de P, et d'autre part

1. Il est même possible d'écrire toutes les formules avec un seul connecteur : le connecteur NAND ((A NAND B) équivaut à NON(P ET Q)) ou le connecteur NOR ((A NOR B) équivaut à NON(P OU Q)).

que, quelles que soient les formules F et G, si $\mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(G)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(\neg F)$, $\mathcal{P}(F \wedge G)$, $\mathcal{P}(F \vee G)$, $\mathcal{P}(F \Rightarrow G)$, $\mathcal{P}(F \Leftrightarrow G)$ sont vraies également. Alors $\mathcal{P}(F)$ est vraie pour toute formule F.

(2) le théorème de lecture unique :

Pour toute formule F, un et un seul des trois cas suivants se présente :
- F appartient à P
- il existe une unique formule G telle que F=NON G
- il existe un unique symbole de connecteur binaire α et un unique couple de formules (G, H) tels que $F = (G\alpha H)$

(3) le **principe de substitution** qui consiste à remplacer, dans une formule, en chacune de ses occurrences une variable propositionnelle par une formule donnée. Le mot ainsi obtenu est toujours une formule.

La sémantique du calcul propositionnel est fondée sur la notion de valeur de vérité. Les notions de vrai et de faux sont modélisées par un ensemble à deux éléments, ici l'ensemble $\{0, 1\}$. Les variables propositionnelles « prennent leur valeurs » dans cet ensemble, d'où la notion de **distribution de valeurs de vérité** : c'est une application de P dans l'ensemble $\{0, 1\}$; elle attribue donc à chaque variable propositionnelle une valeur « vrai » ou « faux ». Cette application se prolonge alors par induction de manière unique à l'ensemble des formules, d'une façon définie par les tables de vérité. C'est-à-dire que pour chaque connecteur, par exemple un connecteur binaire α, la valeur de vérité d'une formule $F\alpha G$ dépend uniquement de la valeur de vérité de ses composantes F et G. Voici les tables de vérités des connecteurs NON, ET, OU, IMPLIQUE et ÉQUIVAUT À :

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Deux notions très importantes suivent ces définitions :
- Définition : une formule est une **tautologie** si elle prend la valeur 1 pour toute distribution de valeurs de vérité
- Définition : deux formules propositionnelles sont **logiquement équivalentes** si elles prennent la même valeur de vérité pour toute distribution de valeurs de vérité

Lorsque l'on procède à une substitution dans une tautologie (respectivement dans deux formules logiquement équivalentes), on obtient une tautologie (respectivement deux formules logiquement équivalentes). Les démonstrations d'un certains nombres d'équivalence logiques font partie des gammes de l'étudiant en logique mathématique, citons par exemple :

- $(A \Rightarrow B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A \vee B)$, ainsi qu'à $(\neg B \Rightarrow \neg A)$, ou de manière moins connue à $((A \wedge B) \Leftrightarrow A)$ et $((A \vee B) \Leftrightarrow B)$
- $(A \Leftrightarrow B)$ est logiquement équivalente à $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
- $\neg(A \wedge B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A \vee \neg B)$ et $\neg(A \vee B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A \wedge \neg B)$ (résultats connus sous le nom de **lois de Morgan**)
- $(A \vee (A \wedge B))$ et $(A \wedge (A \vee B))$ sont logiquement équivalentes à A (résultats connus sous le nom de **lois d'absorption**)
- des équivalences traduisant les propriétés de l'implication :
  - $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ est logiquement équivalente à $((A \wedge B) \Rightarrow C))$, et à $(B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  - $(A \Rightarrow (B \vee C))$ est logiquement équivalente à $((A \wedge \neg B) \Rightarrow C)$
  - $((A \vee B) \Rightarrow C)$ est logiquement équivalente à $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$

Ces équivalences logiques permettent des transformations syntaxiques des formules, dans le sens où elles permettent d'obtenir une formule logiquement équivalente à une formule donnée sans se soucier de la sémantique des connecteurs, et donc du sens de la formule.

A.2 Syntaxe et sémantique du calcul des prédicats

D'un point de vue mathématique, le calcul propositionnel est insuffisant pour modéliser les énoncés mathématiques, notamment parce que :

- ils ne sont vus que comme variables propositionnelles, c'est-à-dire à travers leur valeur de vérité, et non en fonction de ce qu'ils expriment des objets mathématiques,
- il y manque des éléments permettant la quantification, pratique incontournable en mathématiques.

Le langage des prédicats est « plus riche » que le langage propositionnel.

Définition : Un langage $\mathcal{L}$ du premier ordre est un ensemble de symboles qui se compose de deux parties :

- Une première partie commune à tous les langages comporte :
  - un ensemble infini dénombrable de symboles de variables,
  - les parenthèses et les symboles des connecteurs,
  - deux nouveaux symboles : le quantificateur universel $\forall$, et le quantificateur existentiel $\exists$,
- Une deuxième partie qui varie d'un langage à l'autre et qui est constituée :
  - d'un ensemble $\mathscr{C}$ de symboles de constantes,
  - d'un ensemble $\mathscr{F}$ de symboles de fonctions, chaque élément de $\mathscr{F}$ ayant une certaine arité [2],

2. Nombre d'arguments que requiert la fonction.

- d'un ensemble $\mathscr{R}$ de symboles de relations, chaque élément de $\mathscr{R}$ ayant une certaine arité.

On peut alors construire, selon la méthode inductive déjà utilisée pour le calcul propositionnel, une famille de mots que nous appellerons les formules du premier ordre associées à notre langage. Il faut pour cela d'abord définir, toujours inductivement, une autre famille de mots appelés **termes** :

> Notre but étant de décrire formellement certaines propriétés d'objets (ou individus) mathématiques, on peut intuitivement considérer que les termes vont servir de noms pour désigner ces individus, tandis que les formules seront des récits de faits les concernant. (Cori & Lascar, 1993, p. 141)

Définition : l'ensemble $\mathscr{T}(\mathcal{L})$ des termes du langage $\mathcal{L}$ est le plus petit sous-ensemble de l'ensemble des mots de $\mathcal{L}$ qui :
– contient les variables et les symboles de constante,
– pour chaque élément $f \in \mathscr{F}$ d'arité n, $\mathscr{T}(\mathcal{L})$ est stable pour l'opération $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mapsto fm_1m_1 \ldots m_n$ (c'est-à-dire que si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes, $ft_1t_2 \ldots t_n$ est un terme).

On définit ensuite deux « niveaux » de formules :

Définition :
– les formules atomiques sont les mots de la forme $Rt_1t_2 \ldots t_n$, où $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes et R est un symbole de relation n-aire,
– l'ensemble $\mathscr{F}(\mathcal{L})$ des formules du langage $\mathcal{L}$ est le plus petit sous-ensemble de l'ensemble des mots de $\mathcal{L}$ qui :
  – contient toutes les formules atomiques,
  – chaque fois qu'il contient deux mots M et N contient également les mots $\neg M$, $M \wedge N$, $M \vee N$, $M \Rightarrow N$, $M \Leftrightarrow N$ et pour toute variable v les mots $\forall v\, M$ et $\exists v\, M$.

Le théorème de lecture unique est bien sûr valable pour les formules du langage des prédicats, et on définit la notion de substitution d'un terme à une variable.

Je ne donnerai pas la définition précise de **variables libres** et **variables liées**, intuitivement, une occurrence d'une variable est liée si elle est dans la portée d'un quantificateur, elle est libre sinon. Une formule qui ne comporte aucune variable libre est une **formule close**.

Dans notre pratique mathématique, notre formalisation va très rarement jusqu'à l'utilisation de symboles de constantes, de fonctions, de relations (nous en sommes assez proches par exemple quand nous définissons ce qu'est un groupe, mais nous n'utilisons pas n'importe quel symbole pour la loi de composition interne, elle est généralement notée . ou + par exemple, en relation avec des groupes bien connus, mais rarement f). Ces symboles sont interprétés dans des structures mathématiques, et ce sont les symboles de ces interprétations que nous considérons. La sémantique du calcul des prédicats va donc consister à **interpréter** les symboles d'un langage $\mathcal{L}$ dans une structure mathématique, puis à définir la notion de **satisfaction d'une formule dans une structure** qui conduit à la notion de **modèle**.

Définition : Une réalisation du langage $\mathcal{L}$ est une structure $\mathscr{M}$ constituée de :

– un ensemble non vide M,

– pour chaque symbole de constante c de $\mathcal{L}$, un élément $\overline{c}^{\mathscr{M}}$ de M, appelé interprétation de c dans $\mathscr{M}$,

– pour chaque symbole de fonction f de $\mathcal{L}$ d'arité n, une application $\overline{f}^{\mathscr{M}}$ de M^n dans M, appelée interprétation de f dans $\mathscr{M}$,

– pour chaque symbole de relation R de $\mathcal{L}$ d'arité n, un sous-ensemble $\overline{R}^{\mathscr{M}}$ de M^n dans M, appelé interprétation de R dans $\mathscr{M}$.

Ces définitions nous amènent naturellement à définir l'interprétation d'un terme, $\overline{t}^{\mathscr{M}}$ (Cori & Lascar, 1993, p. 167-168) :

- dans le cas où f est un symbole de fonction binaire et c un symbole de constante, le terme $fcfcc$ sera interprété par l'élément de M : $\overline{f}^{\mathscr{M}}(\overline{c}^{\mathscr{M}}, \overline{f}^{\mathscr{M}}(\overline{c}^{\mathscr{M}}, \overline{c}^{\mathscr{M}}))$.
- dans le cas où f est un symbole de fonction unaire et x un symbole de variable, pour interpréter le terme fx, il faudra préalablement savoir quel objet désigne x. Ceci conduit à avoir pour le terme fx une interprétation qui dépend de l'interprétation donnée à x. Pour chaque élément a de M, nous dirons ainsi que l'interprétation du terme fx lorsque x est interprété par a est l'élément $\overline{f}^{\mathscr{M}}(a)$.

Voyons maintenant des exemples d'interprétations de formules. On peut écrire les axiomes de groupe dans un langage $\mathcal{L}_G$ contenant le symbole d'égalité et un symbole de fonction f binaire et un symbole de constante e :

$\forall a \, \forall b \, \forall c \quad ffabc = fafbc$

$\forall a \quad fea = fae = a$

$\forall a \, \exists b \quad fab = fba = e$

Ces formules peuvent être interprétées dans les structures $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, +, 1 \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \times, 1 \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \times, 1 \rangle$ qui sont ou ne sont pas des groupes. On obtient donc par exemple les propositions suivantes qu'on trouve dans les manuels de mathématiques :

- Interprétation dans la structure $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$:

  $\forall a \, \forall b \, \forall c \quad (a + b) + c = a + (b + c)$

  $\forall a \quad 0 + a = a + 0 = a$

  $\forall a \, \exists b \quad a + b = b + a = 0$

  Les trois propositions sont vraies, on dira que $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ est un groupe.
- Interprétation dans la structure $\langle \mathbb{Z}, \times, 1 \rangle$:

  $\forall a \, \forall b \, \forall c \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

  $\forall a \quad 1 \times a = a \times 1 = a$

  $\forall a \, \exists b \quad a \times b = b \times a = 1$

  La troisième proposition n'est pas vraie, on dira que $\langle \mathbb{Z}, \times, 1 \rangle$ n'est pas un groupe.

Nous dirons plus précisément que la troisième proposition est satisfaite dans la structure $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ mais pas dans la structure $\langle \mathbb{Z}, \times, 1 \rangle$. La notion de satisfaction est définie de manière inductive [3] :

Définition : On dit que la formule (close) F est satisfaite dans la structure $\mathscr{M}$, ou que $\mathscr{M}$ est un modèle de F, et on note $\mathscr{M} \models F$ lorsque :

- Dans le cas où F est la formule atomique $Rt_1t_2 \ldots t_n$:

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si } (\overline{t_1}^{\mathscr{M}}, \overline{t_2}^{\mathscr{M}}, \ldots, \overline{t_n}^{\mathscr{M}}) \in \overline{R}^{\mathscr{M}}$$

- Dans le cas où $F = \neg G$:

3. Je me limite ici à la satisfaction des formules closes. Ceci suppose d'ajouter au langage un symbole de constante pour chaque élément$a$ de M. Cet ajout permet que pour chaque élément a de M, la formule $G[a]$, obtenue en remplaçant les occurrences libres de x par a, soit une formule close. Cependant, cet ajout augmente l'ensemble des termes clos et des formules closes, et demande, pour être fait rigoureusement, de prendre des précautions dont je me dispense ici. Pour une définition plus générale de la satisfaction, se reporter au Cori-Lascar.

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si } \mathscr{M} \not\models G$$

– Dans le cas où $F = G \vee H$:

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si } \mathscr{M} \models G \text{ ou } \mathscr{M} \models H$$

– Dans le cas où $F = G \wedge H$:

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si } \mathscr{M} \models G \text{ et } \mathscr{M} \models H$$

– Dans le cas où $F = G \Rightarrow H$:

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si } \mathscr{M} \not\models G \text{ ou } \mathscr{M} \models H$$

– Dans le cas où $F = G \Leftrightarrow H$:

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si } (\mathscr{M} \models G \text{ et } \mathscr{M} \models H) \text{ ou } (\mathscr{M} \not\models G \text{ et } \mathscr{M} \not\models H)$$

– Dans le cas où $F = \forall x\, G$ ou $F = \exists x\, G$ (x n'est pas une variable libre de G) :

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si } \mathscr{M} \models G$$

– Dans le cas où $F = \forall x\, G[x]$ (x est une variable libre de G) :

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si quel que soit l'élément } a \text{ de } M,\ \mathscr{M} \models G[a]$$

– Dans le cas où $F = \exists x\, G[x]$ (x est une variable libre de G) :

$$\mathscr{M} \models F \text{ si et seulement si pour au moins un élément } a \text{ de } M,\ \mathscr{M} \models G[a]$$

Cette définition de la notion de modèle est due à A. Tarski (logicien et philosophe polonais, 1902-1983). Une utilisation de ces notions pour l'étude didactique est présentée notamment dans l'habilitation à diriger des recherches de Viviane Durand-Guerrier (Durand-Guerrier, 2005).

Cette définition permet de donner les définitions suivantes :

Définition : On se donne un langage $\mathcal{L}$:

– Une formule close F est **universellement valide** si elle est satisfaite dans toute interprétation de $\mathcal{L}$.
– Deux formules closes F et G sont **logiquement équivalentes** si et seulement si la formule $F \Leftrightarrow G$ est universellement valide.
– Une **théorie** T est un ensemble de formules closes, et on dit qu'une structure $\mathscr{M}$ est un modèle de T si et seulement si $\mathscr{M}$ satisfait chaque formule appartenant à T.
– Une formule close F est **conséquence sémantique** d'une théorie T si tout modèle de T est aussi modèle de F. On note $T \vdash^* F$
– Une théorie T est **complète** si :
  bullet elle a au moins un modèle : on dit qu'elle est **consistante**,
  bullet pour toute formule close F de L, on a soit $T \vdash^* F$ soit $T \vdash^* \neg F$

A.3 Preuves formelles

Je ne rentrerai pas dans le détail de l'exposition d'un système de déduction. Je me contente ici de présenter les preuves formelles comme des suites de formules dont la succession est agencée par des règles de preuves qui ne portent que sur la forme des formules.

On peut alors donner la définition suivante, qui n'est pas tout à fait rigoureuse puisque l'appellation « règle de déduction » n'a pas vraiment été définie ; et qui relève d'un choix dans la modélisation des démonstrations (la déduction naturelle étudiée dans le chapitre est un autre choix possible) :

Définition : Une **démonstration formelle** d'une formule F dans une théorie T est une suite finie $\mathscr{D} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ se terminant par F et qui est telle que chaque F_i satisfait au moins l'une des conditions suivantes :

- F_i appartient à T ou est un axiome faisant partie d'un ensemble d'axiomes préalablement fixé.
- F_i se déduit de formules qui la précèdent par l'application d'une des règles de déduction.

S'il existe une preuve formelle de F dans T, on dit que F **est démontrable dans** T ou que F est **conséquence syntaxique de** T, et on écrit $T \vdash F$.

A.4 Complétude et incomplétude

Je terminerai en évoquant brièvement non pas le théorème de Gödel, mais les théorèmes de Gödel. Il a démontré le premier, le **théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre**, dans sa thèse en 1930. Il relie les notions de conséquence sémantique et de conséquence syntaxique. J'en donnerai la formulation suivante :

Théorème Soit T une théorie d'un langage $\mathcal{L}$ du premier ordre et F une formule close de ce langage, alors F est vraie dans tout modèle de T si et seulement si F est démontrable dans T.

En fait, le sens « si » n'est pas très étonnant : quand on construit un système de déduction, la moindre des choses qu'on attend c'est que les formules qu'il permet de prouver soient vraies. C'est donc le sens « seulement si » qui est un résultat important. À la suite de ce théorème, on peut donc identifier les deux notions de conséquence sémantique et de conséquence syntaxique, et parler simplement de conséquence logique (cette notion est également explicitée dans l'habilitation à diriger des recherches de Viviane Durand-Guerrier, 2005).

Ce théorème de complétude peut paraître en contradiction avec celui dit d'incomplétude, si on pense à une version vulgarisée erronée de celui-ci qui dirait qu'il existe des propositions vraies non démontrables.

Voyons ce que dit le **Théorème d'incomplétude**, également dû à Gödel, qui date de 1931 :

Théorème Toute théorie récursive et cohérente T du langage de l'arithmétique qui contient les formules de l'arithmétique de Peano est incomplète [4], c'est-à-dire qu'il existe une formule close F telle que l'on n'ait ni $T \vdash F$, ni $T \vdash \neg F$.

4. Pour des définitions de *récursive*, *cohérente*, *arithmétique de Peano*, voir le Cori-Lascar Tome II.

Par le théorème de complétude, on sait que si une formule G est vraie dans tous les modèles d'une telle théorie T, alors $T \vdash G$. La formule F dont il est question ici est donc vraie dans au moins un modèle de T, et fausse dans au moins un autre.
Ce que dit donc le théorème d'incomplétude de Gödel, c'est qu'il est possible qu'il existe des formules vraies dans le modèle standard de l'arithmétique, « celui dans lequel nous travaillons », qui ne sont pas démontrables. Cela met donc fin au rêve de pouvoir démontrer tout ce qui est vrai **dans notre univers mathématique**.

Annexe B

Extraits de l'*Organon* d'Aristote

B.1 Extraits de *Catégories*

Je propose ici quelques extraits de la traduction de J. Tricot (collection *Bibliothèque des textes philosophiques* de la *Librairie Philosophique J. Vrin*, 2008), (Aristote, 2008)

Sur les catégories :

Les Catégories

Les expressions sans aucune liaison signifient la substance, la quantité, la qualité, la relation, le lieu, le temps, la position, la possession, l'action, la passion. Est substance, pour le dire en un mot, par exemple, *homme, cheval* ; quantité, par exemple, *long-de-deux-coudées, long-de-trois-coudées* ; qualité : *blanc, grammairien* ; relation : *double, moitié, plus grand* ; lieu : *dans le lycée, au Forum* ; temps : *hier, l'an dernier* ; position : *il est couché, il est assis* ; possession : *il est chaussé, il est armé* ; action : *il coupe, il brûle* ; passion : *il est coupé, il est brûlé.*

Aucun de ces termes en lui-même et par lui-même n'affirme ni ne nie rien ; c'est seulement par la liaison de ces termes entre eux que se produit l'affirmation ou la négation. En effet, toute affirmation et toute négation est, semble-t-il bien, vraie ou fausse, tandis que pour des expressions sans aucune liaison il n'y a ni vrai ni faux : par exemple, *homme, blanc, court, est vainqueur.* pp. 21-22

B.2 Extraits de *De l'Interprétation*

Je propose ici quelques extraits de la traduction de J. Tricot (collection *Bibliothèque des textes philosophiques* de la *Librairie Philosophique J. Vrin*, 2008), (Aristote, 2008)

Sur les propositions :

Tout discours a une signification, non pas toutefois comme un instrument naturel, mais ainsi que nous l'avons dit, par convention. Pourtant, tout discours n'est pas une proposition, mais seulement le discours dans lequel réside le vrai ou le faux, ce qui n'arrive pas dans tous les cas : ainsi la prière est un discours, mais elle n'est ni vraie ni fausse. Laissons de côté les autres genres de discours : leur examen est plutôt l'œuvre de la Rhétorique ou de la Poétique. C'est la proposition que nous avons à considérer pour le moment. p. 95

Sur l'opposition des propositions :

L'opposition que j'appelle *de contradiction* est donc celle d'une affirmation exprimant un sujet universel pris universellement à une négation exprimant le même sujet non pris universellement.
Par exemple :
Tout homme est blanc. - Quelque homme n'est pas blanc.
Nul homme n'est blanc. - Quelque homme est blanc.
L'opposition de *de contrariété* est celle de l'affirmation d'un sujet universel à la négation d'un sujet universel.
Par exemple :
Tout homme est blanc. - Nul homme n'est blanc.
Tout homme est juste. - Nul homme n'est juste.
On voit que ces dernières propositions ne peuvent être vraies en même temps, tandis que leurs opposées peuvent parfois être vraies en même temps du même sujet : par exemple, *quelque homme n'est pas blanc* et *quelque homme est blanc*. - Dans tout couple de contradictoires portant sur des universels et prises universellement, l'une est ainsi nécessairement vraie, et l'autre nécessairement fausse. Et c'est aussi le cas de celles qui portent sur le singulier : par exemple, *Socrate est blanc*, *Socrate n'est pas blanc*. - Mais pour les propositions qui, tout en portant sur des universels, ne sont pas prises universellement, on ne peut pas toujours dire que l'une soit vraie et l'autre fausse ; en effet, il est vrai de dire à la fois que l'homme est blanc et que l'homme n'est pas blanc [. . .] On pourrait penser à première vue que c'est là une absurdité, en raison de ce que la proposition *l'homme n'est pas blanc* semble bien signifier en même temps *nul homme n'est blanc*. Pourtant ces propositions ni ne signifient la même chose, ni ne sont nécessairement en même temps vraies ou fausses. pp. 101 à 103

B.3 Extraits de *Premiers analytiques*

Je propose ici quelques extraits de la traduction de J. Tricot (collection *Bibliothèque des textes philosophiques* de la *Librairie Philosophique J. Vrin*, 2007), (Aristote, 2007).

Sur les syllogismes dialectiques et les syllogismes démonstratifs :

La prémisse démonstrative diffère de la prémisse dialectique en ce que, dans la prémisse démonstrative, on prend l'une des deux parties de la contradiction (car démontrer, ce n'est pas demander, c'est poser), tandis que, dans la prémisse dialectique, on demande à l'adversaire de choisir entre les deux parties de la contradiction. mais il n'y a aucune différence en ce qui concerne la production même du syllogisme dans l'un et dans l'autre cas : en effet, qu'on démontre ou qu'on interroge, on construit le syllogisme en posant que quelque chose appartient ou n'appartient pas à une autre chose. Il en résulte qu'une prémisse syllogistique prise en général sera l'affirmation ou la négation de quelque chose au sujet de quelque chose, de la façon que nous venons de dire ; elle est démonstrative si elle est vraie et obtenue au moyen des principes posés primitivement, tandis que, dans la prémisse dialectique, celui qui interroge demande à l'adversaire de choisir l'une des deux parties d'une contradiction, mais dès qu'il syllogise il pose une assertion portant sur l'apparence et le probable, ainsi que nous l'avons expliqué dans les *Topiques*. pp. 17-18

Sur la conversion des propositions :

[Par suite,] dans l'attribution pure universelle, les termes de la prémisse négative sont nécessairement convertibles : par exemple si nul plaisir n'est un bien, aucun bien ne sera non plus un plaisir. Par contre, dans la prémisse affirmative, la conversion, tout en étant nécessaire, ne l'est cependant pas universellement mais particulièrement : par exemple, si tout plaisir est un bien, quelque bien est aussi un plaisir. Dans le cas des propositions particulières, l'affirmative se convertit nécessairement et particulièrement (car si quelque plaisir est un bien, quelque bien sera aussi un plaisir), tandis que, pour la négative, il n'y a pas nécessité de conversion : si *homme* n'appartient pas à quelque *animal*, il ne s'ensuit pas qu'*animal* n'appartienne pas à quelque *homme*. pp. 21-22

Sur les syllogismes catégoriques de la première figure :

Quand trois termes sont entre eux dans des rapports tels que le mineur soit contenu dans la totalité du moyen, et le moyen contenu, ou non contenu, dans la totalité du majeur, alors il y a nécessairement entre les extrêmes syllogisme parfait. J'appelle *moyen* le terme qui est lui-même contenu dans un autre terme et contient un autre terme en lui, et qui occupe aussi une position intermédiaire ; j'appelle *extrêmes* à la fois le terme qui est lui-même contenu dans un autre, et le terme dans lequel un autre est contenu. Si A est affirmé de tout B, et B de tout Γ, nécessairement A est affirmé de tout Γ [1]. Nous avons indiqué plus haut ce que nous entendons par *affirmé de tout*. De même, si A n'est

1. Premier mode concluant, en *Barbara* : « Tout B est A, Tout Γ est B, Tout Γ est A ».

affirmé de nul B, et si B est affirmé de tout Γ, il en résulte que A n'appartiendra à nul Γ [2].

Si le majeur appartient au moyen pris universellement, mais que le moyen n'appartienne pas au mineur pris universellement [3], il n'y aura pas de syllogisme des extrêmes, car rien ne résulte nécessairement de ces données. Il est possible, en effet, que le majeur appartienne ou n'appartienne pas au mineur pris universellement, de sorte que ni une conclusion particulière, ni une conclusion universelle n'en découle nécessairement. Or en l'absence de conclusion nécessaire, ces prémisses ne peuvent produire de syllogisme. Comme termes d'attribution universelle prenons par exemple, *animal*, *homme*, *cheval* ; et de non-attribution universelle, *animal*, *homme*, *pierre* [4]. Pas davantage, quand ni le majeur n'appartient au moyen pris universellement, ni le moyen au mineur pris universellement [5], il n'y aura de cette façon de syllogisme.Termes d'attribution : *science, ligne, art médical* ; de non-attribution : *science, ligne, unité* [6].

Quand donc on se trouve en présence de termes universels, il est clair que, dans cette figure, tantôt il n'y aura pas de syllogisme ; que, s'il y a syllogisme, les termes devront nécessairement se comporter comme nous l'avons indiqué, et que, inversement, s'ils se comportent de cette façon, il y aura syllogisme.

Mais supposons que l'un des termes soit rapporté universellement à son sujet, et l'autre particulièrement. Quand l'universel se rapporte au grand extrême, soit affirmativement, soit négativement, et que le particulier se rapporte au petit extrême affirmativement [7], on a nécessairement un syllogisme parfait. Par contre, quand l'universel se rapporte au petit extrême [8]ou que les termes sont entre eux dans un tout autre rapport, il est impossible qu'il y ait syllogisme. J'appelle *grand extrême* celui dans lequel le moyen est contenu, et *petit extrême* celui que est subordonné au moyen. Soit donc A appartenant à tout B, et B à quelque Γ. Si *être affirmé de tout* signifie ce que nous avons dit au début, nécessairement A appartient à quelque Γ [9]. Et si A n'appartient à nul B, et que B appartienne à quelque Γ, nécessairement A n'appartient pas à quelque Γ [10], ce qui est conforme à notre définition de *n'être attribué à aucun.* Il y aura ainsi syllogisme parfait.

2. Deuxième mode concluant, en *Celarent* : « Nul B n'est A, Tout Γ est B, Nul Γ n'est A ».
3. Majeure universelle affirmative, « Tout B est A », mineure universelle négative, « Nul Γ n'est B ».
4. D'une manière générale, Aristote élimine les modes non-concluants en montrant, par des exemples simplement ébauchés, qu'ils aboutissent, en partant de prémisses vraies, à des conclusions accidentelles, indifféremment affirmatives ou négatives : tout dépend des exemples choisis. Il ébauche ici successivement les exemples : « Tout homme est animal, Aucun cheval n'est homme, Tout cheval est animal » et « Tout homme est animal, Aucune pierre n'est homme, Aucune pierre n'est animal ».
5. Majeure universelle négative, « Nul B n'est A », mineure universelle négative, « Nul Γ n'est B ».
6. Aristote ébauche les exemples : « Nulle ligne n'est science, Nulle médecine n'est ligne, Toute médecine est science » et « Nulle ligne n'est science, Nulle unité n'est ligne, Nulle unité n'est science »
7. Majeure universelle affirmative ou négative, mineure particulière affirmative.
8. Majeure particulière et mineure universelle.
9. Troisième mode concluant, en *Darii* : « Tout B est A, Quelque Γ est B, Quelque Γ est A ».
10. Quatrième mode concluant, en *Ferio* : « Nul B n'est A, Quelque Γ est B, Quelque Γ n'est pas A ».

Même solution si la prémisse $B\Gamma$ [11] est indéfinie [12], pourvu qu'elle soit affirmative : ce sera, en effet, le même syllogisme, que la prémisse soit indéfinie ou particulière.

Mais si l'universel se rapporte au petit extrême, soit affirmativement soit négativement, il n'y aura pas de syllogisme, que la majeure soit affirmative, négative, indéfinie ou particulière : par exemple, si A appartient ou n'appartient pas à quelque B, et que B appartienne à tout Γ [13]. Termes d'attribution : *bon, état, prudence* ; de non-attribution : *bon, état, ignorance* [14]. Si, d'autre part, B n'appartient à nul Γ, et si A appartient à quelque B, ou ne lui appartient pas, ou n'appartient pas à tout B [15], il ne peut pas de cette façon non plus y avoir de syllogisme. Exemples de termes : *blanc, cheval, cygne* ; *blanc, cheval, corbeau* [16]. Les mêmes termes peuvent encore servir si la prémisse AB [17] est indéfinie.

Pas davantage il n'y aura syllogisme quand l'universel se rapporte au grand extrême, soit affirmativement soit négativement [18], et que le particulier se rapporte au petit extrême négativement, que cette mineure soit indéfinie ou particulière [19] : si, par exemple, A appartient à tout B, et si B n'appartient pas à quelque Γ ou s'il n'appartient pas à tout Γ. C'est qu'en effet, le majeur sera affirmé ou non affirmé de la totalité du mineur, terme auquel, pris particulièrement, le moyen ne peut appartenir. Prenons comme termes : *animal, homme blanc* ; ensuite, parmi les choses blanches dont l'homme n'est pas affirmé, choisissons *cygne* et *neige* : *animal* est affirmé de la totalité de l'un et nié de la totalité de l'autre, de sorte qu'il n'y aura pas de syllogisme [20]. Admettons maintenant que A n'appartienne à nul B et que B n'appartienne pas à quelque Γ [21], et prenons comme termes : *inanimé, homme, blanc* ; prenons ensuite, parmi les choses blanches dont l'homme n'est pas affirmé, *cygne* et *neige. Inanimé* est affirmé de la totalité de l'un et nié de la totalité de l'autre [22]. En outre, puisque c'est une expression indéfinie que de dire que B n'appartient pas à quelque Γ, (et il est vrai que, soit que

11. Aristote note ainsi la mineure.
12. Aristote appelle indéfinie une proposition dans laquelle l'attribution ou la non-attribution est faite sans indication d'universalité ou de particularité, par exemple *le plaisir n'est pas le bien.*
13. Majeure particulière affirmative ou négative, mineure universelle affirmative.
14. Aristote ébauche les exemples : « Quelque état est bon ou Quelque état n'est pas bon, Toute prudence est un état, Toute prudence est bonne » et « Quelque état est bon ou Quelque état n'est pas bon, Toute ignorance est un état, Nulle ignorance n'est bonne ».
15. Majeure particulière affirmative ou négative, mineure universelle négative.
16. Aristote ébauche les exemples : « Quelque cheval est blanc ou Quelque cheval n'est pas blanc, Nul cygne n'est cheval, Tout cygne est blanc » et « Quelque cheval est blanc ou Quelque cheval n'est pas blanc, Nul corbeau n'est cheval, Nul corbeau n'est blanc »
17. La majeure
18. Majeure universelle
19. Mineure particulière ou indéfinie négative.
20. La démonstration qu'Aristote propose ici se fait par le procédé nommé *ecthèse* : les notions de *cygne* et de *neige* vont être séparées de la notion de *blanc* qui les enveloppe. Aristote ébauche les exemples : « Tout homme est animal, Quelque blanc (le cygne) n'est pas homme, Tout cygne est animal » et « Tout homme est animal, Quelque blanc (la neige) n'est pas homme, Nulle neige n'est animal ».
21. Majeure universelle négative, mineure particulière négative.
22. Encore une démonstration utilisant le procédé d'*ecthèse.* Aristote ébauche les exemples : « Nul homme n'est inanimé, Quelque blanc (la neige) n'est pas homme, Toute neige est inanimée » et « Nul homme n'est inanimé, Quelque blanc (le cygne) n'est pas homme, Nul cygne n'est inanimé ».

B n'appartienne à aucun Γ, ou que B n'appartienne pas à tout Γ, de toute façon B n'appartient pas à quelque Γ), et puisque, si des termes de ce genre sont pris de telle façon que B n'appartienne à aucun Γ, aucun syllogisme ne se forme (ainsi que nous l'avons indiqué plus haut) ; il est dès lors manifeste que d'un pareil rapport de termes ne sortira pas de syllogisme : autrement, il y aurait syllogisme également dans l'autre cas [23]. Une semblable démonstration peut aussi être donnée si on pose une prémisse universelle négative.

Il ne pourra non plus y avoir d'aucune façon syllogisme quand les relations [du sujet et du prédicat] sont l'une et l'autre particulières, soit affirmativement, soit négativement ; ou si l'une est affirmative et l'autre négative ; ou encore l'une indéfinie, et l'autre définie ; ou enfin l'une et l'autre indéfinies. Exemples de termes communs à tous ces cas : *animal, blanc, cheval* ; *animal, blanc, pierre.*

Il résulte clairement de ce que nous venons de dire que, dans un syllogisme particulier de cette figure, les termes doivent être en rapports comme nous l'avons indiqué, autrement aucun syllogisme n'est possible. Il est évident aussi que tous les syllogismes rentrant dans cette figure sont parfaits (car tous reçoivent leur achèvement des prémisses originairement posées), et que toutes les conclusions peuvent être démontrées au moyen de cette figure, universelles aussi bien que particulières, affirmatives aussi bien que négatives. J'appelle une telle figure la *première.* pp. 27 à 36

Sur les syllogismes catégoriques de la deuxième figure :

Réduction à la première figure par conversion

Si les termes sont universels, il y aura syllogisme toutes les fois que le moyen appartient à un sujet pris universellement, et n'appartient pas à un autre sujet pris universellement, quel que soit celui des deux qui est négatif : autrement pas de syllogisme possible. Soit, en effet, le terme M, qui n'est affirmé de nul N, mais est affirmé de tout Ξ [24]. Puisque la négative est convertible, N n'appartiendra à nul M. Mais M était supposé appartenir à tout Ξ. En conséquence, N n'appartiendra à nul Ξ. Cela a déjà été démontré plus haut [25]. Si maintenant M appartient à tout N, mais n'appartient à nul Ξ [26], N n'appartiendra non plus à nul Ξ. Si, en effet, M n'appartient à nul Ξ, Ξ n'appartient non plus à nul M. Mais M, avons nous dit, appartient à tout N. Donc Ξ n'appartiendra à nul N

23. Aristote a précédemment montré que quand la majeure était universelle négative et la mineure universelle négative, il n'y avait pas syllogisme. Or, en raison de la qualité d'indéterminée de la particulière négative, on peut considérer cette dernière comme une partie de l'universelle négative : si donc celle-ci est impuissante à former un syllogisme, à plus forte raison en est-il de même de la particulière négative. Aristote utilisera à plusieurs reprises cette preuve.

24. Premier mode concluant de la deuxième figure, en *Cesare* : « Nul N n'est M, Tout Ξ est M, Nul Ξ n'est N ».

25. Second mode concluant de la première figure, *Celarent.*

26. Second mode concluant de la deuxième figure, en *Camestres* : « Tout N est M, Nul Ξ n'est M, Nul Ξ n'est N ».

car on retombe dans la première figure [27]. Mais puisque la négative est convertible, N n'appartiendra non plus à nul Ξ. Par suite, ce sera le même syllogisme. pp. 37-38

Réduction à l'absurde

Si maintenant M appartient à tout N, mais non à quelque Ξ, nécessairement N n'appartient pas à quelque Ξ [28]. Car si N appartient à tout Ξ [29], et si M est affirmé aussi de tout N, nécessairement M appartiendra à tout Ξ [30]. Or M était supposé ne pas appartenir à quelque Ξ. Et si M appartient à tout N, et non à quelque Ξ, il y aura syllogisme, concluant que N n'appartient pas à quelque Ξ. p. 42

27. Réduction à *Celarent* au moyen de la transposition des prémisses, et de la conversion de la mineure et de la conclusion.
28. Quatrième mode concluant de la deuxième figure, en *Baroco* : « Tout N est M, Quelque Ξ n'est pas M, Quelque Ξ n'est pas N ».
29. Contradictoire de la conclusion.
30. Syllogisme en *Barbara* de la première figure avec la même majeure et la contradictoire de la conclusion comme mineure.

Annexe C

Extraits de *La logique de Port-Royal*

Je propose ici quelques extraits de l'édition avec notes et postface de C. Jourdain (*Gallimard*, 1992), (Arnauld & Nicole, 1992).

C.1 Extraits de deux discours donnés en préambule

Extraits du premier discours

PREMIER DISCOURS.
Où l'on fait voir le dessein de cette nouvelle logique.

Ainsi, la principale application que l'on devrait avoir serait de former son jugement et de le rendre aussi exact qu'il le peut être ; et c'est à quoi devrait tendre la plus grande partie de nos études. On se sert de la raison comme d'un instrument pour acquérir les sciences, et l'on devrait se servir, au contraire, des sciences comme d'un instrument pour perfectionner sa raison ; la justesse de l'esprit étant infiniment plus considérable que toutes les connaissances spéculatives auxquelles on peut arriver par le moyen des sciences les plus véritables et les plus solides : ce qui doit porter les personnes sages à ne s'y engager qu'autant qu'elles peuvent servir à cette fin, et à n'en faire que l'essai et non l'emploi des forces de leur esprit. p. 9
Car il semble que les philosophes ordinaires ne soient guère appliqués qu'à donner des règles des bons et des mauvais raisonnements. Or, quoique l'on ne puisse pas dire que ces règles soient inutiles, puisqu'elles servent quelquefois à découvrir le défaut de certains arguments embarrassés, et à disposer ses pensées d'une manière plus convaincante, néanmoins on ne doit pas aussi croire que cette utilité s'étende bien loin, la plupart des erreurs des hommes ne consistant pas à se laisser tromper par de mauvaises conséquences, mais à se laisser aller à de faux jugements dont on tire de mauvaises conséquences. C'est à quoi ceux qui jusqu'ici ont traité de Logique ont peu cherché de

remèdes, et ce qui fait le principal sujet des nouvelles réflexions qu'on trouvera partout dans ce livre. p. 15
Quant à ce qu'on a tiré des livres ordinaires de la logique, voici ce qu'on y a observé :
Premièrement, on a eu dessein de renfermer dans celle-ci tout ce qui était véritablement utile dans les autres, comme les règles des figures, les divisions des termes et des idées, quelques réflexions sur les propositions. Il y avait d'autres choses que l'on jugeait assez inutiles, comme les catégories et les lieux ; mais parce qu'elles étaient courtes, faciles et communes, on n'a pas cru devoir les omettre, en avertissant néanmoins du jugement qu'on doit en faire, afin qu'on ne les crût pas plus utiles qu'elles ne sont.
On a été plus en doute sur certaines matières assez épineuses et peu utiles, comme les conversions des propositions, la démonstration des règles des figures, mais enfin on s'est résolu de ne pas les retrancher, la difficulté même n'en étant pas entièrement inutile. pp. 15-16
On n'a pas cru aussi devoir s'arrêter au dégoût de quelques personnes qui ont en horreur certains termes artificiels qu'on a formé pour retenir plus facilement les diverses manières de raisonner. p. 16
Il ne reste qu'à rendre raison pourquoi on a omis grand nombre de questions qu'on trouve dans les Logiques ordinaires, comme celles qu'on traite dans les prolégomènes, l'universel *a parte rei*, les relations et plusieurs autres semblables ; et sur cela il suffirait presque de répondre qu'elles appartiennent plutôt à la métaphysique qu'à la logique. p. 17
Il est bon aussi d'avertir qu'on s'est dispensé de suivre toujours les règles d'une méthode tout à fait exacte, ayant mis beaucoup de choses dans la quatrième partie qu'on aurait pu rapporter à la seconde et à la troisième ; mais on l'a fait à dessein, parce qu'on a jugé qu'il était utile de voir en un même lieu tout ce qui était nécessaire pour rendre une science parfaite ; ce qui est le plus grand ouvrage de la méthode dont on traite dans la quatrième partie : et c'est pour cette raison qu'on a réservé de parler en ce lieu-là des axiomes et des démonstrations. p. 19

Extraits du second discours

Second discours.

Contenant la réponse aux principales objections qu'on a faites contre cette logique.

Car l'expérience fait voir que sur mille jeunes gens qui apprennent la logique, il n'y en a pas dix qui en sachent quelque chose six mois après qu'ils ont achevé leur cours. Or, il semble que la véritable cause de cet oubli ou de cette négligence si commune, soit que toutes les matières que l'on traite dans la logique étant d'elles-mêmes très abstraites et très éloignées de l'usage, on les joint encore à des exemples peu agréables, et dont on ne parle jamais ailleurs ; et ainsi l'esprit, qui ne s'y attache qu'avec peine, n'a rien qui l'y

retienne attaché, et perd aisément toutes les idées qu'il en avait conçues, parce qu'elles ne sont jamais renouvelées par la pratique. [...]
On a donc cru que le meilleur remède de cet inconvénient était de ne pas tant séparer qu'on fait d'ordinaire la logique des autres sciences auxquelles elle est destinée, et de la joindre tellement, par le moyen des exemples, à des connaissances solides, que l'on vît en même temps les règles et la pratique ; afin que l'on apprît à juger de ces sciences par la logique, et que l'on retînt la logique par le moyen de ces sciences. p. 22

C.2 Préambule « Logique »

Logique

La logique est l'art de bien conduire sa raison dans la connaissance des choses, tant pour s'instruire soi-même que pour en instruire les autres.
Cet art consiste dans les réflexions que les hommes ont faites sur les quatre principales opérations de leur esprit, *concevoir, juger, raisonner* et *ordonner*.
On appelle *concevoir*, la simple vue que nous avons des choses qui se présentent à notre esprit, comme lorsque nous nous représentons un soleil, une terre, un arbre, un rond, un carré, la pensée, l'être, sans en former aucun jugement exprès ; et la forme par laquelle nous nous représentons ces choses s'appelle *idée*.
On appelle *juger*, l'action de notre esprit par laquelle, joignant ensemble diverses idées, il affirme de l'une qu'elle est l'autre, ou nie de l'une qu'elle soit l'autre, comme lorsqu'ayant l'idée de la terre et l'idée du rond, j'affirme de la terre qu'elle est ronde, ou je nie qu'elle soit ronde.
On appelle *raisonner*, l'action de notre esprit par laquelle il forme un jugement de plusieurs autres ; comme lorsque qu'ayant jugé que la véritable vertu doit être rapportée à Dieu, et que la vertu des païens ne lui était pas rapportée, il en conclut que la vertu des païens n'est pas une véritable vertu.
On appelle ici *ordonner*, l'action de notre esprit par laquelle, ayant sur un même sujet, comme sur le corps humain, diverses idées, divers jugements et divers raisonnements, il les dispose en la manière la plus propre pour faire connaître ce sujet. C'est ce qu'on appelle encore *méthode*.
Tout cela se fait naturellement, et quelquefois mieux par ceux qui n'ont appris aucune règle de la logique que par ceux qui les ont apprises.
Ainsi, cet art ne consiste pas à trouver le moyen de faire ces opérations, puisque la nature seule nous les fournit en nous donnant la raison ; mais à faire des réflexions sur ce que la nature nous fait faire, qui nous servent à trois choses.
La première est d'être assuré que nous usons bien de notre raison, parce que la considération de la règle nous y fait faire une nouvelle attention ;

La deuxième est de découvrir et d'expliquer plus facilement l'erreur ou le défaut qui peut se rencontrer dans les opérations de notre esprit ; car il arrive souvent que l'on découvre, par la seule lumière naturelle, qu'un raisonnement est faux, et qu'on ne découvre pas néanmoins la raison pourquoi il est faux, comme ceux qui ne savent pas la peinture peuvent être choqués du défaut d'un tableau, sans pouvoir néanmoins expliquer quel est ce défaut qui les choque ;

La troisième est de nous faire mieux connaître la nature de notre esprit par les réflexions que nous faisons sur ses actions ; ce qui est plus excellent en soi, quand on n'y regarderait que la seule spéculation, que la connaissance de toutes les choses corporelles, qui sont infiniment en-dessous des spirituelles.

Que si les réflexions que nous faisons sur nos pensées n'avaient jamais regardé que nous-mêmes, il aurait suffi de les considérer en elles-mêmes, sans les revêtir d'aucunes paroles ni d'aucuns signes ; mais parce que nous ne pouvons faire entendre nos pensées les uns aux autres qu'en les accompagnant de signes extérieurs, et que même cette accoutumance est si forte, que quand nous pensons seuls, les choses ne se présentent à notre esprit qu'avec les mots dont nous avons accoutumé de les revêtir en parlant aux autres, il est nécessaire dans la logique de considérer les idées jointes aux mots, et le mots joints aux idées.

De tout ce que nous venons de dire, il s'ensuit que la logique peut être divisée en quatre parties, selon les diverses réflexions que l'on fait sur ces quatre opérations de l'esprit.

C.3 Extraits de la première partie

Première partie.

Contenant les réflexions sur les idées, ou sur la première action de l'esprit, qui s'appelle *concevoir.*

Chapitre XII

Du remède à la confusion qui naît dans nos pensées et dans nos discours de la confusion des mots ; où il est parlé de la nécessité et de l'utilité de définir les noms dont on se sert, et de la différence de la définition des choses d'avec la définition des noms.

Le meilleur moyen pour éviter la confusion des mots qui se rencontrent dans les langues ordinaires, est de faire une nouvelle langue et de nouveaux mots, qui ne soient attachés qu'aux idées que nous voulons qu'ils représentent ; mais, pour cela, il n'est pas nécessaire de faire de nouveaux sons, parce qu'on peut se servir de ceux qui sont déjà en usage, en les regardant comme s'ils n'avaient aucune signification, pour leur donner celle que nous voulons qu'ils aient, en désignant par d'autres mots simples, et qui ne soient point équivoques, l'idée à laquelle nous voulons les appliquer : comme si je veux prouver que

notre âme est immortelle, le mot d'âme étant équivoque, comme nous l'avons montré, fera naître aisément de la confusion dans ce que j'aurai à dire : de sorte que pour l'éviter, je regarderai le mot d'âme comme si c'était un son qui n'eût point encore de sens, et je l'appliquerai uniquement à ce qui est en nous le principe de la pensée, en disant : *j'appelle âme ce qui est en nous le principe de la pensée.*
C'est ce qu'on appelle la définition du mot, *definitio nominis*, dont les géomètres se servent si utilement, laquelle il faut bien distinguer de la définition de la chose *definitio rei.* Car dans la définition de la chose, comme peut être celle ci : *L'homme est un animal raisonnable, le temps est la mesure du mouvement*, on laisse au terme qu'on définit, comme *homme* ou *temps*, son idée ordinaire, dans laquelle on prétend que sont contenues d'autres idées, comme *animal raisonnable*, ou *mesure du mouvement*, au lieu que dans la définition du nom, comme nous avons déjà dit, on ne regarde que le son, et ensuite on détermine ce son à être signe d'une idée que l'on désigne par d'autres mots.
pp. 78-79

C.4 Extraits de la deuxième partie

Deuxième partie.

Contenant les réflexions que les hommes ont faites sur leurs jugements

Chapitre I

Des mots par rapport aux propositions.

Comme nous avons dessein d'expliquer ici les diverses remarques que les hommes ont faites sur leurs jugements, et que ces jugements sont des propositions qui sont composées de diverses parties, il faut commencer par l'explication de ces parties, qui sont principalement les noms, les pronoms et les verbes. p. 95

Chapitre III

Ce que c'est qu'une proposition, et des quatre sortes de propositions.

Après avoir conçu les choses par nos idées, nous comparons ces idées ensemble ; et, trouvant que les unes conviennent entre elles, et que les autres ne conviennent pas, nous les lions ou délions, ce qui s'appelle *affirmer* ou *nier*, et généralement *juger.*
Ce jugement s'appelle aussi *proposition*, et il est aisé de voir qu'elle doit avoir deux termes : l'un de qui l'on affirme ou de qui l'on nie, lequel on appelle *sujet* ; et l'autre que l'on affirme ou que l'on nie, lequel s'appelle *attribut* ou *praedicatum.* p. 105
Ainsi l'on peut réduire toutes les propositions à quatre sortes, que l'on a marquées par ces quatre voyelles, A, E, I , O, pour soulager la mémoire.

- A. L'universelle affirmative, comme, *tout vicieux est esclave.*
- E. L'universelle négative, comme, *nul vicieux n'est heureux.*
- I. La particulière affirmative, comme, *quelque vicieux est riche.*
- O. La particulière négative, comme, *quelque vicieux n'est pas riche.* p. 107

Chapitre IV

De l'opposition entre les propositions qui ont même sujet et même attribut.

Nous venons de dire qu'il y a quatre sortes de propositions, A, E, I, O. On demande maintenant quelle convenance ou disconvenance elles ont ensemble, lorsqu'on fait du même sujet et du même attribut diverses sortes de propositions. C'est ce qu'on appelle opposition.
Et il est aisé de voir que cette opposition ne peut être que de trois sortes, quoique l'une des trois se divise en deux autres.

Car, si elles sont opposées en quantité et en qualité tout ensemble, comme A, O, et E, I, on les appelle contradictoires, comme *tout homme est animal, quelque homme n'est pas animal ; nul n'est impeccable, quelque homme est impeccable.*

Si elles diffèrent en quantité seulement, et qu'elles conviennent en qualité, comme A, I, et E, O, on les appelle subalternes, comme *tout homme est animal, quelque homme est animal ; nul homme n'est impeccable, quelque homme n'est pas impeccable.*

Et si elles diffèrent en qualité, et qu'elles conviennent en quantité, alors elles sont appelées *contraires*, ou *subcontraires*, *contraires* quand elles sont universelles, comme, *tout homme est animal, nul homme n'est animal*,

subcontraires, quand elles sont particulières, comme, *quelque homme est animal, quelque homme n'est pas animal.*

En regardant maintenant ces propositions opposées selon la vérité ou la fausseté, il est aisé de juger,

1°) Que les contradictoires ne sont jamais ni vraies, ni fausses ensemble ; mais si l'une est vraie, l'autre est fausse ; et si l'une est fausse, l'autre est vraie : car s'il est vrai que tout homme soit animal, il ne peut être vrai que quelque homme n'est pas animal ; et si, au contraire, il est vrai que quelque homme n'est pas animal, il n'est donc pas vrai que tout homme soit animal. Cela est si clair, qu'on ne pourrait que l'obscurcir en l'expliquant davantage.

2°) Les contraires ne peuvent jamais être vraies ensemble ; mais elles peuvent être toutes les deux fausses. Elles ne peuvent être vraies, parce que les contradictoires seraient vraies ; car s'il est vrai que tout homme soit animal, il est faux que quelque homme n'est pas animal, qui est la contradictoire, et par conséquent encore plus faux que nul homme ne soit animal, qui est la contraire.

   Mais la fausseté de l'une n'emporte pas la vérité de l'autre ; car il peut être faux que tous les hommes soient justes, sans qu'il soit vrai pour cela que nul homme ne soit juste, puisque qu'il peut y avoir des hommes justes, quoique tous ne soient pas justes.

3°) Les subcontraires, par une règle tout opposée à celle des contraires, peuvent être vraies ensemble, comme ces deux-ci, quelque homme est juste, quelque homme n'est pas juste, parce que la justice peut convenir à une partie des hommes, et ne pas convenir à l'autre ; et ainsi l'affirmation et la négation ne regardent pas le même sujet, puisque quelque homme est pris pour une partie des hommes dans l'une des propositions, et pour une autre partie dans l'autre. Mais elles ne peuvent être toutes les deux fausses ; puisque autrement les contradictoires seraient toutes deux fausses, car s'il était faux que quelque homme fût juste, il serait donc vrai que nul homme n'est juste, qui est la contradictoire, et à plus forte raison que quelque homme n'est pas juste, qui est la subcontraire.

4°) Pour les subalternes, ce n'est pas une véritable opposition, puisque la particulière est une suite de la générale ; car si tout homme est animal, quelque homme est animal ; si nul homme n'est singe, quelque homme n'est pas singe. C'est pourquoi la vérité des universelles emporte celle des particulières ; mais la vérité des particulières n'emporte pas celle des universelles : car il ne s'ensuit pas que, parce qu'il est vrai que quelque homme est juste, il soit vrai aussi que tout homme soit juste ; et, au contraire, la fausseté des particulières emporte la fausseté des universelles : car, s'il est faux que quelque homme soit impeccable, il est encore plus faux que tout homme soit impeccable. Mais la fausseté des universelles n'emporte pas la fausseté des particulières ; car, quoiqu'il soit faux que tout homme est juste, il ne s'ensuit pas que ça soit une fausseté de dire que quelque homme est juste. D'où il s'ensuit qu'il y a plusieurs rencontres où ces propositions subalternes sont toutes deux vraies, et d'autres où elles sont toutes deux fausses.

Je ne dis rien de la réduction des propositions opposées en un même sens, parce que cela est tout à fait inutile, et que les règles qu'on en donne ne sont la plupart vraies qu'en latin. pp. 108 à 110

Chapitre V

Des propositions simples et composées. Qu'il y en a de simples qui paraissent composées et qui ne le sont pas, et qu'on ne peut appeler complexes. De celles qui sont complexes par le sujet ou par l'attribut.

1°) La complexion tombe sur le sujet, quand le sujet est un terme complexe, comme dans cette proposition : Tout homme qui ne craint rien est roi.

   [. . .]

2°) La complexion tombe sur l'attribut, lorsque l'attribut est un terme complexe, comme : La piété est un bien qui rend l'homme heureux dans les plus grandes adversités.

   [. . .]

3°) Quelque fois la complexion tombe sur le sujet et sur l'attribut ; l'un et l'autre étant un terme complexe, comme dans cette proposition : Les grands qui oppriment les pauvres seront punis de Dieu, qui est le protecteur des opprimés. p. 112

Chapitre VIII

Des propositions complexes selon l'affirmation ou la négation, et d'une espèce de ces sortes de propositions que les philosophes appellent modales.

De ces propositions complexes, où la complexion tombe sur le verbe et non sur le sujet ni sur l'attribut, les philosophes ont particulièrement remarqué celles qu'ils ont appelées modales, parce que l'affirmation ou la négation y est modifiée par l'un de ces quatre modes : *possible, contingent, impossible, nécessaire* ; et parce que chaque mode peut être affirmé ou nié, comme : *il est impossible, il n'est pas impossible*, et en l'une et en l'autre façon être joint avec une proposition affirmative ou négative, que *la terre est ronde*, que *la terre n'est pas ronde*, chaque mode peut avoir quatre propositions, et les quatre ensemble seize. p. 121

Chapitre IX

Des diverses sortes de propositions composées.

DES COPULATIVES
On appelle copulatives celles qui enferment ou plusieurs sujets ou plusieurs attributs joints par une conjonction affirmative ou négative, c'est-à-dire *et* ou *ni* [. . .] La vérité de ces propositions dépend de la vérité de toutes les deux parties ; ainsi, si je dis, la foi et la bonne vie sont nécessaires au salut, cela est vrai, parce que l'une et l'autre y est nécessaire ; mais si je disais, la bonne vie et les richesses sont nécessaires au salut, cette proposition serait fausse, quoique la bonne vie y soit nécessaire, parce que les richesses n'y sont pas nécessaires.
[. . .]
Car c'est encore en cette manière qu'on rend une proposition contradictoire à la copulative, en niant expressément la conjonction ; comme lorsqu'on dit qu'il ne peut pas se faire qu'une chose soit en même temps cela et cela. pp. 122 à 124)

DES DISJONCTIVES
Les disjonctives sont de grand usage, et ce sont celles où entre la conjonction disjonctive *vel*, *ou*.[. . .]
La vérité de ces propositions dépend de l'opposition nécessaire des parties, qui ne doivent point souffrir de milieu ; mais, comme il faut qu'elles n'en puissent souffrir du tout pour être nécessairement vraies, il suffit qu'elles n'en souffrent point ordinairement pour être considérées comme moralement vraies. C'est pourquoi il est absolument vrai qu'une action faite avec jugement est bonne ou mauvaise, les théologiens faisant voir qu'il n'y en a point en particulier qui soit indifférente ; mais quand on dit que les hommes ne se remuent que par l'intérêt ou par la crainte, cela n'est pas vrai absolument, puisqu'il y en a quelques-uns qui ne se remuent ni par l'une ni par l'autre de ces passions, mais par la considération de leur devoir ; et ainsi, toute la vérité qui peut y être est que ce sont les deux ressorts qui remuent la plupart des hommes.
Les propositions contradictoires aux disjonctives sont celles où on nie la vérité de la disjonction ; ce qu'on fait en latin comme en toutes les autres propositions composées, en mettant la négation à la tête : *Non omnis actio est bona vel mala* ; et en français : *Il n'est pas vrai que toute action soit bonne ou mauvaise.* pp. 124-125

DES CONDITIONNELLES

Les conditionnelles sont celles qui ont deux parties liées par la condition *si*, dont la première, qui est celle où est la condition, s'appelle antécédent, et l'autre le conséquent.[...] Cette conséquence est quelque fois médiate et quelque fois immédiate ; elle n'est que médiate, quand il n'y a rien dans les termes de l'une et de l'autre partie qui les lie ensemble, comme si je dis :

Si la terre est immobile, le soleil tourne ;

Si Dieu est juste, les méchants seront punis.

[...] Quand la conséquence est immédiate, il faut pour l'ordinaire,

1°) Ou que les deux parties aient un même sujet [...]

2°) Ou qu'elles aient le même attribut [...]

3°) Ou que l'attribut de la première soit le sujet de la seconde [...]

4°) Ou enfin que le sujet de la première partie soit l'attribut de la seconde, ce qui ne peut être que quand cette seconde partie est négative [...]

On ne regarde, pour la vérité de ces propositions que la vérité de la conséquence ; car, quoique l'une et l'autre partie fussent fausses, si néanmoins la conséquence de l'une à l'autre est bonne, la proposition, en tant que conditionnelle, est vraie, comme :

Si la volonté de la créature est capable d'empêcher que la volonté absolue de Dieu ne s'accomplisse, Dieu n'est pas tout puissant.

Les propositions considérées comme négatives et contradictoires aux conditionnelles, sont celles-là seulement dans lesquelles la condition est niée ; ce qui se fait en latin, en mettant une négation à la tête [...]

Mais en français on exprime ces contradictoires par quoique et une négation :

Si vous mangez du fruit défendu, vous mourrez.

Quoique vous mangiez du fruit défendu, vous ne mourrez pas.

Ou bien par il n'est pas vrai :

Il n'est pas vrai que, si vous mangez du fruit défendu, vous mourrez. pp. 125-126

DES CAUSALES

Les causales sont celles qui contiennent deux propositions liées par un mot de cause, *quia, parce que*, ou *ut, afin que* [...]

Il est nécessaire, pour la vérité de ces propositions, que l'une des parties soit cause de l'autre ; ce qui fait aussi qu'il faut que l'une et l'autre soient vraies ; car ce qui est faux n'est point cause, et n'a point de cause ; mais l'une et l'autre partie peuvent être vraies, et la causale être fausse, parce qu'il suffit pour cela que l'une des parties ne soit pas cause de l'autre ; ainsi un prince peut avoir été malheureux et être né sous une telle constellation, qu'il ne laisserait pas d'être faux qu'il ait été malheureux pour être né sous cette constellation.

C'est pourquoi c'est en cela proprement que consistent les contradictoires de ces propositions, quand on nie qu'une soit cause de l'autre : *Non ideo infelix quia sub hoc natus* *sidere.* p. 127

DES RELATIVES
Les relatives sont celles qui renferment quelque comparaison et quelque rapport.[...]
La vérité dépend de la justesse du rapport, et on les contredit en niant le rapport. pp. 127-128

DES DISCRÉTIVES
Ce sont celles où l'on fait des jugements différents, en marquant cette différence par les particules *sed, mais, tamen, néanmoins*, ou autres semblables exprimées ou sous-entendues.
[...]
La vérité de cette sorte de proposition dépend de la vérité de toutes les deux parties et de la séparation qu'on y met ; car quoique les deux parties fussent vraies, une proposition de cette sorte serait ridicule, s'il n'y avait point entre elles d'opposition, comme si je disais :
Judas était un larron, et néanmoins il ne put souffrir que Marie répandit ses parfums sur Jésus-Christ.
Il peut y avoir plusieurs contradictoires d'une proposition de cette sorte, comme si on disait :
Ce n'est pas des richesses, mais de la science que dépend le bonheur.
On peut contredire cette proposition en toutes ces manières :
Le bonheur dépend des richesses, et non de la science.
Le bonheur ne dépend ni des richesses, ni de la science.
Le bonheur dépend des richesses et de la science.
Ainsi l'on voit que les copulatives sont contradictoires des discrétives ; car ces deux dernières propositions sont copulatives. pp. 128-129

Chapitre X

Des propositions composées dans le sens.

DES EXCLUSIVES
On appelle exclusives, celles qui marquent q'un attribut convient à un sujet, et qu'il ne convient qu'à ce seul sujet, ce qui est marquer qu'il ne convient pas à d'autres ; d'où il s'ensuit qu'elles enferment deux jugements différents, et que par conséquent elles sont composées dans le sens. C'est ce qu'on exprime par le mot *seul*, ou autre semblable, ou en français, *il n'y a.* [...]
Ces propositions se contredisent en trois manières ; car

1°) on peut nier que ce qui est dit convenir à un seul sujet, lui convienne en aucune sorte.

2°) on peut soutenir que cela convient à autre choses.

3°) on peut soutenir l'un et l'autre. pp. 129-130

DES EXCEPTIVES

Les exceptives sont celles où l'on affirme une chose de tout un sujet, à l'exception de quelqu'un des inférieurs à ce sujet à qui on fait entendre, par quelque particule exceptive, que cela ne convient pas, ce qui visiblement enferme deux jugements, et ainsi rend ces propositions composées dans le sens [. . .]

Excepté le sage, disaient les Stoïciens, tous les hommes sont vraiment fous.

Ces propositions se contredisent, de même que les exclusives,

1°) en soutenant que le sage des Stoïciens était aussi fou que les autres hommes ;

2°) en soutenant qu'il y en avait d'autres que ce sage qui n'étaient point fous ;

3°) en prétendant que ce sage des Stoïciens était fou, et que d'autres hommes ne l'étaient pas. pp. 131-132

DES COMPARATIVES

Les propositions où l'on compare enferment deux jugements, parce que c'en sont deux de dire qu'une chose est telle, et de dire qu'elle est telle plus ou moins qu'une autre, et ainsi ces sortes de propositions sont composées dans les sens. [. . .]

On contredit ces propositions en plusieurs manières, comme cette maxime d'Épicure, la douleur est le plus grand de tous les maux, était contredite d'une sorte par les Stoïciens, et d'une autre par les Péripatéticiens ; car les Péripatéticiens avouaient que la douleur était un mal ; mais ils soutenaient que les vices et les autres dérèglements d'esprit étaient de bien plus grands maux ; au lieu que les Stoïciens ne voulaient pas même reconnaître que la douleur fût un mal, bien loin d'avouer que ce fût le plus grand de tous les maux. pp. 132-133

DES INCEPTIVES OU DÉSITIVES

Lorsqu'on dit qu'une chose a commencé ou cesse d'être telle, on fait deux jugements : l'un de ce qu'était cette chose avant le temps dont on parle ; l'autre de ce qu'elle est depuis ; et ainsi ces propositions, dont les unes sont appelées inceptives, et les autres désitives, sont composées dans le sens. [. . .]

Les juifs n'ont commencé qu'au cinquième siècle depuis J.C à se servir des points pour marquer les voyelles.

Ces propositions se contredisent selon l'un ou l'autre rapport aux deux temps différents. Ainsi il y en a qui contredisent cette dernière, en prétendant, quoique faussement, que les Juifs ont toujours eu l'usage des points, au moins pour les livres, et qu'ils étaient gardés dans le temple ; et d'autres la contredisent, en prétendant, au contraire, que l'usage des points est même plus nouveau que le cinquième siècle. pp. 134-135

Chapitre XVII

De la conversion des propositions, où l'on explique plus à fond la nature de l'affirmation et de la négation, dont cette conversion dépend, et premièrement de la nature de l'affirmation.

(Les chapitres suivants sont un peu difficiles à comprendre, et ne sont nécessaires que pour la spéculation. C'est pourquoi ceux qui ne voudront pas se fatiguer l'esprit à des choses peu utiles pour la pratique, peuvent les passer.) p. 159

Chapitre XVIII

De la conversion des propositions affirmatives.

[. . .]
Règle I. Les propositions universelles affirmatives peuvent se convertir en ajoutant une marque de particularité à l'attribut devenu sujet.
Règle II. Les propositions particulières affirmatives doivent se convertir sans aucune addition, ni changement. pp. 161-162

Chapitre XX

De la conversion des propositions négatives.

[. . .]
Règle III. Les propositions universelles négatives peuvent se convertir simplement en changeant l'attribut en sujet, et conservant à l'attribut, devenu sujet, la même universalité qu'avait le premier sujet. pp. 164-165

C.5 Extraits de la troisième partie

Troisième partie.
Du raisonnement.

Cette partie que nous avons maintenant à traiter, qui comprend les règles du raisonnement, est estimée la plus importante de la logique, et c'est presque l'unique qu'on y traite avec quelque soin ; mais il y a sujet de douter si elle est aussi utile qu'on se l'imagine. La plupart des erreurs des hommes, comme nous avons déjà dit ailleurs, viennent bien plus de ce qu'ils raisonnent sur de faux principes, que non pas de ce qu'ils raisonnent mal suivant leurs principes. p. 167

Chapitre III

Règles générales des syllogismes simples et incomplexes.

(Ce chapitre et les suivants, jusqu'au douzième, sont de ceux dont il est parlé dans le DISCOURS, qui contiennent des choses subtiles et nécessaires pour la spéculation de la logique, mais qui sont de peu d'usage.) p. 171
Règle I. Le moyen ne peut être pris deux fois particulièrement ; mais il doit être pris au moins une fois universellement. [. . .]
Règle II. Les termes de la conclusion ne peuvent point être pris plus universellement dans la conclusion que dans les prémisses. [. . .]
Règle III. On ne peut rien conclure de deux propositions négatives. [. . .]
Règle IV. On ne peut prouver une proposition négative par deux propositions affirmatives. [. . .]
Règle V. La conclusion suit toujours la plus faible partie, c'est-à-dire que, s'il y a une des deux propositions qui soit négative, elle doit être négative, et s'il y en a une particulière, elle doit être particulière. [. . .]
Règle VI. De deux propositions particulières il ne s'ensuit rien. [. . .] pp. 172 à 176

Chapitre IV

Des figures et des modes des syllogismes en général ; qu'il ne peut y en avoir que quatre figures.

La disposition des trois propositions selon leurs quatre différences, A, E, I, O, s'appelle *mode.* Et la disposition des trois termes, c'est-à-dire du moyen avec les deux termes de la conclusion, s'appelle *figure.*
Or, on peut compter combien il peut y avoir de modes concluants, à n'y considérer point les différentes figures selon lesquelles un même mode peut faire divers syllogismes ; car, par la doctrine des combinaisons, quatre termes (comme sont A, E, I, O), étant pris trois à trois, ne peuvent être différemment arrangés qu'en soixante-quatre manières ; mais de ces soixante-quatre diverses manières, ceux qui voudront prendre la peine de les considérer chacune à part, trouveront qu'il y en a
28, exclues par la troisième et la sixième règle, qu'on ne conclut rien de deux négatives et de deux particulières ;
18, par la cinquième, que la conclusion suit la plus faible partie ;
6, par la quatrième, qu'on ne peut conclure négativement de deux affirmatives ;
1, savoir, I, E, O, par le troisième corollaire des règles générales ;

1, savoir, A, E, O, par le sixième corollaire des règles générales.
Ce qui fait en tout cinquante-quatre, et par conséquent il ne reste que dix modes concluants.
4 affirmatifs : A, A, A ; A, I, I ; A, A, I ; I, A, I
6 négatifs : E, A, E ; A, E, E ; E, A, O ; A, O, O ; O, A, O ; E, I, O.
Mais cela ne fait pas qu'il n'y ait que dix espèces de syllogismes, parce qu'un seul de ces modes peut se faire en diverses espèces selon l'autre manière d'où se prend la diversité des syllogismes, qui est la différente disposition des trois termes, que nous avons déjà dit s'appeler *figure.*
Or, pour cette disposition des trois termes, elle ne peut regarder que les deux premières propositions, parce que la conclusion est supposée avant qu'on fasse le syllogisme pour la prouver ; et ainsi, le moyen ne pouvant s'arranger qu'en quatre manières différentes avec les deux termes de la conclusion, il n'y a aussi que quatre figures possibles.
Car, ou le moyen est sujet en la majeure et attribut en la mineure, ce qui fait la première figure ;
Ou il est attribut en la majeure et en la mineure, ce qui fait la deuxième figure ;
Ou il est sujet en l'une et l'autre, ce qui fait la troisième figure ;
Ou il est enfin attribut dans la majeure et sujet en la mineure, ce qui peut faire une quatrième figure ; étant certain que l'on peut conclure quelquefois nécessairement en cette manière, ce qui suffit pour faire un vrai syllogisme. pp. 177-178

Chapitre V

Règles, modes et fondements de la première figure.

Règle I. Il faut que la mineure soit affirmative.
Règle II. La majeure doit être universelle.
[. . .]
Et par conséquent, il ne reste que ces quatre modes :
2 affirmatifs : A, A, A ; A, I, I.
2 négatifs : E, A, E ; E, I, O.
Ce qu'il fallait démontrer.
Ces quatre modes, pour être plus facilement retenus, ont été réduits à des mots artificiels, dont les trois syllabes marquent les trois propositions, et la voyelle de chaque syllabe marque quelle doit être cette proposition ; de sorte que ces mots ont cela de très commode dans l'école, qu'on marque clairement par un seul mot une espèce de syllogisme, que sans cela on ne pourrait faire entendre qu'avec beaucoup de discours.
BAR- *Quiconque laisse mourir de faim ceux qu'il doit nourrir, est homicide :*
BA- *Tous les riches qui ne donnent point l'aumône dans les nécessités publiques, laissent mourir de faim ceux qu'ils doivent nourrir :*
RA. *Donc ils sont homicides.*

CE- *Nul voleur impénitent ne doit s'attendre d'être sauvé :*
LA- *Tous ceux qui meurent après s'être enrichis du bien de l'Église, sans vouloir le restituer, sont des voleurs impénitents :*
RENT. *Donc nul d'entre eux ne doit s'attendre d'être sauvé.*
DA- *Tout ce qui sert au salut est avantageux :*
RI- *Il y a des afflictions qui servent au salut :*
I. *Donc il y a des afflictions qui sont avantageuses.*
FE- *Ce qui est suivi d'un juste repentir n'est jamais à souhaiter :*
RI- *Il y a des plaisirs qui sont suivis d'un juste repentir :*
O. *Donc il y a des plaisirs qui ne sont point à souhaiter.*

Fondement de la première figure.

Puisque dans cette figure le grand terme est affirmé ou nié du moyen pris universellement, et ce même moyen affirmé ensuite dans la mineure du petit terme, ou sujet de la conclusion, il est clair qu'elle n'est fondée que sur deux principes, l'un pour les modes affirmatifs, l'autre pour les modes négatifs.

Principe des modes affirmatifs.

Ce qui convient à une idée prise universellement, convient aussi à tout ce dont cette idée est affirmée, ou qui est sujet de cette idée, ou qui est compris dans l'extension de cette idée.

Principe des modes négatifs.

Ce qui est nié d'une idée prise universellement, est nié de tout ce dont cette idée est affirmée. pp. 179 à 181

Chapitre VI

Règles, modes et fondements de la seconde figure.

Règle I. Il faut qu'il y ait une des deux propositions négatives, et par conséquent que la conclusion le soit aussi par la sixième règle générale.
Règle II. Il faut que la majeure soit universelle.
[...]
Il ne reste donc de ces dix modes que ces quatre :
2 généraux : E, A, E ; A, E, E.
2 particuliers : E, I, O ; A, O, O.
Exemples et principes pp. 182-183

Chapitre VII

Règles, modes et fondements de la troisième figure.

Règle I. Que la mineure doit être affirmative.

Règle II. L'on ne peut y conclure que particulièrement.
[. . .]
Il ne reste donc que ces six modes :
3 affirmatifs : A, A, I ; A, I, I ; I, A, I.
3 négatifs : E, A, O ; E, I, O ; O, A, O.
Exemples et principes pp. 185-186

Chapitre VIII :

Des modes de la quatrième figure.

Règle I. Quand la majeure est affirmative, la mineure est toujours universelle.
Règle II. Quand la mineure est affirmative, la conclusion est toujours particulière.
Règle III. Dans les modes négatifs, la majeure doit être générale.
[. . .]
Il ne reste donc que ces cinq :
2 affirmatifs : A, A, I ; I, A, I.
3 négatifs : A, E, E ; E, A, O ; E, I, O.
Exemples et principes pp. 187-188

Chapitre XII

Des syllogismes conjonctifs.

Les syllogismes conjonctifs ne sont pas tous ceux dont les propositions sont conjonctives, mais ceux dont la majeure est tellement composée qu'elle enferme toute la conclusion : on peut les réduire à trois genres, *les conditionnels, les disjonctifs* et *les copulatifs.* p. 202

Des syllogismes conditionnels.

Les syllogismes conditionnels sont ceux où la majeure est une proposition conditionnelle qui contient toute la conclusion, comme :
S'il y a un Dieu, il faut l'aimer :
Or, il y a un Dieu :
Donc il faut l'aimer.
La majeure a deux parties : la première s'appelle l'antécédent, *s'il y a un Dieu* ; la deuxième le conséquent, *il faut l'aimer.*
Ce syllogisme peut être de deux sortes, parce que de la même majeure on peut former deux conclusions.
La première est, quand ayant affirmé le conséquent dans la majeure, on affirme l'antécédent dans la mineure, selon cette règle : *en posant l'antécédent, on pose le conséquent.*
Si la matière ne peut se mouvoir d'elle-même, il faut que le premier mouvement lui ait été donné de Dieu :

Or, la matière ne peut se mouvoir d'elle-même :
Il faut donc que le premier mouvement lui ait été donné de Dieu.
La deuxième sorte est, quand on ôte le conséquent pour ôter l'antécédent, selon cette règle : *ôtant le conséquent, on ôte l'antécédent.*
Si quelqu'un des élus périt, Dieu se trompe :
Mais Dieu ne se trompe point :
Donc aucun des élus ne périt. pp. 202-203

Des syllogismes disjonctifs.

On appelle syllogismes disjonctifs ceux dont la première proposition est disjonctive, c'est-à-dire dont les parties sont jointes par *vel, ou*, comme celui-ci de Cicéron :
Ceux qui ont tué César sont parricides ou défenseurs de la liberté :
Or, ils ne sont point parricides :
Donc ils sont défenseurs de la liberté.
Il y en a de deux sortes : la première, quand on ôte une partie pour garder l'autre; comme dans celui que nous venons de proposer, ou dans celui-ci :
Tous les méchants doivent être punis en ce monde ou en l'autre :
Or, il y a des méchants qui ne sont point punis en ce monde :
Donc ils le seront en l'autre.
[...]
La seconde sorte, mais moins naturelle, est quand on prend une des parties pour ôter l'autre, comme si l'on disait :
Saint-Bernard, témoignant que Dieu avait confirmé, par des miracles, sa prédiction de la Croisade, était un saint ou un imposteur :
Or, c'était un saint :
Donc ce n'était pas un imposteur. p. 205

Des syllogismes copulatifs.

Ces syllogismes ne sont que d'une sorte, qui est quand on prend une proposition copulative niante, dont ensuite on établit une partie pour ôter l'autre.
Un homme n'est pas tout ensemble serviteur de Dieu et idolâtre de son argent :
Or l'avare est idolâtre de son argent :
Donc il n'est pas serviteur de Dieu. p. 206

Chapitre XIII

Des syllogismes dont la conclusion est conditionnelle.

On a fait voir qu'un syllogisme parfait ne peut avoir moins de trois propositions; mais cela n'est vrai que quand on conclut absolument, et non quand on ne le fait que condi-

tionnellement, parce qu'alors la seule proposition conditionnelle peut enfermer une des prémisses outre la conclusion, et même toutes les deux.
Exemple : si je veux prouver que la lune est un corps raboteux, et non poli comme un miroir, ainsi qu'Aristote se l'est imaginé, je ne puis conclure absolument qu'en trois propositions :
Tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux :
Or, la lune réfléchit la lumière de toutes parts :
Donc la lune est un corps raboteux.
Mais je n'ai besoin que de deux propositions pour la conclure conditionnellement en cette manière :
Tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux :
Donc si la lune réfléchit la lumière de toutes parts, c'est un corps raboteux.
Et je puis même refermer ce raisonnement en une seule proposition, ainsi :
Si tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux, et que la lue réfléchisse la lumière de toutes parts, il faut avouer que ce n'est point un corps poli, mais raboteux.
[...] Toute la différence qu'il y a entre les syllogismes absolus et ceux dont la conclusion est enfermée avec l'une des prémisses dans une proposition conditionnelle, est que les premiers ne peuvent être accordés tout entiers, que nous ne demeurions d'accord de ce qu'on aurait voulu nous persuader ; au lieu que dans les derniers, on peut accorder tout, sans que celui qui les fait ait encore rien gagné, parce qu'il lui reste à prouver que la condition d'où dépend la conséquence qu'on lui a accordée est véritable. pp207-208

C.6 Extraits de la quatrième partie

QUATRIÈME PARTIE.
De la méthode

Il nous reste à expliquer la dernière partie de la logique, qui regarde la méthode, laquelle est sans doute l'une des plus utiles et des plus importantes. Nous avons cru devoir y joindre ce qui regarde la démonstration, parce qu'elle ne consiste pas d'ordinaire en un seul argument, mais dans une suite de plusieurs raisonnements, par lesquels on prouve invinciblement quelque vérité ; et que même il sert de peu pour bien démontrer, de savoir les règles des syllogismes, ce à quoi l'on manque très-peu souvent ; mais que le tout est de bien arranger ses pensées, en se servant de celles qui sont claires et évidentes, pour pénétrer dans ce qui paraissait plus caché. p. 273

Chapitre II

De deux sortes de méthodes, analyse et synthèse. Exemple de l'analyse.

On peut appeler généralement méthode l'art de bien disposer une suite de plusieurs pensées, ou pour découvrir la vérité quand nous l'ignorons, ou pour la prouver aux autres, quand nous la connaissons déjà.
Ainsi : il y a deux sortes de méthodes ; l'une pour découvrir la vérité, qu'on appelle *analyse*, ou *méthode de résolution*, et qu'on peut aussi appeler *méthode d'invention* ; et l'autre pour la faire entendre aux autres, quand on l'a trouvée, qu'on appelle *synthèse* ou *méthode de composition*, et qu'on peut aussi appeler *méthode de doctrine.* pp. 281-282

Chapitre III

De la méthode de composition, et particulièrement de celle qu'observent les géomètres.

Il y a encore beaucoup de choses à observer pour rendre cette méthode [de composition] parfaite et entièrement propre à la fin qu'elle doit se proposer, qui est de nous donner une connaissance claire et distincte de la vérité : mais, parce que les préceptes généraux sont plus difficiles à comprendre, quand ils sont séparés de toute matière, nous considèrerons la méthode que suivent les géomètres comme étant celle qu'on a toujours jugée la plus propre pour persuader la vérité et en convaincre entièrement l'esprit ; et nous ferons voir premièrement ce qu'elle a de bon, et en second lieu ce qu'elle semble avoir de défectueux. Les géomètres ayant pour but de n'avancer rien que de convaincant, ils ont cru pouvoir y arriver en observant trois choses en général.
La 1re est de *ne laisser aucune ambiguïté dans les termes*, à quoi ils ont pourvu par les définitions des mots dont nous avons parlé dans la première partie.
La 2e est de *n'établir leurs raisonnements que sur des principes clairs et évidents*, et qui ne puissent être contestés par aucune personne d'esprit : ce qui fait qu'avant toutes choses ils posent les axiomes qu'ils demandent qu'on leur accorde, comme étant si clairs, qu'on les obscurcirait en voulant les prouver.
La 3e est de *prouver démonstrativement toutes les conclusions qu'ils avancent*, en ne se servant que des définitions qu'ils ont posées, des principes qui leur ont été accordés comme étant très évidents, ou des propositions qu'ils ont déjà tirées par la force du raisonnement, et qui leur deviennent après autant de principes.
Ainsi, on peut réduire à ces trois chefs tout ce que les géomètres observent pour convaincre l'esprit, et renfermer le tout en ces cinq règles très importantes.

Règles nécessaires :

Pour les définitions.

1re. Ne laisser aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans le définir.
2e. N'employer dans les définitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués.

Pour les axiomes.

3e. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes.

Pour les démonstrations.

4e. Prouver toutes les propositions un peu obscures, en n'employant à leur preuve que les définitions qui auront précédé, ou les axiomes qui auront été accordés, ou les propositions qui auront déjà été démontrées, ou la construction de la chose même dont il s'agira, lorsqu'il y aura quelque opération à faire.
5e. N'abuser jamais de l'équivoque des termes, en manquant d'y substituer mentalement les définitions qui les restreignent et qui les expliquent.
Voilà ce que les géomètres ont jugé nécessaire pour rendre les preuves convaincantes et invincibles : et il faut avouer que l'attention à observer ces règles est suffisante pour éviter de faire de faux raisonnements en traitant les sciences, ce qui sans doute est le principal, tout le reste pouvant se dire utile plutôt que nécessaire. pp. 289-290

Chapitre VI

Des règles qui regardent les axiomes, c'est-à-dire les propositions claires et évidentes par elles-mêmes.

Règle I. Lorsque, pour voir clairement qu'un attribut convient à un sujet, comme pour voir qu'il convient au tout d'être plus grand que sa partie, on n'a besoin que de considérer les deux idées du sujet et de l'attribut avec une médiocre attention, en sorte qu'on ne puisse le faire sans s'apercevoir que l'idée de l'attribut est véritablement renfermée dans l'idée du sujet : on a le droit alors de prendre cette proposition pour un axiome qui n'a pas besoin d'être démontré, parce qu'il a de lui-même toute l'évidence que pourrait lui donner la démonstration, qui ne pourrait faire autre chose, sinon de montrer que cet attribut convient au sujet en se servant d'une troisième idée pour montrer cette liaison ; ce qu'on voit déjà sans l'aide d'aucune troisième idée.
Règle II. Quand la seule considération des idées du sujet et de l'attribut ne suffit pas pour voir clairement que l'attribut convient au sujet, la proposition qui l'affirme ne doit point être prise pour axiome ; mais elle doit être démontrée, en se servant de quelques autres idées pour faire voir cette liaison, comme on se sert de l'idée des lignes parallèles pour montrer que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits. pp. 300-301

Chapitre VIII

Des règles qui regardent les démonstrations.

Une vraie démonstration demande deux choses : l'une, que dans la matière il n'y ait rien que de certain et indubitable ; l'autre, qu'il n'y ait rien de vicieux dans la forme d'argumenter ; or, on aura certainement l'un et l'autre, si l'on observe les deux règles que nous avons posées. Car il n'y a rien que de véritable et de certain dans la matière, si toutes les propositions qu'on avancera pour servir de preuves sont :

Ou les définitions des mots qu'on aura expliqués, qui, étant arbitraires, ne peuvent être contestées ;
Ou les axiomes qui auront été accordés, et que l'on n'a point dû supposer s'ils n'étaient clairs et évidents d'eux-mêmes par la 3e règle ;
Ou des propositions déjà démontrées, et qui, par conséquent, sont devenues claires et évidentes par la démonstration qu'on en a faite ;
Ou la construction de la chose même dont il s'agira lorsqu'il y aura quelque opération à faire, ce qui doit être aussi indubitable que le reste, puisque cette construction doit avoir été auparavant démontrée possible, s'il y avait quelque doute qu'elle ne le fût pas.
pp. 304-305

Chapitre IX

De quelques défauts qui se rencontrent d'ordinaire dans la méthode des géomètres.

Défaut III. *Démonstration par l'impossible.*
Ces sortes de démonstrations qui montrent qu'une chose est telle, non par ses principes, mais par quelque absurdité qui s'ensuivrait si elle était autrement, sont très ordinaires dans Euclide. Cependant il est visible qu'elles peuvent convaincre l'esprit, mais qu'elles ne l'éclairent point ; ce qui doit être le principal fruit de la science : car notre esprit n'est point satisfait, s'il ne sait non-seulement que la chose est, mais pourquoi elle est : ce qui ne s'apprend point par une démonstration qui réduit à l'impossible.
Ce n'est pas que ces démonstrations soient tout à fait à rejeter ; car on peut quelquefois s'en servir pour prouver des négatives qui ne sont proprement que des corollaires d'autres propositions, ou claires d'elles-mêmes, ou démontrées auparavant par une autre voie ; et alors cette sorte de démonstration, en réduisant à l'impossible, tient plutôt lieu d'explication que d'une démonstration nouvelle.
Enfin, on peut dire que ces démonstrations ne sont recevables que quand on n'en peut donner d'autres ; et que c'est faute de s'en servir pour prouver ce qui peut se prouver positivement : or, il y a beaucoup de propositions dans Euclide qu'il ne prouve que par cette voie, qui peuvent se prouver autrement sans beaucoup de difficultés. p. 309

Chapitre XI

La méthode des sciences réduite à huit règles principales.

Deux règles touchant les définitions.

1. Ne laisser aucun des termes un peu obscurs ou équivoques sans le définir.
2. N'employer dans les définitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués.

Deux règles pour les axiomes.

3. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes.

4. Recevoir pour évident ce qui n'a besoin que d'un peu d'attention pour être reconnu véritable.

Deux règles pour les démonstrations.

5. Prouver toutes les propositions un peu obscures, en n'employant à leur preuve que les définitions qui auront précédé, ou les axiomes qui auront été accordés, ou les propositions qui auront déjà été démontrées.
6. N'abuser jamais de l'équivoque des termes, en manquant d'y substituer mentalement les définitions qui les restreignent et qui les expliquent.

Deux règles pour la méthode.

7. Traiter les choses, autant qu'il se peut, dans leur ordre naturel, en commençant par les plus générales et les plus simples, et en expliquant tout ce qui appartient à la nature du genre avant que de passer aux espèces particulières.
8. Diviser, autant qu'il se peut, chaque genre en toutes ses espèces, chaque tout en toutes ses parties, et chaque difficulté en tous ses cas. pp. 313-314

Annexe D

Extraits des premiers chapitres de *Les lois de la pensée*, George Boole

Je propose ici quelques extraits de la traduction de S. B. Diane (*Librairie Philosophique J. Vrin*, 1992), (Boole, 1992).

D.1 Extraits de l'introduction par Souleymane Bachir DIANE

La surprise sera grande chez qui voudrait, dans le texte majeur de George Boole, *Les lois de la pensée*, découvrir simplement, dans leur exposition originelle, les concepts et objets qui sont au fondement de nombreux et importants domaines modernes des mathématiques, de la logique, de l'informatique [...] Il découvrirait également que cette « science du système intellectuel » que G. Boole se propose de constituer en menant l'étude des lois de la pensée s'avère aussi, dans l'esprit de l'auteur, un outil d'analyse de l'argumentation métaphysique [...] Bref, ce qui est entrepris dans l'*Étude des lois de la pensée*[1] en 1854 est un projet ample et qui se démultiplie selon mille facettes après avoir commencé dans un petit essai, l'*Analyse mathématique de la logique*[2], rédigé très rapidement par George Boole en 1847 : dans ce petit ouvrage, qui marque l'acte de naissance de la logique algébrique, G. Boole s'était proposé de constituer une véritable science des opérations de l'entendement, d'exposer les procédures du raisonnement humain sous la forme d'un calcul algébrique. p. 9

Si Boole a pu déclarer que l'idée d'une algèbre de la logique lui était venue à l'âge de dix-huit ans, c'est qu'elle était en effet dans la droite ligne de ses réflexions d'alors sur la science des symboles : le fait de considérer le raisonnement, en analyse, comme la mise en œuvre de procédures purement symboliques de calcul l'avait mené à l'intuition que la discipline qui s'occupait traditionnellement des formes du raisonnement,

1. Titre original : An Investigation of the Laws of Thought.
2. Titre original : Mathematical Analysis of Logic.

la logique, pouvait et devait prendre, pour être véritablement une science, la forme d'un calcul symbolique. Son ami Auguste de Morgan avait bien vu en la science des symboles la grammaire d'une centaine d'algèbres qui seraient donc autant d'interprétations du symbolisme. De manière générale, l'époque de Boole a retrouvé et développé l'idée leibnitzienne d'une « spécieuse générale », d'un système de signes qui puisse donner naissance à plusieurs calculs possibles selon les lois de combinaison définies sur ce système ; et c'est à Boole qu'il a appartenu de retrouver et de développer l'idée du philosophe de Hanovre d'une algèbre de la logique, d'un calcul symbolique du raisonnement. Encore fallait-il que la logique classique, de son côté, fût arrivée aux conditions de son algébrisation. Or, précisément, l'époque de Boole est aussi celle de progrès importants intervenus en logique sur les deux points essentiels que sont la quantification du prédicat et la notion d'univers du discours. p. 12

En premier lieu, la démarche n'est plus la même : là où l'*Analyse mathématique de la logique* suivait l'ordre canonique de présentation de la logique classique, aristotélicienne, l'*Étude des Lois de la Pensée* établit d'emblée une « théorie générale du raisonnement déductif » sur des principes fondamentaux, mathématiques dans leur forme, et dont Boole estime qu'ils constituent les lois mêmes du langage et de l'entendement humains. C'est seulement après l'exposition du système et des procédures symboliques de l'algèbre de la logique ainsi constituée qu'il sera procédé à un examen de cette logique classique « à la lumière » de la nouvelle ; essentiellement dans le but de montrer, par comparaison, toute la puissance de la « méthode générale en logique » lorsque cette discipline, en se donnant la structure d'un calcul, est arrivée, selon Boole, à son statut véritable de science. p. 14

L'*Analyse mathématique de la logique* n'avait guère attiré les philosophes qui seuls, par tradition, s'occupaient de logique. En déclarant, dans son essai de 1847, que la logique ne devait plus être associée à la métaphysique mais à la mathématique, et en construisant son système sur cette rupture, Boole avait semblé faire désormais de la logique l'affaire des mathématiciens. Mais les lectures qui suivirent l'*Analyse mathématique de la logique* attestent de sa volonté de s'adresser aux philosophes en leur parlant de la logique algébrique dans leur langue, en prenant le temps de justifier de faire de la logique un calcul et en revenant à la métaphysique, aux spéculations, après que la démarche positive aura produit des résultats fermes et établis indépendamment de toute doctrine philosophique. p. 15

[Auguste de Morgan] avait cependant raison de craindre, comme en témoignent les manuscrits qu'il n'a pas publiés, que sa logique symbolique rencontrât l'incompréhension. Et de fait, elle fut, comme l'écrira Alfred North Whitehead en 1897, « reniée par de nombreux logiciens sous le prétexte que son intérêt est mathématique, et par de nombreux mathématiciens sous le prétexte que son intérêt est logique. » Il fallut alors attendre que l'idée d'« algèbre universelle » telle que, précisément, Whitehead sut la lire dans la logique symbolique de Boole, fût arrivée à sa pleine signification pour voir les mathématiciens, au début du siècle, reconnaître l'ampleur du champ qu'avait commencé de défricher l'auteur des *Lois de la Pensée*. p. 16

D.2 Extraits du chapitre 1

Nature et but de l'ouvrage

Le but de ce traité est d'étudier les lois fondamentales de l'esprit par lesquelles s'effectue le raisonnement ; de les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode ; de faire de cette méthode elle-même la base d'une méthode générale que l'on puisse appliquer à la théorie mathématique des Probabilités ; et enfin, de dégager des différents éléments de vérité qui seront apparus au cours de ces enquêtes, des conjectures probables concernant la nature et la constitution de l'esprit humain. p. 21

[La logique et la théorie des Probabilités] nous renseignent sur la manière dont le langage et le nombre servent d'instruments aux procédures de raisonnement ; elles nous révèlent, jusqu'à un certain point, les rapports qui existent entre les différentes facultés de notre intellect ; elles exposent ce qui, dans les domaines de la connaissance déductive et de la connaissance probable, constitue les critères essentiels de vérité et de validité, qui ne nous viennent pas de l'extérieur mais trouvent leur fondement au plus profond de la constitution des facultés humaines. Ces fins spéculatives ne le cèdent en rien ni en intérêt, ni en dignité, ni non plus, on peut l'ajouter, en importance, aux finalités pratiques auxquelles on associe l'histoire de ces sciences. Dévoiler les lois et les relations cachées de ces importantes facultés de la pensée qui nous permettent d'atteindre et de bien connaître le domaine qui dépasse la connaissance purement perceptive que nous avons du monde et de nous-mêmes, est un but que l'on n'a pas besoin de faire valoir devant un esprit rationnel. p. 22

Posons ce postulat qu'une science des facultés intellectuelles est possible et considérons un instant comment on peut en avoir connaissance. p. 23

En vérité, il existe certains principes généraux qui trouvent leur fondement dans la nature même du langage, et qui déterminent l'usage des symboles qui ne sont rien d'autre que les éléments d'un langage scientifique. Ces éléments sont, jusqu'à un certain point, arbitraires. Leur interprétation est simplement affaire de convention. Nous sommes libres de les utiliser dans le sens que nous voulons. Mais cette liberté est limitée par deux conditions indispensables : la première est que dans le même raisonnement nous n'abandonnions jamais le sens fixé une fois qu'il a été conventionnellement établi ; la deuxième, que les lois selon lesquelles on mène la procédure ne soient fondées que sur le sens ou la signification, préalablement fixés, des symboles employés. p. 25

Dès lors, au lieu de dire que la logique s'occupe des relations entre les choses et des relations entre les faits, nous pouvons dire qu'elle s'occupe des relations entre les choses et des relations entre les propositions. Nous avons un exemple des relations du premier type dans la proposition : « tous les hommes sont mortels » ; et du second dans la proposition : « si le soleil connaît une éclipse totale, les étoiles seront visibles ». La première exprime une relation entre « hommes » et « êtres mortels », la seconde une relation entre les propositions élémentaires « le soleil connaît une éclipse totale » et « les étoiles seront visibles ». Parmi de telles relations je suppose comprises celles qui affirment ou nient, pour les choses, leur existence, et celles qui affirment ou nient, pour les propositions, leur vérité. Appelons ces choses ou ces propositions dont on exprime ainsi les relations, les éléments des propositions qui les énoncent. A partir de cette définition nous pourrons alors dire que les prémisses d'un argument logique expriment les relations données entre certains éléments, et que la conclusion doit exprimer une relation implicite entre tout ou partie de ces éléments : c'est-à-dire une relation qui demeure implicitement enveloppée dans les prémisses dont on doit la déduire. pp. 26-27

D.3 Extraits du chapitre 2

Des signes en général et des signes appropriés à la science de la logique en particulier ; des lois auxquelles obéissent les signes de cette nature.

C'est une vérité généralement admise que le langage est un instrument de la raison humaine, et non pas simplement un moyen d'expression de la pensée. On se propose dans ce chapitre d'étudier ce qui rend le langage docile à la plus importante de nos facultés intellectuelles. Dans les différentes étapes de cette enquête, nous serons amener à examiner la constitution du langage considéré comme un système adapté à un certain but ou finalité ; à en dégager les éléments ; à essayer de déterminer leurs relations et dépendances mutuelles ; et à rechercher de quelle manière ils contribuent à atteindre l'objectif auquel ils se rapportent en tant que parties coordonnées d'un système. p. 42

Les éléments qui composent tout langage sont des signes, ou des symboles. [...]
La véritable signification d'un signe ne dépend aucunement de sa forme ou de son expression particulières, et il en va de même des lois qui en déterminent l'usage. Dans le présent traité cependant, c'est à des signes écrits que nous avons affaire, et c'est

exclusivement en ce sens que nous emploierons le terme de « signe ». Les propriétés essentielles des signes sont énumérées dans la définition suivante :
Définition : Un signe est une marque arbitraire dont l'interprétation est fixée et qui est susceptible d'être combiné à d'autres signes conformément à des lois déterminées dépendant de leurs interprétations respectives. p. 43

On examinera dans la Proposition suivante, l'analyse et la classification des signes dans lesquels sont menées les opérations du raisonnement :

Proposition I

Toutes les opérations du langage en tant qu'instrument du raisonnement se peuvent conduire dans un système de signes composé des éléments suivants :

(1) Des symboles littéraux tels que x, y, etc. représentant les choses en tant qu'objets de nos conceptions.

(2) Des signes d'opération tels que $+$,$-$, $\times$, qui traduisent les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou séparées de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments.

(3) Le signe d'identité $=$.

Et ces symboles logiques voient leur usage soumis à des lois déterminées, qui en partie s'accordent et en partie ne s'accordent pas avec les lois des symboles correspondants dans la science de l'algèbre. pp. 44-45

Posons comme critère de définition des éléments véritables du discours rationnel, leur capacité à se combiner sous les formes les plus simples, et à engendrer, par de telles combinaisons, toutes les autres formes connues et concevables du langage ; et adoptant ce principe, examinons la classification suivante :

Classe I

Les signes appellatifs ou descriptifs, qui expriment soit le nom d'une chose, soit une qualité ou un état qui lui appartient.
[...]
Poursuivons : le signe ayant été défini comme une marque arbitraire, il est permis de remplacer tous les signes du type précédemment décrit par des lettres. Supposons donc que l'on représente la classe des individus auxquels peut s'appliquer un nom ou une description, **particulier** au moyen d'une seule lettre, par exemple x. Ainsi, si le nom en question est « homme », supposons que x représente « tous les hommes » ou la classe « homme ». Par classe on entend habituellement une collection d'individus à qui un nom ou une description particulière peut s'appliquer ; mais dans cet ouvrage, on étendra la signification de ce terme de manière à inclure le cas où il n'existe qu'un seul individu répondant au nom ou à la description en question, aussi bien que les cas correspondants

aux termes « rien » et « univers » qui, en tant que classes, doivent s'entendre comme contenant respectivement « aucun être » et « tous les êtres ». De même, si un adjectif, « bon » par exemple, est employé comme terme descriptif, représentons par une lettre, soit y, toutes les choses auxquelles le descriptif « bon » peut s'appliquer ; autrement dit, « toutes les choses bonnes » ou la classe des « choses bonnes ». Admettons en outre que la combinaison xy représente la classe des choses auxquelles peuvent simultanément s'appliquer les noms ou descriptions représentés par x et y. Ainsi, si x seulement remplace « choses blanches » et y « moutons », posons que xy représente « moutons blancs » ; de même, si z représente « choses à cornes »et que x et y conservent leur précédente signification, posons que xyz représente « les moutons blancs à cornes », autrement dit la collection des choses auxquelles le nom de « mouton » et les descriptifs « banc » et « à cornes » peuvent s'appliquer ensemble.

Examinons maintenant les lois auxquelles les symboles x, y, etc., employés comme cidessus, sont soumis.

Tout d'abord, si l'on considère les combinaisons précédentes, il est évident que l'ordre dans lequel deux symboles sont écrits est indifférents. Les expressions xy et yx représentent l'une et l'autre la classe des choses auxquelles les noms et descriptions x et y peuvent s'appliquer ensemble. Dès lors, nous avons :

$$xy = yx \ (1)$$

Dans le cas où x représente les choses blanches et y les moutons, l'un ou l'autre membre de cette équation représentera la classe des moutons blancs. [...]

Il nous est par conséquent permis d'employer les symboles x, y, z, etc. à la place de substantifs, d'adjectifs et d'énoncés descriptifs, pourvu que nous respections la règle d'interprétation selon laquelle toute expression où plusieurs de ces symboles sont écrits ensemble représentera tous les objets ou individus auxquels leurs multiples significations peuvent s'appliquer ensemble, et la loi selon laquelle l'ordre dans lequel les symboles se succèdent est indifférent.

[...]

En ce qui concerne la loi établie ci-dessus, l'on peut ajouter les remarques suivantes qui, en outre, s'appliquent également à d'autres lois qui seront déduites plus loin.

En premier lieu, je voudrais remarquer que cette loi est une loi de la pensée, et non, à proprement parler, une loi des choses. [...]

En second lieu, étant une loi de la pensée elle se développe effectivement en une loi du langage, qui est le produit et l'instrument de la pensée. [...]

En troisième lieu, la loi exprimée en (1) sera mieux caractérisée si l'on souligne que les symboles littéraux x, y, z sont *commutatifs comme les symboles algébriques.* [...]

Puisque la composition de deux symboles littéraux sous la forme xy exprime la totalité de la classe des objets auxquels les noms ou qualités représentés par x et y peuvent s'appliquer ensemble, il en découle que si les deux symboles ont exactement la même signification, leur composition n'exprime rien de plus que ce que l'un ou l'autre exprimait séparément. Dans ce cas, nous aurions par conséquent

$xy = x$

Puisque y, cependant, est censé avoir la même signification que x, nous pouvons le remplacer par x dans l'équation précédente et obtenir

$xx = x$

Or, dans l'algèbre ordinaire, la combinaison xx est représentée plus brièvement par x^2. Adoptons ici le même principe de notation ; car la manière dont on exprime une succession particulière d'opérations mentales est une chose en elle-même tout aussi arbitraire que la manière d'exprimer une seule idée ou opération. Conformément à cette notation, l'équation précédente prend donc la forme

$$x^2 = x \ (2)$$

et, de fait, elle exprime une deuxième loi générale des signes par lesquels sont représentés symboliquement les noms, propriétés ou descriptions. pp. 45 à 50

Classe II

Les signes des opérations mentales par lesquelles nous réunissons des parties en un tout ou séparons un tout en ses parties.

Nous ne sommes pas seulement en mesure de nous représenter des conceptions de choses en tant qu'elles sont caractérisées par des noms, des attributs ou des états qui peuvent s'appliquer à tout élément du groupe considéré ; mais également de former une conception qui réunisse, en un seul groupe d'objet, plusieurs groupes partiels dont chacun est nommé ou décrit séparément. A cette fin nous employons les conjonctions « et », « ou », etc. « Arbres et minéraux », « montagnes arides ou vallées fertiles », constituent des exemples de ce genre. A parler strictement, « et », « ou », placés entre des termes décrivant deux ou plusieurs classes d'objets, supposent que ces classes sont tout à fait distinctes, de sorte qu'aucun élément de l'une ne soit contenu dans l'autre. En cela, et sous tous les autres rapports, les mots « et », « ou », sont analogues au signe algébrique +, et leurs lois sont identiques. Ainsi l'expression « hommes et femmes » est équivalente, lorsque l'on ne tient pas compte de sens conventionnels, à l'expression « femmes et hommes ». Soit x représentant « hommes », y « femmes », et soit + la traduction de « et » et « ou » ; nous avons alors

$$x + y = y + x \ (3)$$

équation qui serait également vraie si x et y représentaient des nombres, et si + était le signe de l'addition arithmétique.

Soit z le symbole représentant l'adjectif « européen » ; alors, comme il revient en fait au même de dire « les européens hommes et femmes » et « les hommes européens et les femmes européennes », nous avons

$$z(x+y) = zx + zy \ (4)$$

[. . .]

Les lois ci-dessus sont celles qui gouvernent l'emploi du signe $+$, utilisé ici pour noter l'opération positive de réunion de parties en un tout. Mais l'idée même d'une opération produisant un changement positif semble nous suggérer celle d'une opération inverse ou négative qui a pour effet de défaire ce que la première a fait. Ainsi, nous ne saurions concevoir la possibilité de réunir des parties en un tout sans concevoir également la possibilité de séparer une partie d'un tout. En langage ordinaire, nous exprimons cette opération par le signe « sauf » ; par exemple : « Tous les hommes *sauf* les Asiatiques », « tous les Etats, *sauf* ceux qui sont monarchiques ». On suppose ici que les choses qui ont été exceptées forment une partie de celles dont elles ont été exceptées. Comme nous avons exprimé l'opération de réunion par le signe $+$, nous pouvons exprimer l'opération inverse décrite ci-dessus par $-$, moins.

[. . .]

Puisqu'il est indifférent, en ce qui concerne tous les buts essentiels du raisonnement, que dans l'ordre du discours nous exprimions les cas qui sont exceptés en premier ou en dernier lieu, l'ordre dans lequel nous écrivons une série quelconque de termes, dont certains sont affectés du signe -, est également indifférent. Nous avons alors, comme dans l'algèbre ordinaire,

$$x - y = -y + x \ (5)$$

En représentant toujours par x la classe des « hommes », et par y celle des « Asiatiques », posons que z représente l'adjectif « blanc ». Appliquer l'adjectif « blanc »à l'ensemble des hommes exprimé par « les hommes sauf les Asiatiques », revient à dire « les hommes blancs sauf les Asiatiques blancs ». Nous avons donc

$$z(x - y) = zx - zy \ (6)$$

pp. 50 à 52

Classe III

Les signes exprimant la relation, et par lesquels nous formons des propositions.

Bien que l'on soit en droit de rapporter tous les verbes à cette classe, il suffit aux fins de la logique de la considérer comme contenant le seul verbe *est* ou *sont*, c'est-à-dire la copule, puisque tout autre verbe se laisse ramener à cette copule et à l'un des signes compris dans la classe I. [. . .]

Le signe ci-dessus, *est* ou *sont*, peut être exprimé par le symbole =. Les lois, ou comme l'on dirait ordinairement, les axiomes qu'introduit ce signe sont étudiées ci-dessous.

Soit la proposition « les astres sont les soleils et les planètes », et représentons astres par x, soleils par y et planètes par z ; il vient alors

$$x = y + z \ (7)$$

S'il est vrai que les astres sont les soleils et les planètes, il en découlera que les astres, sauf les planètes, sont les soleils. Ce qui donne l'équation

$$x - z = y \ (8)$$

qui doit donc dériver de (7). L'on fait ainsi passer un terme z d'un membre de l'équation à l'autre en changeant son signe.

Cela est conforme à la règle algébrique de transposition.

Mais au lieu de nous étendre sur des cas particuliers, nous pouvons d'emblée énoncer les axiomes généraux suivants :

(1) Si à des choses égales l'on ajoute des choses égales, on obtient des totaux égaux.

(2) Si l'on retranche des choses égales, on obtient des restes égaux.

Il apparaît alors que nous pouvons additionner ou soustraire des équations, et utiliser la règle de transposition dont nous venons de parler, exactement comme en algèbre ordinaire.

En outre : si deux classes de choses x et y sont identiques, en d'autres termes, si tous les éléments de l'une sont élément de l'autre, alors les éléments de l'une des classes ayant une propriété donnée z seront identiques aux éléments de l'autre ayant la même propriété z. Donc, si nous avons l'équation

$x = y$

alors, quelle que soit la classe ou la propriété représentée par z, nous avons également

$zx = zy$. [...]

Toutefois, l'analogie entre le présent système et celui de l'algèbre ordinaire semble ici tourner court. Supposons vrai que les éléments d'une classe x qui ont une certaine propriété z soient identiques aux éléments d'une classe y ayant la même propriété z, il ne s'ensuit pas que les éléments de la classe x soient identiques, dans leur totalité, aux éléments de la classe y.

Dès lors, on ne saurait inférer de l'équation

$zx = zy$

que l'équation

$x = y$

soit aussi vraie. [...]

Nous avons vu que les symboles logiques sont soumis à une loi spéciale

$x^2 = x$

Or, parmi les symboles du Nombre, il n'en est que deux, 0 et 1, qui soient soumis à la même loi formelle. Nous savons que $0^2 = 0$ et que $1^2 = 1$; et l'équation $x^2 = x$, lorsqu'on la considère comme algébrique, n'admet que les racines 0 et 1. Par conséquent, au lieu de déterminer jusqu'à quel point les symboles logiques s'accordent formellement avec ceux du Nombre en général, il nous est plus immédiatement suggéré de les comparer aux symboles quantitatifs n'*admettant pour valeurs que 0 et 1*. Concevons alors une algèbre où les symboles x, y, z,... admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et ces valeurs seules. Les lois, axiomes et procédures d'une telle algèbre seront identiques, en tout point, aux lois, axiomes et procédures d'une Algèbre de la Logique. Elles ne se distingueront que par une différence d'interprétation. C'est sur ce principe qu'est établie la méthode de cet ouvrage. pp. 52 à 55

D.4 Extraits du chapitre 3

Dérivation des lois des symboles logiques à partir des lois des opérations de l'esprit humain.

[...]
Il sera plus commode de répartir les résultats les mieux établis auxquels nous a conduit l'étude qui suit en des Propositions distinctes.

Proposition I

Déduire les lois des symboles logiques à partir de l'examen des opérations de l'esprit qui interviennent dans l'usage strict du langage comme instrument du raisonnement.
[...]
Les illustrations données suffisent à manifester l'évidence des deux propositions suivantes :

1°) Les opérations de l'esprit par lesquelles celui-ci, dans l'application de sa faculté d'imagination ou de conception combine et modifie les notions simples des choses ou des qualités, tout autant que les opérations de la raison qui s'effectuent sur des vérités et des propositions, sont soumises à des lois générales.
2°) Ces lois ont une expression mathématique et se manifestent effectivement dans les lois essentielles du langage humain. Par conséquent, les lois des symboles logiques peuvent se déduire de l'examen des opérations de l'esprit dans le raisonnement.

[...]

Proposition II

Déterminer la valeur et la significations logiques des symboles 0 et 1.
[...]

Proposition III

Si x représente une classe quelconque de choses, alors $1-x$ représente la classe contraire ou complémentaire, c'est-à-dire la classe qui contient toutes les choses qui ne sont pas contenues dans la classe x.
[...]

Proposition IV

L'axiome des métaphysiciens appelé principe de contradiction, qui affirme l'impossibilité pour un être d'avoir une qualité et de ne pas l'avoir en même temps, est une conséquence de la loi fondamentale de la pensée dont l'expression est $x^2 = x$. pp. 56 à 65

D.5 Extraits du chapitre 4

Division des propositions en deux classes : propositions « primaires » et « secondaires » ; propriétés caractéristiques de ces classes ; lois de l'expression des propositions primaires.

Les lois des opérations mentales qui interviennent dans les procédures de Conception ou d'Imagination ayant été étudiées, et les lois correspondantes des symboles qui les représentent ayant été expliquées, nous sommes amenés à examiner l'application pratique des résultats obtenus : d'abord pour l'expression des termes complexes des propositions ; enfin, pour la constitution d'une méthode générale d'analyse déductive. Dans ce chapitre, nous traiterons surtout du premier point ; pour l'introduire, il est nécessaire d'établir la Proposition suivante :

Proposition I

Toutes les propositions logiques peuvent être considérées comme appartenant à l'une ou l'autre de deux grandes classes auxquelles l'on peut donner respectivement les noms de « Propositions Primaires » ou « Concrètes » et de « Propositions Secondaires » ou « Abstraites ».
Tout énoncé produit peut se rapporter à l'un ou l'autre des types suivants : soit il exprime une relation entre des *choses*, soit il exprime une relation entre *propositions* ou équivaut à l'expression d'une telle relation. [...] J'appelle « Primaire », la première classe de propositions qui concernent des *choses*. La deuxième, qui concerne des *propositions*, je l'appelle « Secondaire ». En pratique, cette distinction recouvre presque mais pas tout à fait, la division logique courante des propositions en catégoriques et hypothétiques.
[...]

Proposition II

Déduire une méthode générale, fondée sur l'énumération des différents cas possibles, qui permette d'exprimer une classe ou un ensemble quelconque de choses, pouvant constituer un « terme » d'une Proposition Primaire.
[...]
RÈGLE. *On exprimera les noms ou propriétés simples par les symboles x, y, z, etc. leurs contraires par $1 - x$, $1 - y$, $1 - z$, etc. ; les classes de choses définies par des*

noms ou des propriétés communs, en reliant les symboles correspondant comme pour la multiplication ; les ensembles de choses composés de parties différentes, en reliant les expressions de ces parties par le signe +. En particulier, l'expression « ou des x's ou des y's » se traduit par $x(1-y)+y(1-x)$ lorsque les classes représentées par x et par y s'excluent, par $x+y(1-x)$ lorsqu'elles ne s'excluent pas. [. . .]

Proposition III

Déduire de l'examen de leurs différentes formes possibles, une méthode générale d'expression des Propositions Primaires ou Concrètes.

[. . .]

RÈGLE. *Lorsque le Sujet et le Prédicat d'une Proposition sont tous les deux universels, on en formera séparément les expressions, que l'on reliera par le signe =.*

[. . .]

Examinons maintenant le cas où le prédicat de la proposition est particulier, par exemple « tous les hommes sont mortels ».

Dans ce cas, il est évident que nous voulons dire : « tous les hommes sont quelques êtres mortels », et nous avons à trouver l'expression du prédicat « quelques êtres mortels ». Représentons alors par v une classe indéfinie sous tout rapport, excepté que certains de ses éléments sont des êtres mortels ; si x représente « êtres mortels », alors vx traduira « quelques êtres mortels ». Dès lors, si y représente hommes, l'équation cherchée sera

$y = vx$

Nous pouvons, à partir de ces considérations, dégager la Règle suivante d'expression d'une proposition universelle affirmative dont le prédicat est particulier.

RÈGLE. *Exprimer comme précédemment le sujet et le prédicat, préfixer au second le symbole indéfini v et égaler les expressions.*

[. . .]

RÈGLE. *Pour trouver l'expression d'une proposition de la forme « Nul x n'est y », la mettre sous la forme « Tous les x's sont non y's » et procéder comme dans le cas précédent.*

Examinons enfin le cas où le sujet de la proposition est particulier, par exemple « quelques hommes ne sont pas sages ». ici, comme on l'a déjà observé, la négation *ne . . . pas* peut parfaitement porter, tout au moins pour les objectifs de la logique, sur le prédicat *sage* ; en effet, nous n'entendons pas qu'il n'est pas vrai que « quelques hommes soient sages », mais nous voulons attribuer à « quelques hommes » un manque de sagesse. La forme cherchée, correspondant à la proposition donnée, est donc « quelques hommes sont non-sages ». En posant alors y pour « hommes », x pour « sages », c'est-à-dire « êtres sages », et en introduisant v comme le symbole d'une classe indéfinie sous tout rapport excepté qu'elle contient quelques individus de la classe à l'expression de laquelle ce symbole est préfixé, nous obtenons

$vy = v(1-x)$.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans la Règle générale suivante :

RÈGLE GÉNÉRALE POUR L'EXPRESSION SYMBOLIQUE DES PROPOSITIONS PRIMAIRES

1°) *Si la proposition est affirmative, former l'expression du sujet et du prédicat. Si l'un d'eux est particulier, lui préfixer le symbole indéfini v, et égaler les expressions ainsi obtenues.*

2°) *Si la proposition est négative, exprimer d'abord sa signification véritable en préfixant la particule de négation au prédicat, puis procéder comme dans le cas précédent.*

Un ou deux exemples supplémentaires constitueront une illustration suffisante.
EX : « Aucun homme n'est dans une situation élevée sans être l'objet de regards envieux ».
Soit y qui représente « hommes », x « être dans une situation élevée », z « ne pas être l'objet de regards envieux ». L'expression de la classe définie comme « être dans une situation élevée » et « ne pas être l'objet de regards envieux » est xz. Donc la classe contraire, c'est-à-dire celle qui ne correspond pas à cette description, sera représentée par $1 - xz$, et c'est à cette classe que tous les hommes sont rapportés. Nous avons donc

$$y = v(1 - xz)$$

Si la proposition ainsi traduite avait été mise sous la forme équivalente « les hommes dans une situation élevée sont l'objet de regards envieux », son expression eût été la suivante :

$$yx = v(1 - z)$$

L'on verra plus tard que cette expression est réellement équivalente à la précédente, avec l'hypothèse particulière que v est un symbole de classe indéfinie. pp. 67 à 78

Annexe E

Extraits de l'*Idéographie* de G. Frege

Je propose ici quelques extraits de la traduction de C. Besson (*Librairie Philosophique J. Vrin*, 1999), (Frege, 1999).

E.1 Extrait de la préface

L'acquisition d'une vérité scientifique parcourt normalement plusieurs degrés de certitude. La proposition générale, peut-être d'abord conjecturée à partir d'un nombre insuffisant de cas individuels, devient de plus en plus sûrement établie quant elle acquiert par des chaînes d'inférences une relation à d'autres vérités, soit que des conclusions qui trouvent confirmation de manière différente en dérivent, soit qu'à l'inverse, elle soit reconnue comme étant une conséquence de propositions déjà établies. C'est pourquoi il est possible de questionner le chemin par lequel une proposition fut peu à peu saisie d'une part, et la manière par laquelle finalement il faut la justifier le plus solidement d'autre part. La première question recevra éventuellement des réponses diverses selon les différentes personnes ; la seconde question est plus précise et sa réponse est liée à l'essence interne de la proposition considérée. La démonstration la plus solide est manifestement celle qui est purement logique, qui, abstraction faite de la caractéristique particulière des choses, se fonde seulement sur les lois sur lesquelles toute connaissance repose. Ainsi, nous divisons toutes les vérités ayant besoin d'une justification en deux sortes selon que la preuve, pour les unes, peut avancer par la logique pure ou, pour les autres, doit s'appuyer sur des faits d'expérience. Mais sans doute est-il compatible qu'une proposition appartienne à la première sorte et pourtant ne puisse jamais venir à la conscience de l'esprit humain sans activité sensorielle. Donc, ce n'est pas le mode de formation psychologique, mais la méthode de démonstration la plus parfaite qui est au fondement de la distinction. Alors que je me demandais à laquelle de ces deux sortes de vérités les jugements arithmétiques appartenaient, je devais d'abord chercher jusqu'où l'on pourrait aller dans l'arithmétique grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toutes les particularités. A partir de là, ma démarche était de chercher d'abord à réduire le concept de succession dans une suite à la conséquence *logique*, puis à progresser vers le concept de nombre. Pour que, ce faisant, quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire de façon inaperçue, tout devait dépendre de l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Tandis que je visais à satisfaire cette exigence le plus rigoureusement, je trouvais un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa attendre l'exactitude que mon but exigeait. De ce besoin résultat l'idée de l'idéographie dont il est question ici. Elle doit ainsi d'abord servir à examiner de la manière la plus sûre la force concluante d'une chaîne de déductions et à dénoncer chaque hypothèse qui veut s'insinuer de façon inaperçue, afin que finalement sa provenance puisse en être recherchée. pp. 5-6

Je crois pouvoir rendre le plus clairement le rapport de mon idéographie à la langue courante si je le compare avec celui du microscope à l'œil. Celui-ci a, par l'étendue de ses possibilités d'application, par la mobilité avec laquelle il peut s'adapter aux circonstances les plus différentes, une grande supériorité sur le microscope. Considéré comme un appareil optique, il montre assurément beaucoup d'imperfections qui ne restent ignorées qu'en raison de sa promiscuité avec la vie mentale. Mais aussitôt que des buts scientifiques posent de hautes exigences quant à la précision dans la distinction, l'œil se montre insuffisant. Par contre, le microscope est parfaitement adapté à précisément de tels buts, mais c'est justement pour cette raison qu'il est inutilisable pour tous les autres.
Ainsi, cette idéographie est un moyen inventé pour des buts scientifiques déterminés, que l'on ne doit pas condamner pour la raison qu'il ne convient pas à d'autres buts. Bien qu'elle corresponde dans une certaine mesure à ces buts, on pourrait néanmoins regretter l'absence de nouvelles vérités dans mon écrit. Je m'en consolerai en ayant conscience que le développement de la méthode fait aussi avancer la science. pp. 6-7

E.2 Extraits de la première partie

I. Explication des symboles.

Le jugement

Le jugement.

§ 2. Un jugement est toujours exprimé à l'aide du signe[N]

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-$$

qui se trouve à gauche du signe, ou de la combinaison de signes, exprimant le contenu du jugement. Si l'on *retranche* le petit trait vertical qui se trouve à la gauche du trait horizontal, [2] cela a pour effet de transformer le jugement en une *simple combinaison d'idées*, à propos de laquelle celui qui l'écrit n'exprime pas s'il lui attribue la vérité ou non. Posons par exemple que

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\ A \qquad {}^{1}$$

signifie le jugement: «les pôles magnétiques opposés s'attirent mutuellement»; ainsi

$$-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\ A$$

n'exprime pas ce jugement, mais doit simplement provoquer l'idée de l'attraction mutuelle des pôles magnétiques opposés chez le lecteur, peut-être pour en tirer des conclusions, et, à partit d'elles, mettre à l'épreuve la justesse de la pensée. Dans ce cas, nous *paraphrasons* par les mots: '*la circonstance que*', '*la proposition que*'.

Tout contenu ne peut pas devenir un jugement par $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$ mis devant son signe, par exemple l'idée 'maison' ne le peut pas. C'est pourquoi nous distinguons les contenus *jugeables* des contenus *non-jugeables*[2].

pp. 15-16

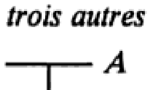
La conditionnalité

Si. Trait de condition

La conditionnalité.

§ 5. Si A et B signifient des contenus jugeables[1], il y a alors les quatre possibilités suivantes:

1. A est affirmé et B est affirmé;
2. A est affirmé et B est nié;
3. A est nié et B est affirmé;
4. A est nié et B est nié.



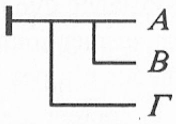
signifie ainsi le jugement selon lequel *la troisième de ces possibilités n'a pas lieu, mais l'une des trois autres a lieu.* Si

est nié, cela veut dire, par conséquent, que la troisiéme possibilité a lieu, donc que A est nié et B affirmé.

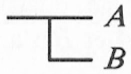
p. 19

[. . .]

Maintenant, il est facile de voir que



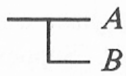
[7] nie le cas où A serait nié, B et Γ affirmés. Il faut le comprendre comme étant composé de



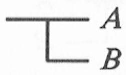
et Γ,

comme

l'est de A et B. En premier lieu, nous avons donc la négation du cas où

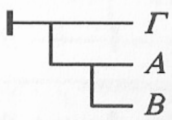


est nié et Γ affirmé. Mais la négation de



signifie que A est nié et B affirmé. De cela, nous obtenons ce qui est donné plus haut. S'il y a un lien causal, il est aussi possible de dire: «A est la conséquence nécessaire de B et Γ», ou «si les circonstances B et Γ se présentent, la circonstance A se présente aussi».

On n'en reconnaît pas moins que



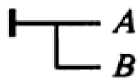
[N]

nie le cas où B est affirmé, mais A et Γ sont niés. Si l'on suppose qu'il y a un lien causal entre A et B, on peut traduire: «si A est une conséquence nécessaire de B, alors on peut en déduire que Γ a lieu».

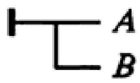
pp. 20-21

L'inférence. Les modes d'inférence aristotéliciens.

apparaît pour la première fois. Supposons que, par exemple, le jugement

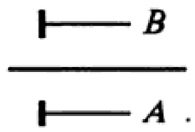


ou un jugement qui contient



comme cas particulier, est désigné par X. J'écris ensuite la déduction comme suit:

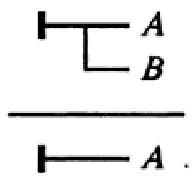
(X) :



[...]

Si, par exemple, XX signifie le jugement $\vdash B$, alors j'écris aussi cette même inférence comme suit:

(XX) : :



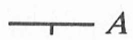
p. 22

La négation

La négation.

§ 7. Si l'on met un petit trait vertical sous le trait de contenu, on exprime de cette manière la circonstance *que le contenu n'a pas lieu.* Ainsi, par exemple

signifie: «A n'a pas lieu». J'appelle ce petit trait vertical le *trait de négation.* La partie du trait horizontal qui se trouve à la droite du trait de négation est le trait de contenu de A, et la partie qui se trouve à la gauche du trait de négation est, par contre, le trait de contenu de la négation de A. Ici, aussi peu qu'ailleurs dans l'idéographie, aucun jugement ne serait fait sans le trait de jugement.



invite seulement à former l'idée que A n'a pas lieu, sans exprimer si cette idée est vraie.

p. 24

L'identité de contenu

L'identité de contenu se distingue de la conditionnalité et de la négation en ce qu'elle se rapporte à des noms et non pas à des contenus. Tandis que d'ordinaire les signes ne font rien d'autre que représenter leur contenu, si bien que chaque combinaison dans laquelle ils entrent n'expriment qu'une relation à leurs contenus, ils s'exhibent soudainement eux-mêmes dès qu'ils sont liés par le signe d'identité de contenu ; car c'est ainsi qu'est désignée la circonstance que deux noms ont le même contenu. Ainsi, avec l'introduction d'un signe pour l'identité de contenu, une dualité est nécessairement générée dans la signification de tout signe, les même signes valant tantôt pour leur contenu, tantôt pour eux-mêmes.
p. 28

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; (A \equiv B)$$

signifie ainsi: ***le signe A et le signe B ont le même contenu conceptuel, de sorte que l'on peut partout remplacer A par B et inversement.***

p. 29

La fonction

Si, dans une expression dont le contenu n'a pas besoin d'être jugeable, un signe simple, ou composé, apparaît à une ou plusieurs places, et si nous pensons que ce signe est remplaçable à toutes ou à quelques-unes de ces places par autre chose, mais partout par la même chose, alors nous appelons la partie de l'expression se présentant invariablement, fonction et la partie remplaçable, son argument. pp. 30-31

On peut lire $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; \Phi(A)$

comme: «*A* a la propriété *Φ*».

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; \Psi(A, B)$$

peut être traduit par «*B* se trouve dans la relation *Ψ* à *A*» ou «*B* est le résultat de l'application de la procédure *Ψ* à l'objet *A*».

p. 33

La généralité

La généralité.

§ 11. Dans l'expression d'un jugement, on peut toujours considérer la combinaison de signes se trouvant à la droite de $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$ comme fonction de l'un des signes qui y apparaît. *Si l'on remplace cet argument par une lettre gothique, et si l'on met un creux, dans lequel cette lettre elle-même se trouve, dans le trait de contenu, comme dans*

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\; \Phi(\mathfrak{a}),$$

alors cela signifie le jugement que cette fonction est un fait, quoi que l'on considère comme étant son argument. Etant donné qu'une lettre

p. 33

E.3 Extraits de la deuxième partie

II. Représentation et dérivation de quelques jugements de la pensée pure.

Quelques principes de la pensée ont déjà été mis à contribution dans la première partie avec le but de les transformer en règles pour l'application de nos signes. Ces règles, ainsi que les lois desquelles elles sont des copies, ne peuvent être exprimées dans l'idéographie, parce qu'elles en sont son fondement. Dans cette partie, quelques jugements de la pensée pure, ceux pour lesquels cela est possible, vont être représentés en signes. Il est aisé de dériver les plus composés de ces jugements à partir des plus simples, non pas pour les rendre plus certains, ce qui serait pour la plupart inutile, mais pour mettre en évidence les relations des jugements entre eux. Ce n'est manifestement pas la même chose que de connaître simplement les lois ou de savoir aussi comment les unes sont données par les autres. De cette manière, on parvient à un petit nombre de lois dans lesquelles, si l'on ajoute celles qui sont contenues dans les règles, le contenu de toutes, bien que latent, est inclus. Et c'est aussi un avantage du mode de représentations par dérivation qu'il enseigne à connaître ce noyau-là. [...]
Le nombre de propositions qui forment le noyau dans la représentation suivante est de neuf. De celles-ci, trois, les formules 1, 2 et 8, n'ont besoin pour leur expression que du signe de conditionnalité, abstraction faite des lettres ; trois, les formules 28, 31 et 41, contiennent en plus aussi le signe de négation ; deux, les formules 52 et 54, celui d'identité de contenu ; et dans une, la formule 58, le creux du trait de contenu est employé. pp. 40-41

Premier et deuxième axiomes

Dans les extraits suivants, les deux axiomes présentés correspondent aux tautologies $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ pour la formule 1) et $[(C \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A))]$. J'ai laissé ici les justifications de ces axiomes pour montrer le style dans lequel le fait Frege.

§ 14.

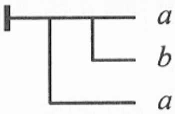
(1.

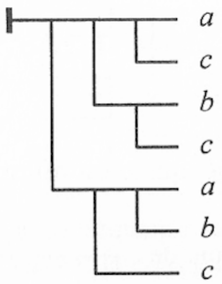
veut dire: «le cas où *a* est nié, *b* est affirmé et *a* est affirmé est exclu». Cela est évident, puisque *a* ne peut être à la fois nié et affirmé. On peut également exprimer le jugement en mots ainsi: «si une proposition *a* est valide, alors elle est aussi valide dans le cas où une quelconque proposition *b* est valide». Par exemple, supposons que

a signifie la proposition que la somme des angles du triangle *ABC* s'élève à deux angles droits;

b signifie la proposition que l'angle *ABC* est un angle droit.

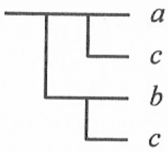
Nous obtenons alors le jugement suivant: «si la somme des angles du triangle *ABC* s'élève à deux angles droits, alors cela est aussi valide dans le cas où[N] l'angle *ABC* est un angle droit».

Le 1 à la droite de  est le numéro de cette formule.

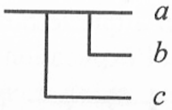


(2.

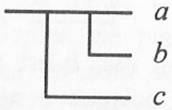
signifie: «le cas où

[27] 

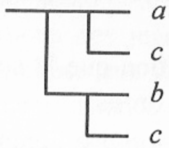
est nié et

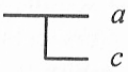
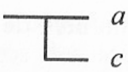


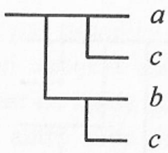
est affirmé n'a pas lieu». Mais

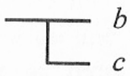


signifie la circonstance que le cas où *a* est nié, *b* affirmé, et *c* affirmé est exclu. La négation de

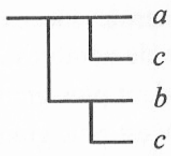


dit que  est nié et que  est affirmé. Mais la négation de  signifie que *a* est nié et que *c* est affirmé. La négation de



signifie donc que *a* est nié, que *c* est affirmé, et que  est affirmé. Mais l'affirmation de  et de *c* entraîne l'affirmation de *b*. C'est pourquoi la négation de

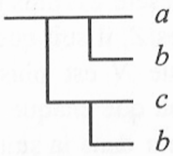
[28]



a pour conséquence la négation de a et l'affirmation de b et de c. L'affirmation de

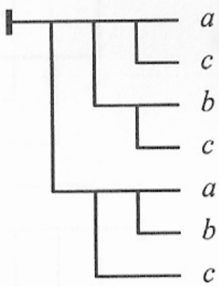
exclut précisément ce cas.

Le cas où



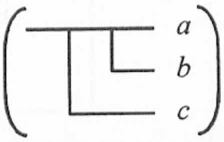
est nié et

est affirmé ne peut avoir lieu, et le jugement



asserte ce fait. Dans le cas où des liens causaux sont présents, on peut aussi l'exprimer comme suit:

«si une proposition (a) est la conséquence nécessaire de deux propositions (b et c),



, et si l'une d'elles, (b), est à nouveau la conséquence nécessaire de l'autre, (c), alors la proposition (a) est la conséquence nécessaire de cette dernière, (c), seulement.»

[29] Par exemple, supposons que:

c signifie que chaque terme successeur est plus grand que le prédécesseur dans une suite de nombres *Z*;

b signifie qu'un terme *M* est plus grand que *L*;

a signifie que le terme *N* est plus grand que *L*.

Nous obtenons alors le jugement suivant:

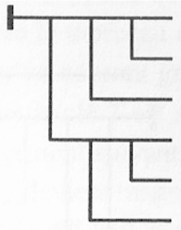
«si, à partir des propositions que chaque terme successeur est plus grand que le prédécesseur dans la suite de nombres *Z*, et que le terme *M* est plus grand que *L*, il peut être déduit que le terme *N* est plus grand que *L*; et si, à partir de la proposition que chaque terme successeur est plus grand que le prédécesseur dans la suite de nombres *Z*, il suit que *M* est plus grand que *L*, alors la proposition que *N* est plus grand que *L* peut être déduite de la proposition que chaque terme successeur est plus grand que le prédécesseur dans la suite de nombres *Z*».

pp. 41 à 44

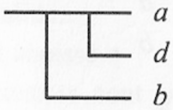
Troisième axiome (p. 50)

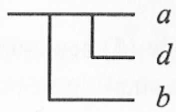
Il correspond à la tautologie $[(D \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow (D \Rightarrow A))]$.

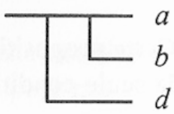
[35] § 16.



(8.

signifie que le cas où *a* est nié mais *b* et *d* sont affirmés n'a pas lieu;


signifie la même chose, et (8) dit que le cas où


est nié et


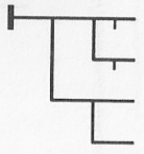
est affirmé, est exclu. On peut aussi le formuler comme suit: «si une proposition est la conséquence de deux conditions, alors leur ordre est indifférent».

p. 50-51

Quatrième axiome (p. 60-61)

Nous reconnaissons là l'équivalence entre une implication et sa contraposée.

§ 17.



(28.

signifie: «le cas où b est nié et a est affirmé n'a pas lieu». La négation de b signifie que a est affirmé et que b est nié; c'est-à-dire que a est nié et b est affirmé. Ce cas est exclu par a . Ce jugement justifie le passage de *modus ponens* à *modus tollens*. Par exemple, supposons que

b signifie la proposition que l'être humain M vit;

a signifie la proposition que M respire.

Nous avons alors le jugement suivant:

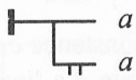
«si, de la circonstance que M vit, le fait qu'il respire peut être déduit, alors, de la circonstance qu'il ne respire pas, sa mort peut être déduite.»

pp. 60-61

Cinquième et sixième axiomes (p. 61-62, p. 64)

Il s'agit ici de l'équivalence entre A et NON(NON A).

§ 18.

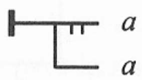


(31.

a signifie la négation de la négation, à savoir l'affirmation, de a. On ne peut donc pas nier a et (en même temps) affirmer a. *Duplex negatio affirmat*. La négation de la négation est l'affirmation.

pp. 61-62

[47] § 19.



(41.

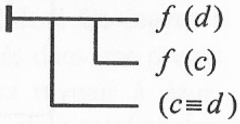
L'affirmation de a nie la négation de a.

p. 64

Septième axiome

Cet axiome ne correspond pas à une tautologie mais plutôt à un théorème sur la substitution.

§ 20.



(52.

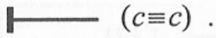
Le cas où le contenu de c est identique au contenu de d, où $f(c)$ est affirmé et $f(d)$ est nié, n'a pas lieu. Cette proposition exprime le fait que si $c \equiv d$, on pourrait partout remplacer c par d. Dans $f(c)$, c peut aussi apparaître à d'autres places que la place d'argument. C'est pourquoi c peut aussi être inclu dans $f(d)$.

pp. 68-69

Huitième axiome (p. 69)

Cet axiome est aussi parfois appelé « principe d'identité »

§ 21.



(54.

Le contenu de c est identique au contenu de c.

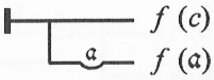
p. 69

Neuvième axiome

Cet axiome correspond à la formule universellement valide $(\forall a\, P[a]) \Rightarrow P[x])$.

On peut aussi le relier à la règle d'élimination du quantificateur universel dans la déduction naturelle.

§ 22.



(58.

—$\mathfrak{a}$— $f(\mathfrak{a})$ signifie que $f(\mathfrak{a})$ a lieu, quoi que l'on comprenne par $\mathfrak{a}$. C'est pourquoi, si —$\mathfrak{a}$— $f(\mathfrak{a})$ est affirmé, alors $f(c)$ ne peut être nié. Notre proposition exprime ce fait. Ici, $\mathfrak{a}$ ne peut apparaître qu'aux places d'argument de f, parce que cette fonction apparaît aussi à l'extérieur du domaine de $\mathfrak{a}$ dans le jugement.

pp. 69-70

Annexe F

Extraits de textes et programmes officiels

F.1 Extraits des instructions du 19 juillet 1960

Programmes de mathématiques des classes de Seconde A', C, M et M'

L'initiation au raisonnement logique

L'enseignement des mathématiques dans les classes de Seconde et de Première doit essentiellement assurer, en même temps que l'acquisition solide d'un certain nombre de connaissances de base, le développement des qualités intellectuelles indispensables dans tout travail scientifique, qu'il s'agisse de comprendre, ou, à un stade plus élevé, d'élaborer et de présenter un raisonnement.

Il convient de noter que les idées d'enchaînement, de déduction, se rencontrent dès les débuts, au cours du premier cycle, mais, à ce niveau, il n'est guère possible d'en faire saisir clairement la portée générale, ni d'en exiger de la part des élèves une application rigoureuse à des exemples quelques peu compliqués. Aussi, les récents programmes de Troisième ne mentionnent-ils plus, explicitement, certaines questions (« lieux géométriques », « constructions ») dont la solution comporte des combinaisons délicates d'analyse, de synthèse, de conditions nécessaires ou suffisantes. C'est donc à l'enseignant du second cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait ; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles.

Les notions « modernes ». Le vocabulaire et le symbolisme

Le libellé du prgramme ne fait pas explicitement mention de certaines notions simples sur les ensembles, ni du vocabulaire actuellement admis pour les désigner : réunion, intersection, ensembles complémentaires, inclusion, appartenance . . . Il n'est nullement question d'en proscrire l'emploi ; les unes et les autres se rencontrent en fait très fréquemment, dans la plupart des théories ; il convient de les dégager peu à peu, de les faire reconnaître, puis de les définir, à partir de nombreux exemples où elles interviennent naturellement. Ainsi apparaîtra leur intérêt par les applications qu'on peut en faire, par la simplification ou la clarification qu'elles sont susceptibles d'apporter dans une recherche ou dans un exposé.

D'autres notions, telles que celles qui touchent aux structures d'ensembles : groupes, anneaux, corps, pourront aussi être introduites, à condition que le terrain ait été d'abord soigneusement préparé ; elles peuvent faciliter la présentation de certaines synthèses et permettre des comparaisons utiles pour l'avenir.

D'ailleurs, le vocabulaire mathématique est en train de s'enrichir considérablement : beaucoup de mots, parfois imagés, parfois techniques, voient le jour, tantôt pour se substituer, en les abrégeant, à des locutions anciennes, tantôt pour exprimer une idée nouvelle, ou mettre en évidence des nuances de pensée. Quelques uns paraissent avoir acquis, de façon assez unanime, droit de cité ; d'autres sont encore contestés et subissent des fluctuations. Il peut être tentant, ne serait-ce qu'à titre d'essai, et pour les mettre à l'épreuve, d'en employer certains dans les classes secondaires ; mais une précaution évidente s'impose alors, vis-à-vis des élèves : c'est de les informer clairement et de les rendre capables, en toute occasion, d'expliquer complètement en langage ordinaire, les termes employés par eux et que n'a pas encore consacrés une longue tradition.

Le symbolisme mathématique, ses développements, les innovations qui le concernent, posent, pour l'enseignement secondaire, un problème analogue. Pendant les années d'initiation, les représentations symboliques d'êtres et de relations constituent essentiellement un mode abrégé de traduction d'une idée déjà exprimée ou que l'on est en mesure d'exprimer. Il paraît prudent de ne proposer aux débutants (en dehors des signes élémentaires qu'ils connaissent déjà et qu'ils ont appris à manier) qu'un nombre raisonnable de symboles nouveaux, liés à la présentation de certaines notions susceptibles d'être correctement assimilées ; on peut citer, par exemple, et sans vouloir établir ainsi une liste limitative : quelques signes relatifs aux ensembles (réunion, intersection, inclusion, appartenance) ; ainsi que les « flèches » marquant une déduction ou une équivalence logique.

Cependant, qu'il s'agisse du vocabulaire ou des symboles, il faut toujours prendre garde au double danger du verbalisme et du formalisme, aux méfaits que l'un et l'autre peuvent commettre ; les mots et les signes et, particulièrement, ceux qui ont, pour le néophyte, l'attrait de la nouveauté ou du pittoresque, risquent souvent de masquer la pensée.

F.2 Extrait du commentaire du 6 février 1970

I. Langage des ensembles

Par analogie avec l'avertissement qui précède le programme lui-même, on peut avancer que plus le commentaire est long, plus il doit permettre aux professeurs de faire court. Il en est ainsi de ce chapitre I et tout particulièrement du modeste *vocabulaire de la logique*, dont les lignes suivantes, rédigées en termes techniques, dépassent largement le développement qu'il est possible d'en faire dans les classes. En outre, le chapitre I tout entier fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, *à tout moment*, dans la suite du cours.

Logique. - Les élèves qui arrivent en Seconde ont déjà fait bien des raisonnements et appliqué ainsi des règles de logique, d'une manière peut-être plus spontanée que réfléchie ; il convient de leur apprendre désormais, sur des exemples, à exprimer les raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique.

La logique introduit, pour représenter les être sur lesquels elle raisonne, des symboles qu'elle soumet à un calcul formel ; l'emploi de ces symboles n'est pas indispensable en mathématiques et de très bons auteurs contemporains n'en font pas usage ; néanmoins, il a paru opportun d'initier à leur emploi, de façon juste et modérée, les élèves du second cycle : ils pourront ainsi s'exprimer de façon plus précise et éviter de commettre des incorrections, voire des contresens ; bien entendu, ils devront s'abstenir de parsemer de symboles, comme de sténogrammes, une rédaction à faire « en bon français ».

Les indications suivantes tentent de fixer, à l'intention des professeurs, les locutions et les notations qui, parmi tant d'autres, semblent avoir actuellement le meilleur cours.

On appelle ici *proposition* une phrase, ou une partie de phrase ayant un sens en soi, à laquelle on peut attacher, dans la théorie où l'on se place, une valeur de vérité, soit V, soit F (vrai, faux, la logique est celle du tiers-exclu) ; le programme a appelé *assertion* l'association proposition-valeur, le mot n'est pas reçu partout en ce sens, il est loisible de l'éviter.

Quand on fait opérer un *connecteur* sur deux propositions, ou sur une seule dans le cas de la négation, on obtient une nouvelle proposition dont la valeur de vérité dépend uniquement de celles des propositions composantes ; on caractérisera chacun des connecteurs par sa table de vérité. On peut recommander les notations suivantes, où A et B désignent deux propositions : $\neg A$ ou $\overline{A}$ (négation), $A \wedge B$ (conjonction), $A \vee B$ (disjonction non exclusive), $A \Rightarrow B$ (implication), $A \Leftrightarrow B$ (équivalence). Mais on peut se borner à utiliser les mots *non, et, ou implique, équivaut*, si on le juge prudent.

En groupant convenablement propositions, connecteurs et parenthèses, on peut former de nouvelles propositions, mais leur étude n'est pas au programme, non plus que l'étude des conventions qui permettent d'abréger leurs expressions par suppression des parenthèses. On se bornera à dégager, au moyen des tables de vérité, certaines propriétés utiles des connecteurs, la commutativité et l'associativité pour $\wedge$ et $\vee$, ainsi que l'équivalence de propositions telles que :

$A \Rightarrow B, \qquad (\neg A) \vee B \qquad \neg[A \wedge (\neg B)] \qquad \neg B \Rightarrow \neg A\,;$
on constatera de la même façon la « transitivité » de l'implication :

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \text{ implique } (A \Rightarrow C)$$

écriture qu'on se gardera de condenser de en $A \Rightarrow B \Rightarrow C$, car cette dernière évoquerait une associativité fallacieuse.
Si la proposition est un élément de base du raisonnement, celui-ci fait intervenir, même sous ses formes les plus simples, ce qu'on pourrait appeler d'abord des « propositions dépendant d'une variable x parcourant un ensemble E, de deux variables (x, y), etc. », soit $p(x)$, $p(x, y)$, etc. Un langage plus précis qualifiera $p(.)$ $p(.,.)$, de prédicat (fonction propositionnelle) à une ou plusieurs places ; à chaque x, ou (x, y) donné, est associé une proposition $p(x)$, $p(x, y)$, puis une valeur de vérité.
Les *quantificateurs*, qui permettent d'introduire de nouvelles propositions à partir de $p(x)$, $p(x, y)$ ... seront présentés sur des exemples : si le référentiel est $\mathbb{N}$,

« il existe x tel que $x < 5$ », « quel que soit x, $x < 5$ »

sont deux propositions, la première vraie, la seconde fausse, notées respectivement :

$$[\exists x \in \mathbb{N} : x < 5] \qquad [\forall x \in \mathbb{N} : x < 5]$$

les symboles $\exists$ et $\forall$ sont dit quantificateurs *existentiel* et *universel* ; les propositions qu'ils introduisent ont une valeur de vérité *indépendante de la variable x quantifiée* (variable muette).
On prendra soin, en employant les quantificateurs, de préciser d'abord le référentiel et d'écrire leurs symboles en tête de formules. Le plus souvent , on ne consacre par une formule qu'une proposition réputée vraie ; le contexte indique alors quel sens restituer à l'expression abrégée d'usage courant $[\forall x \in E : p(x)]$, ainsi qu'à sa négation $[\exists x \in E : \neg p(x)]$.
Dans l'enseignement du second degré, la notion d'ensemble est tenue pour une notion première et l'on peut présenter un lien entre cette notion et les éléments de logique de la façon suivante :
Lorsqu'on associe à tout élément x de E la proposition $p(x)$, on définit dans E le sous-ensemble $\varphi(p)$ constitué des éléments x tels que $p(x)$ est vrai :
$\varphi(p) = \{x \mid x \in E, p(x)\}$
on dit que les éléments de $\varphi(p)$ ont la propriété ou l'attribut p. Alors, avec des notations évidentes, $p(x)$ et $q(x)$ ayant le même référentiel E, on a :
$\varphi(\neg p) = \complement_E \varphi(p)$, $\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \cap \varphi(q)$, $\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \cup \varphi(q)$.
Quant aux relations suivantes dans $\mathscr{P}$(E),

$$\varphi(p) = E, \qquad \varphi(p) \neq \emptyset, \qquad \varphi(p) \subset \varphi(q), \qquad \varphi(p) = \varphi(q)$$

elles sont équivalentes à la vérité de propositions comportant l'emploi de quantificateurs, savoir :

$$[\forall x \in E : p(x)], \qquad [\exists x \in E : p(x)],$$
$$[\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)], \qquad [\forall x \in E : p(x) \Leftrightarrow q(x)]$$

Toutes autres relations de ce genre ne pourront éventuellement faire l'objet que de quelques exercices.
Le raisonnement mathématique donne le plus souvent de l'implication $A \Rightarrow B$ les deux usages suivants :

(a) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, alors B est vrai ;

(b) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si B est faux, alors A est faux ;

(a) est parfois nommé inférence, (b) est lié au raisonnement par l'absurde.
Lorsque A est faux, l'implication ne donne pas de renseignement sur B, mais elle reste vraie ; ainsi, l'énoncé :

« tout entier divisible par 6 est divisible par 2 »

se traduit par l'implication, vraie que 6 divise n ou non :

$$[\forall n \in \mathbb{Z} : 6 \text{ divise } n \Rightarrow 2 \text{ divise } n].$$

On n'omettra pas les quantificateurs dans des énoncés qui contiennent des implications portant sur des prédicats ; x parcourant E, les implications

$$(1) \qquad [p(x) \Rightarrow q(x)] \qquad\qquad (2) \qquad [\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)],$$

ont des sens très différents, car la valeur de vérité de (1) dépend de x, celle de (2) n'en dépend pas.
La logique fait de l'implication un usage plus étendu que les mathématiques ; on n'insistera pas sur le fait qu'une implication vraie, comme :
« 2 est pair $\Rightarrow$ trois points non alignés déterminent un cercle »,
n'est pas utilisée en mathématiques.
De cette longue étude, on ne retiendra que l'essentiel, qui est de donner aux élèves un moyen de reconnaître la légitimité de certaines déductions et d'en dresser *l'organigramme* ; à cet effet, les mots de théorème et de démonstration, d'hypothèse et de conclusion, de réciproque, de condition nécessaire ou suffisante, d'analyse et de synthèse, gardent leur sens et leur emploi.
Le symbole $\Leftrightarrow$ convient (au titre de codage) pour formuler une définition ; mais si l'on emploie dans une recherche une partie seulement du contenu de cette définition, il fait alors place au symbole $\Rightarrow$. Certains auteurs distinguent par des notations différentes les équivalences logiques, résultant d'une démonstration, et les équivalences verbales, exprimant une définition, et qui n'appellent pas de démonstration, si ce n'est éventuellement celle d'un théorème d'existence préalable.

F.3 Extrait du programme de mathématiques pour la classe de Première littéraire, enseignement obligatoire au choix de 2004

Deux domaines transversaux viennent irriguer l'ensemble du programme : il s'agit de la logique et de l'algorithmique, qui trouvent toutes deux des terrains d'application pertinents dans plusieurs des contenus abordés. Ils ne feront pas l'objet d'un exposé théorique isolé.

Pour ce qui concerne la logique

L'arithmétique semble un domaine privilégié pour travailler le raisonnement, car les notions de base qu'on y rencontre sont depuis longtemps familières aux élèves et ne nécessitent que peu de connaissances techniques.

Il a été choisi de faire le point sur les connaissances de base d'arithmétique et de les compléter, à travers la recherche de problèmes simples. L'entrée par les problèmes - par exemple du type « Trouver des entiers tels que ... »- permet aux élèves d'observer des régularités, de produire des conjectures, d'en affiner les formulations, de les comparer, de trouver éventuellement des contre-exemples pour les réfuter, etc. Ce travail devrait permettre de faire dégager *en situation* le domaine de validité de certaines phrases *a priori* « ouvertes » pour eux, de faire distinguer les notions de condition nécessaire et de condition suffisante et de poser comme question centrale celle de la vérité ou non de propositions générales, comportant si nécessaire de façon explicite des quantifications existentielles et universelles et des connecteurs (« et », « ou », négation).

[...]

Des compétences élémentaires de logique sont visées par ce travail transversal *sur les deux années* de cette formation. Les élèves devront être capables de les utiliser *dans un champ de connaissances qui leur est familier*. Ce travail d'appropriation de quelques règles de logique ne peut se faire que progressivement, par petites touches, et de façon non dogmatique.

Annexe G

Sommaires des pages sur les notions de logique dans les manuels de 1969 et 2010

G.1 Manuels de 1969

Manuel Queysanne-Revuz

Chapitre 1. Introduction au vocabulaire de la logique

> Une théorie mathématique n'est pas le rassemblement de résultats sans lien les uns avec les autres. À partir de résultats considérés comme acquis le **raisonnement mathématique** permet d'en démontrer d'autres. Ce raisonnement s'effectue à l'aide de certaines règles que vous utilisez consciemment ou non depuis plusieurs années et qui sont les **règles de la logique.** Il nous faut donc commencer, en utilisant des exemples mathématiques que vous connaissez, par mettre en évidence certaines de ces règles. Dans ce premier chapitre nous nous limiterons à une étude élémentaire des **assertions**, c'est-à-dire des énoncés dont on peut dire sans ambiguïté s'ils sont vrais ou bien s'ils sont faux.

1.1 Introduction

assemblage cohérent, terme, énoncé, variable

1.2 Assertions. Table de valeurs. Négation d'une assertion

a) Classification des énoncés

assertion, prédicat, fonction propositionnelle, proposition

b) tables de vérité

c) Négation d'une assertion

1.3 Connecteurs logiques : conjonction, disjonction

a) Connecteur logique

b) Conjonction

c) Disjonction

1.4 Connecteurs logiques : implication, équivalence logique

a) Implication

b) Implication réciproque d'une implication

c) Équivalence logique

1.5 Lois logiques

a) Les lois logiques sont ...

b) Lois de Morgan

c) Distributivité

d) Contraposition d'une implication

Chapitre 2. Introduction au vocabulaire de la théorie des ensembles. Relation avec celui de la logique.

I. Généralités sur les ensembles

sommaire non détaillé

II. Algèbre des parties d'un ensemble. Relation avec la logique

2.4 Fonction propositionnelle (ou proposition)

a) Étude d'un exemple

b) Fonction propositionnelle définie sur un ensemble E

c) Calcul des fonctions propositionnelles.

2.5 Sous-ensemble ou partie d'un ensemble

a) Sous-ensemble A d'un ensemble E.

b) Ensemble des parties d'un ensemble

c) Parties d'un ensemble et fonction propositionnelle définie sur E

d) Égalité des parties et équivalence logique

2.6 Implication et inclusion. Propriétés de l'inclusion

a) Implication et inclusion

b) Propriétés de l'inclusion

2.7 Complémentaire et négation

2.8 Intersection (resp. réunion) et conjonction (resp. disjonction)

a) Intersection et conjonction logique

b) Réunion et disjonction

c) Propriétés conjointes de l'intersection et de la réunion

d) Généralisations

2.9 Quantificateurs

a) Quantificateur universel

b) Quantificateur existentiel

c) Relation entre les deux quantificateurs

III. Remarques sur le raisonnement mathématique

2.10 Le raisonnement mathématique : 1. Les énoncés

a) Divers types d'énoncés
b) Théorèmes d'existence et théorèmes d'unicité
c) Théorèmes s'exprimant par une implication. Théorèmes réciproques
d) Théorèmes s'exprimant par une équivalence
2.11 Le raisonnement mathématique : 2. Les méthodes des démonstrations
a) Raisonnement par déduction
b) Démonstration par négation. Contre-exemple
c) Démonstration par disjonction des cas
d) Démonstration par l'absurde

Manuel Aleph 0

Chapitre 1. Logique

1.1 Pourquoi la logique ?**

Les Mathématiques trouvent des applications dans toutes les activités humaines. D'autre part, les Mathématiques nécessitent un raisonnement clair et logique, et une expression rigoureuse et précise. Aussi est-il indispensable de réfléchir sur ce qu'est la logique, et de dépasser la notion de logique intuitive ou de « bon sens », pour l'étude d'un certain nombre de règles simples, dont la connaissance permettra d'éviter les plus grossières des fautes habituelles.

L'étude d'un problème de Mathématiques nécessite une réflexion, préalable à toute recherche, sur le contenu de l'énoncé. Il convient d'abord de discerner avec précision quelle est la question posée, puis quels sont les renseignements qui permettront d'aborder le problème. Ensuite, il conviendra de mettre en jeu un certain nombre de mécanismes de déduction qui permettront de démontrer le résultat cherché à partir des hypothèses données.

Ces renseignements sont donnés à l'aide de mots, et, en Mathématiques, on emploie des mots techniques que l'on a soigneusement définis comme *exposant, proportion, bissectrice,* etc., et des mots ou expressions du langage courant tels que :

un, une	*au moins un*	*si… alors*
le, la	*chaque*	*or …*
les	*toujours*	*donc*
des	*parfois*	*réciproquement*

et bien d'autres encore.

Mais les mots du langage courant présentent souvent des ambiguïtés ou des obscurités. Ainsi, dans le proverbe « un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire », le premier article *un* veut dire un [sot] *quel qu'il soit* (et non pas *un seul* sot, ni *un certain* sot) ; on pourrait remplacer cet article par l'adjectif indéfini *tout*. Le second article *un* signifie *au moins un* (pas nécessairement *un seul*, mais pas *n'importe lequel*).

En Mathématiques, il convient de distinguer entre ces acceptions de l'article *un* et, plus généralement, entre les diverses significations des mots-outils.

Pour éviter ces ambiguïtés et obscurités du langage courant, on précise la rédaction des raisonnements à l'aide de quelques symboles et termes logiques spécialisés.

2.3.8 Résumé et illustrations

2.4 Propriétés

sommaire non détaillé

Manuel Lespinard

Première partie : Langage des ensembles

Chapitre 1 : Notions de logique

1. Assertion
2. Proposition
3. Remarque
4. Notation
5. Négation
6. Principe du tiers-exclu
7. Conséquence
8. Conjonction
9. Disjonction
10. Implication
11. Théorème

Équivalence entre une implication et sa contraposée

12. Équivalence
13. Transitivité des implications et des équivalences

Chapitre 2 : Ensembles

I. Inclusion

sommaire non détaillé

II. Réunion, intersection

sommaire non détaillé

III. Lien avec la logique

30. Attribut d'un élément
31. Négation et complémentarité
32. Conjonction et intersection
33. Disjonction inclusive et réunion
34. Conséquences
35. Disjonction exclusive, différence symétrique

IV. Produit cartésien de deux ensembles

sommaire non détaillé

V. Quantificateurs

41. Quantificateur universel

G.2 Manuels de 2010

Manuels de 2010 ayant des pages au début

Manuel Indice

Ensembles - Raisonnement logique

I. Ensembles - Intervalles

II. Et - Ou, Intersection - Réunion

III. Quel que soit - Pour tout - Il existe

IV. Exemples - Contre-exemples

V. Implication - Équivalence

VI. Négation - Contraposée

Manuel Odyssée

Le raisonnement logique

1. Les connecteurs logiques : et, ou
2. Les quantificateurs : pour tout, quel que soit, il existe
3. Implication, réciproque, contraposée et équivalence
4. Les outils du raisonnement dans la démonstration

a) Le contre-exemple

b) Le raisonnement par l'absurde

c) Le raisonnement par contraposée

d) Le raisonnement par disjonction des cas

Manuel Travailler en confiance

Notations et raisonnements mathématiques

Partie A. Ensembles de nombres. Notations.

sommaire non détaillé

Partie B. Raisonnement mathématique

1. L'implication

a) Un exemple

b) Plus généralement

c) Implication réciproque

2. L'équivalence

3. Comment démontrer une implication

a) Par implications successives

b) En transformant la conclusion

4. Comment démontrer une équivalence $(P) \Leftrightarrow (Q)$

a) Première méthode

b) Deuxième méthode : par équivalences successives

5. Quantificateurs

a) Quantificateur universel : « $\forall$ »

b) Quantificateur existentiel : « $\exists$ »

c) Quantifications implicites

d) Négation d'une proposition

6. Raisonnement par l'absurde. Contraposée

a) Raisonnement par l'absurde

b) Notion de contraposée

7. Raisonnement par disjonction des cas

8. Notion de contre-exemple

Partie C. Logique mathématique et logique du langage courant

1. Fromage ou dessert ?

2. Confusion entre une implication et une équivalence

3. Mais alors, à quoi servent les mathématiques ?

Manuels de 2010 ayant des pages à la fin

Manuel Transmath

Le vocabulaire de la logique

1. « Et », « ou »

1.1 Le « et » : exemples

1.2 Le « ou » en langage mathématique

2. L'implication

2.1 Un exemple pour comprendre

2.2 Condition suffisante, condition nécessaire

3. Implication réciproque d'une implication

4. Propositions équivalentes

4.1 Un exemple pour comprendre

4.2 Condition nécessaire et suffisante

5. Les quantificateurs

5.1 « Quel que soit », « Pour tout »

5.2 « Il existe au moins un »

6. Négation d'une proposition

6.1 Définition, exemples

6.2 Négation d'une proposition (P_1 et P_2)

6.3 Négation d'une proposition (P_1 ou P_2)

6.4 Négation d'une proposition universelle. Démonstration par contre-exemple
6.5 Négation d'une proposition existentielle
7. Contraposée d'une implication
8. Quelques types de raisonnement
8.1 Démonstration par disjonction des cas
8.2 Démonstration par l'absurde

Manuel Math'x

Raisonnement logique
1. Proposition vraie ou fausse
2. Négation d'une proposition
3. « ET », « OU » en mathématiques
4. « Si ... alors ... », « si et seulement si »
A. Proposition conditionnelle (ou implication)
B. Réciproque d'une proposition conditionnelle
C. « si et seulement si », « équivaut à »
D. Contraposée d'une proposition conditionnelle
E. « Il faut, il suffit ». Condition nécessaire, condition suffisante
5. « Il existe un », « Quel que soit », « Pour tout » : quantificateurs
6. Autres types de raisonnement

Manuel Hyperbole

Vocabulaire de la logique
Thème 1. Les connecteurs logiques « et », « ou »
1. Conjonction
2. Disjonction
Thème 2. La négation
Thème 3. L'implication
Thème 4. L'équivalence
Thème 5. Condition nécessaire, condition suffisante
Thème 6. Les quantificateurs
1. Quantificateur universel : « quel que soit... », « pour tout... »
2. Quantificateur existentiel : « il existe au moins un ... »
Thème 7. Types de raisonnements spécifiques
1. Démonstration par disjonction des cas
2. Démonstration par la contraposée

3. Démonstration par l'absurde
4. Démonstration par contre-exemple

Manuel Symbole

Notations et raisonnement
1. Vocabulaire - notations
1, 2, 3, 4. *Sur les ensembles, sommaire non détaillé*
5. Quantificateur universel, quantificateur existentiel
6. Propositions
2. Démonstration - raisonnement
1. L'implication
2. Démontrer
a) La démonstration directe
b) Le raisonnement par disjonction des cas
c) Le raisonnement par contraposée
d) Le raisonnement par l'absurde

Manuel Déclic

Juste un paragraphe « Un peu de logique » dans une page **Notations et logique**.

Manuel de 2010 ayant des pages disséminées

Manuel Repères

Avec le chapitre *Généralités sur les fonctions*
1. Ensembles de nombres, 2. Appartenance et inclusion, 3. Intersection et réunion, 4. Quantificateurs
Avec le chapitre *Fonctions de référence*
1. Implication, 2. La démonstration par le contre-exemple
Avec le chapitre *Compléments sur les fonctions*
1. Condition nécessaire et condition suffisante, 2. Démontrer une condition nécessaire et suffisante
Avec le chapitre *Probabilités*
1. Inclusion et appartenance, 2. Négation : l'événement contraire, 3. la démonstration par disjonction des cas
Avec le chapitre *Géométrie dans l'espace*
1. Appartenance et inclusion, 2. La démonstration par l'absurde

Avec le chapitre *Géométrie analytique*

1. Proposition contraposée, 2. La démonstration par contraposée

Avec le chapitre *Géométrie vectorielle*

Démontrer une équivalence

Manuel de 2010 avec exercices corrigés

Manuel Pixel

Réciproque, équivalence et négation

Et, ou et contraposée

Réciproque, équivalence et négation

« et » et « ou »

Annexe H

Commentaires de certains exercices des manuels de 2010

<u>Exercice n° 87 p 48 du manuel Transmath :</u>

87 Négation d'une proposition LOGIQUE

- *n* est un entier multiple de 6. La négation de cet énoncé est « *n* est un entier qui **n'est pas** multiple de 6 ».
- **Tous** les élèves de la classe aiment les maths. La négation est : « il **existe au moins un** élève de la classe qui n'aime pas les maths ».

Écrivez la négation de chaque énoncé.

a) y est un nombre strictement supérieur à 3.

b) z est un nombre tel que $z \leqslant 4$.

c) f est une fonction telle que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) = 2$.

d) f et g sont des fonctions telles que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;2]$, $f(x) > g(x)$.

Dans cet exercice, la manière de préciser le domaine auquel la variable est astreinte complique un peu. En effet, dans le premier exemple, cette donnée est intégrée à la proposition mais agit comme un présupposé et n'est alors pas modifié par la négation. Il y a un implicite (une variable nommée n est très couramment astreinte à $\mathbb{N}$) qui amène à lire cette phrase de cette façon. La proposition « x est un entier multiple de 6 » ne serait peut-être pas lue pareil, avec un présupposé, mais plutôt comme une conjonction : « x est un entier ET x est un multiple de 6 ». La négation serait alors une disjonction : « x n'est pas un entier ou x n'est pas multiple de 6 ».

Exercice n° 61 p 185 du manuel Math'x :

61 Négation
Donner la négation des phrases suivantes.
a. « L'augmentation des prix est au plus de 0,6 % »
b. « On gagne si on a plus de 6 bonnes réponses »
c. « Il a gagné au moins 2 000 € mais moins de 2 500 € »

Le livre du professeur propose comme corrigé pour la phrase b : « on gagne si on a au plus 6 bonnes réponses ». Ces deux phrases qui sont toutes les deux des implications ne sont évidemment pas la négation l'une de l'autre.
Je propose la reformulation suivante de la proposition b., dans laquelle la structure logique est plus explicite : « Quelle que soit la personne qui joue, si elle a plus de 6 bonnes réponses, alors elle gagne. » La négation serait alors : « Il y a une personne qui joue, qui a plus de 6 bonnes réponses, et qui ne gagne pas. »

Exercice n° 82 p 91 du manuel Hyperbole :

82 Propositions vraies ou fausses
Recopier et compléter la phrase :
« Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 36$, alors ... »
pour obtenir :
a) une proposition vraie ;
b) une proposition fausse.

Il est impossible de compléter la proposition donnée de manière à ce qu'elle soit fausse. On le verra facilement en utilisant la forme disjonctive de l'implication : il faut compléter de manière à la rendre fausse la proposition « Il existe au moins un réel x tel que ($x^2 \neq 36$ OU . . .) ». Or, elle est équivalente à « (Il existe au moins un réel x tel que $x^2 \neq 36$) OU (il existe au moins un réel x tel que . . .) », qui ne peut pas être fausse car « Il existe au moins un réel x tel que $x^2 \neq 36$ » est vraie.

Exercice n° 36 p 113 du manuel Repères :

36 Condition nécessaire et suffisante

Soit la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 2.$$

1. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
Montrer que « $a \geqslant 3$ et $b \geqslant 3$ » est une condition suffisante pour que f soit croissante.

2. En déduire son tableau de variation.

Montrer une condition suffisante revient à montrer qu'une implication est vraie : montrer que A est une condition suffisante pour que B, c'est montrer $A \Rightarrow B$. Ici, il y aurait donc à montrer :
« Pour tous réels a, b tels que $a < b$ $[(a \geqslant 3$ ET $b \geqslant 3) \Rightarrow f$ est croissante$]$ ».
Nous voyons tout de suite qu"il y a un problème, précisons le : « f est croissante » est une proposition qui ne contient pas a et b comme variables libres, sa vérité ne dépend pas de ces variables. Il aurait fallu dire :
« montrer que "$a \geqslant 3$ et $b \geqslant 3$" est une condition suffisante pour que f soit croissante sur l'intervalle $[a, b]$ ».

Exercice n° 84 p 277 du manuel Repères :

84 On inverse !

Dans le repère (O, I, J), on considère les points $A(1\,;2)$, $B(-1\,;4)$, $C(-2\,;3)$ et $D(1\,;m)$.

1. Utiliser un **raisonnement par contraposée** pour montrer que si les droites (AB) et (CD) sont sécantes alors $m \neq 0$.

2. Utiliser un **raisonnement par l'absurde** pour montrer que si $m \neq 0$ alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

3. Dans cette question, on suppose que $m = -3$.
On considère les droites d'équation $y = -x + 3$ et $y = -2x - 1$.

a. Associer ces équations aux droites (AB) et (CD).

b. En utilisant le point $E(-4\,;7)$, utiliser un **raisonnement par contre-exemple** pour montrer que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

c. On considère la droite (d) d'équation $y = x + 1$.
Utiliser un **raisonnement par disjonction des cas** pour montrer que les droites (AB), (CD) et (d) ne sont pas concourantes.

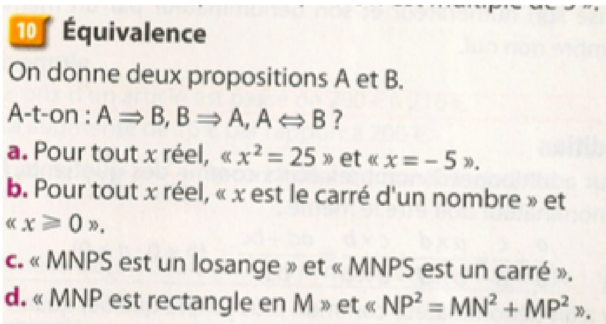
Le livre du professeur propose la correction suivante pour les deux premières questions :

1. Supposons que $m = 0$: les droites (AB) et (CD) ont même coefficient directeur, donc elles sont parallèles et donc non sécantes.

   D'où : si les droites sont sécantes, alors $m \neq 0$.
2. Supposons les droites parallèles : sachant que $m \neq 0$, on arrive à une contradiction en termes de coefficients directeurs des droites (AB) et (CD).

Nous avons vu page 168 que certains raisonnements par l'absurde pouvaient se ramener à des raisonnements par contraposée. C'est ce qui se passe ici. Imposer alors d'utiliser un type de raisonnement pour la première question et l'autre pour la deuxième risque plutôt d'amener de la confusion, puisque finalement les deux questions peuvent être résolues par des raisonnements similaires, et qu'il n'y a pas de raison de privilégier un type plutôt qu'un autre.
Pour la question 3., le manuel demande de faire un raisonnement par contre-exemple. S'il est sans doute évident pour les élèves qu'en trouvant un point d'intersection entre deux droites, on démontre qu'elles ne sont pas parallèles, il n'est par contre pas évident qu'ils voient qu'ils sont en train d'infirmer une proposition universelle (« quel que soit le point M du plan, M n'appartient pas à (AB) et à (CD) », c'est-à-dire « quel que soit le point M du plan, NON(M appartient à (AB) ET M appartient à (CD)) »).
Quant à la question 4., le livre du professeur donne comme correction : « $E \in (AB) \cap (CD)$ et $A \in (AB) \cap (y = x + 1)$ donc ces droites ne peuvent pas être concourantes. » On ne voit pas où est-ce qu'il y a disjonction des cas !

<u>Exercice n° 10 p 355 du manuel Math'x :</u>



10 Équivalence
On donne deux propositions A et B.
A-t-on : A $\Rightarrow$ B, B $\Rightarrow$ A, A $\Leftrightarrow$ B ?
a. Pour tout x réel, « $x^2 = 25$ » et « $x = -5$ ».
b. Pour tout x réel, « x est le carré d'un nombre » et « $x \geqslant 0$ ».
c. « MNPS est un losange » et « MNPS est un carré ».
d. « MNP est rectangle en M » et « $NP^2 = MN^2 + MP^2$ ».

Dans l'énoncé de cet exercice, il y a une tentative pour que les implications et équivalences soient explicitement universellement quantifiées. Mais dans les deux premières questions, il y a les propositions, qui sont identifiées par des guillemets, la quantification universelle, et le « et » entre les propositions. Tout cela constitue un mélange dans lequel il n'est pas facile de se repérer facilement pour reconstituer les implications et équivalences sur lesquelles il faut se prononcer.
Par ailleurs, pourquoi dans les deux premières questions la quantification universelle sur un réel x apparaît-elle et pas la quantification universelle sur des points du plan

dans les deux suivantes ? Remarquons que pour la troisième question, nous pourrions nous contenter d'une quantification sur un quadrilatère Q (ou un parallélogramme P, ou un rectangle R, changer le domaine auquel la variable est astreinte permettrait ainsi de voir que la valeur de vérité de la proposition en dépend), mais il est très rare en géométrie d'avoir des variables qui sont astreintes à un ensemble de figures, les seules variables sont généralement les points du plan ou de l'espace.

Exercice n° 76 p 90 du manuel Déclic :

76 **Logique**
La représentation graphique d'une fonction f passe par les points $A(-2\,;0)$, $B(0\,;-1)$ et $C(-6\,;2)$.
Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?
Mathilde : « f est une fonction affine. »
Sami : « Il est possible que f ne soit pas affine. »
Manon : « C'est sûr, f n'est pas une fonction affine ! »
Kevin : « Il est possible que f soit une fonction affine. »

Le livre du professeur propose la correction suivante :

> Les points A, B et C sont alignés. Seules les affirmations de Sami et Kevin sont légitimes.

Nous pouvons tout d'abord nous demander si « vraies » et « légitimes » sont des adjectifs synonymes. Ensuite, comme le dit bien l'énoncé, les personnages n'énoncent pas seulement la proposition, ils affirment qu'elle est vraie. La question devrait alors plutôt être : « ont-ils raison ou non d'affirmer que …? » Par ailleurs, il y a une différence importante entre l'affirmation de Mathilde et les autres, c'est que rien n'est utilisé pour marquer une quantification : il s'agit donc d'une proposition contenant une variable libre f, nous ne pouvons pas conclure sur sa valeur de vérité. Ce qu'affirme Mathilde est peut-être vrai, peut-être faux, la seule chose que nous pourrions lui dire c'est qu'elle a tort de l'affirmer (à moins qu'elle n'ait en sa possession d'autres informations). Dans les autre affirmations, des expressions sont utilisées pour marquer la quantification, elles pourraient être formulées ainsi :
Sami : « il existe une telle fonction qui est non affine »
Manon : « il n'existe pas de telle fonction qui est affine »
Kevin : « il existe une telle fonction qui est affine »
Manon aussi a donc tort d'affirmer cela, mais nous ne sommes pas dans le même cas que Mathilde : Mathilde a tort d'affirmer ce qu'elle disait car nous ne pouvions pas savoir si c'était vrai ou faux, Manon a tort d'affirmer ce qu'elle dit car nous savons que c'est faux. La contextualisation de cet exercice dans une situation mettant en jeu des personnages, des affirmations, compliquent finalement le but visé quant au contenu mathématique.

Annexe I

Questionnaire à destination des enseignants de Seconde

Enquête sur l'enseignement de la logique au lycée

Dans le cadre d'une thèse de didactique des mathématiques, je m'intéresse à la place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée, notamment dans le cadre des nouveaux programmes pour le lycée.
La plupart des questions portent sur la classe de Seconde où les nouveaux programmes et les nouveaux manuels ont été mis en œuvre l'année dernière, mais vous pouvez faire des commentaires sur les autres classes, éventuellement en les différenciant, les objectifs fixés par les programmes en matière de logique étant sensiblement les mêmes pour les trois années de lycée.
Je vous demande dans ce questionnaire des exemples d'activités, exercices, cours que vous avez pu faire avec vos élèves concernant la logique. Vous pouvez me fournir ces exemples en joignant à votre réponse des fichiers électroniques par mail :
zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr
ou en indiquant dans le questionnaire des références dans des manuels ou des liens vers des sites de ressources en ligne.

Nom, Prénom :

Adresse mail à laquelle je peux vous contacter :

Lycée :

Afin que je puisse situer votre scolarité par rapport à la période des maths modernes, pouvez-vous indiquer l'année d'obtention de votre baccalauréat :

1) Avez-vous régulièrement des classes de Seconde ?

OUI [ ]   NON [ ]

Si oui, précisez depuis quand :

2) De quel manuel disposent vos élèves de Seconde ?

3) Travaillez-vous sur des notions de logique avec vos élèves de Seconde ?

Déjà avant les nouveaux programmes de 2009	OUI [ ] NON [ ]
Depuis les nouveaux programmes de 2009	OUI [ ] NON [ ]

4) Quelles sont selon vous les notions de logique qui doivent être travaillées en cours de mathématiques au lycée ? Qu'ont à apprendre les élèves sur ces notions ? Y a t-il des thèmes mathématiques (chapitres) privilégiés pour ce travail ?

Notions à travailler	Apprentissages visés	Thèmes mathématiques privilégiés

5) Dans l'introduction au nouveau programme de mathématiques pour la classe de seconde de juillet

2009[1] figure un paragraphe intitulé « raisonnement et langage mathématiques ». Une partie de ce paragraphe était déjà présente dans le programme de 2001, mais il est complété en 2009 et accompagné d'un tableau fixant des objectifs pour le lycée en matière de notations et raisonnement. Pour construire un enseignement permettant d'atteindre les objectifs fixés par le programme :

Vos connaissances en matière de logique mathématique vous paraissent-elles suffisantes ?	OUI [ ]	NON [ ]
Avez-vous trouvé ou conçu facilement des activités à proposer à vos élèves ?	OUI [ ]	NON [ ]

6) Avez-vous consulté le document ressources « Notations et raisonnement mathématiques » (dans les ressources disponibles à partir de la page indiquée en bas de page) ?

OUI [ ] NON [ ]

- Si oui, vous a t-il fourni des pistes pour mettre en place un travail sur des notions de logique ?

OUI [ ] NON [ ]

- Si oui, qu'est-ce qui vous a semblé intéressant ?

7) Avez-vous consulté d'autres ressources ?

OUI [ ] NON [ ]

- Si oui, qu'est-ce qui vous a semblé intéressant ?

8) Le programme de Seconde précise que « les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme ». Selon vous, est-ce effectivement comme cela que doivent être enseignées des notions de logique ? Si oui, pourquoi ? Si non, quelle autre forme serait plus appropriée ?

9) Dans le programme de 1ère de 2010, le commentaire évoqué dans la question 8 est complété par « Il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation ». Ces moments d'institutionnalisation vous semblent-ils effectivement nécessaires ? Pourquoi ?

1 http://eduscol.education.fr/cid52773/enseignement-commun-2nde-mathematiques.html

10) De votre côté, avez-vous mis en place de tels moments d'institutionnalisation avec vos classes de Seconde en 2010-2011 ?

Sur les connecteurs et/ou	OUI [ ]	NON [ ]
Sur la négation	OUI [ ]	NON [ ]
Sur les quantificateurs	OUI [ ]	NON [ ]
Sur l'implication	OUI [ ]	NON [ ]
Sur l'équivalence	OUI [ ]	NON [ ]
Sur les différents types de raisonnement (par l'absurde, par disjonction des cas, par contraposée)	OUI [ ]	NON [ ]

11) Voici deux présentation des connecteurs et/ou issues de manuels de 2010 :

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

Manuel Symbole

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

- Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :
– « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
– « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :
– « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.
– « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

- On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».
Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».
Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)
« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)
La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

Manuel Indice

Laquelle de ces deux présentations vous paraît la plus appropriée pour un enseignement de ces notions en Seconde ? Pourquoi ?

12) De votre côté, avez-vous travaillé explicitement avec vos élèves sur les connecteurs et/ou ?

OUI [ ] NON [ ]

- Si oui, quels activités/exercices avez-vous proposés pour cela ?
- Si non, pourquoi ?

13) Avez-vous donné une définition de ces connecteurs ?

OUI [ ] NON [ ]

- Si oui, quelle était-elle ?
- Si non, pourquoi ?

14) Avez-vous d'autres remarques sur l'enseignement de la logique au lycée ?

15) Avez-vous eu un cours de logique mathématique (même très sommaire) pendant votre scolarité (enseignement secondaire ou supérieur) ou pendant votre formation initiale de professeur ?

OUI [ ] NON [ ]

- Si oui, pourriez vous préciser à quel niveau et quel en était le contenu ?

16) Avez-vous reçu une formation en logique mathématique dans le cadre de la formation continue ?

OUI [ ] NON [ ]

- Si oui, pourriez-vous préciser en quelle année, qui la proposait, sur quelle durée et quel en était le contenu ?

Merci d'avoir pris le temps de répondre à ce questionnaire

Accepteriez-vous que je prenne contact avec vous afin d'avoir des renseignements plus détaillés sur ces questions ?

OUI [ ] NON [ ]

– si oui, merci de me communiquer votre adresse mail, ou un autre moyen de vous joindre :

Zoé MESNIL

Pour toutes questions, remarques, précisions : zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr

Annexe J

Planning du stage

Le planning du stage est présenté dans les tableaux ci-après. Dans la deuxième colonne sont indiquées les grandes séquences de la formation. Dans la troisième colonne sont indiqués les contenus abordés.

Mardi 22/01/2013, matinée	Introduction	Présentation de l'IREM, question « Pourquoi vous êtes-vous inscrits à ce stage », Présentation du programme du stage
	Tests	Exercices mettant en jeu des notions de logique, questionnaire pour la thèse, questionnaire de T. Joly.
	Exposé théorique sur l'analyse du langage mathématique	Quantification universelle implicite des implications, propositions, expressions mathématiques différence entre syntaxe et sémantique, statut des variables, différence entre « si A alors B » et « A donc B ».
Mardi 22/01/2013, après-midi	Exposé théorique sur la dialectique utilisateur/démonstrateur	Structure modulaire du raisonnement mathématique, règles d'introduction, règles d'élimination, tableau des manipulations des quantificateurs, notion d'énoncé plus fort, plus faible.
	Présentation d'activités proposées en classe par des membres du groupe Logique	Présentation d'une activité autour des connecteurs ET et OU (Sixième), présentation d'une activité autour des théorèmes de Thalès et Pythagore et des notions de réciproque et contraposée (Troisième), Présentation d'exercices autour des connecteurs ET et OU (Seconde), Présentation d'une activité Vrai ou Faux (Terminale).

FIGURE J.1 – Planning de la première journée du stage

Mercredi 23/01/2013, matinée	Exposé sur l'histoire de la logique, puis sur l'histoire de la place de la logique dans les programmes	
	Présentation d'activités proposées en classe par des membres du groupe Logique	Présentation d'une activité autour des suites faisant intervenir un algorithme (Terminale), présentation d'une activité sur la quantification universelle implicite des implications (Première S).
	Exposé théorique	Différence entre négation et contraire, carré des oppositions.
Mercredi 23/01/2013, après-midi	Analyse d'extraits de manuels.	
	Exposé théorique sur l'analyse du langage mathématique	Signes mutificateurs, mutifications cachées, expressions synonymes, propositions ouvertes, propositions closes, paradoxe de Russell.

FIGURE J.2 – Planning de la deuxième journée du stage

Jeudi 28/03/2013, matinée	Exposé théorique de logique mathématique : un peu de théorie des ensembles	
	Présentation d'activités proposées en classe par les stagiaires	Présentation d'une activité Vrai ou Faux (Sixième), Présentation d'activités proposées dans le cadre d'un atelier Logique (Sixième).
Jeudi 28/03/2013, après-midi	Présentation d'activités proposées en classe par les stagiaires	Présentation de l'activité Circuit (Seconde), Présentation d'une activité Vrai ou Faux (Seconde).
	Exposé théorique : utilisation du calcul propositionnel pour la modélisation d'une énigme	
	Exposé théorique sur la déduction naturelle	

FIGURE J.3 – Planning de la troisième journée du stage

Annexe K

Première journée du stage « Initiation à la logique 2013

Il y avait 24 présents lors de la première journée, 25 lors de la deuxième journée, et 23 lors de la troisième journée, dont 4 n'ont pu rester que le matin.

K.1 Présentation de la formation

Dialogue 0.1 : Motivations des stagiaires pour s'inscrire à ce stage :

– une professeure de physique :

> — S1 : Le CAPES de physique a été supprimé depuis deux ans.
>
> — R. Cori : Ah bon ?
>
> — S1 : Le CAPES interne. Donc voilà, je me dis que, à moyen terme, il va falloir se reconvertir, voire faire les deux. C'est dans ce cadre là que j'en suis à mon deuxième stage.
>
> — R. Cori : Et parmi les stages de mathématiques, pourquoi avoir choisi celui de logique ?
>
> — S1 : Dans ce qui était proposé ça m'avait l'air le plus abordable pour moi et en rapport avec ma reconversion.

– une ancienne professeure d'électronique dans la filière Sciences et Technologies Industrielles :

> — S2 : Moi je suis un peu dans le même cas que la dame, je suis reconvertie. J'étais prof de STI électronique et j'ai fait ma reconversion l'an passé et j'ai été titularisée professeur de mathématiques au 1er septembre 2012. Donc ben c'est... en tant que prof d'électronique, je pense que j'ai des notions de logique quand même.
>
> — R. Cori : Oui, c'est ce que j'allais dire.
>
> — S2 : Mais j'ai envie de découvrir la façon dont on les investit en mathématiques.

– Une professeure de lycée

— S3 : Moi ça fait longtemps que j'en ai fait de la logique. J'enseigne au lycée et avec le public que l'on a je trouve ça très difficile d'enseigner la logique, donc je voulais avoir des pistes, des idées.

— R. Cori : Vous trouvez difficile d'enseigner la logique, ce que je comprends très bien, est-ce que vous trouvez ça utile ou inutile de le faire ?

— S3 : Ça dépend des publics. En Seconde je trouve que c'est trop prématuré, je pense plutôt à des élèves qui vont s'orienter vers les sciences.

— R. Cori : D'accord, on discutera ce point de vue qui est discutable.

– Un professeur qui était en collège et première année de lycée :

— S4 : Je cherche à avoir une formation par rapport à la lecture des nouveaux programmes, à la réforme des lycées. Et je suis confronté à des problèmes. Effectivement comment enseigner la logique et les différents raisonnements avec les élèves ? En passant par des exemples ? En faisant un cours de logique ? Je ne sais pas trop comment m'y prendre.

— R. Cori : Attention, si vous faites un cours de logique, j'en connais qui vous taperont sur les doigts.

— S4 : Voilà ! Et après j'ai regardé pas mal dans les bouquins, j'avoue que je suis quand même un peu. . .

— R. Cori : Que vous soyez perdue en regardant les bouquins c'est plutôt rassurant parce que les bouquins sont une catastrophe, on va y revenir.

— S4 : C'est pour ça que je viens, pour avoir des pistes aussi.

– Une enseignante en collège :

— S5 : Mes élèves découvrent la démonstration en mathématiques, et justement j'aimerais avoir quelques pistes pour faire des exercices, parce que pour moi la logique c'est quand même ce qui structure un raisonnement mathématique, une démonstration mathématique.

– Un enseignant au collège venue avec sa collègue :

— S6 : Nous on anime un atelier qu'on appelle *Logique* au collège et c'est vrai qu'on a aucune connaissances théoriques sur la logique formelle. C'est aussi pour . . .

Dialogue 0.2 : Sondage sur la formation en logique :

— R. Cori : Qui parmi vous a suivi un enseignement de logique au cours de sa formation universitaire en mathématiques ?

— Z. Mesnil : Ben ou avant universitaire parce qu'il fut une époque

— R. Cori : Non, d'abord universitaire, je voudrais sérier. Alors vous vous avez fait de la logique à l'université, dans quelle université ?

— S1 : Paris 7

— R. Cori : D'accord, et vous ?

— S2 : En ce moment avec vous [1].

— R. Cori : Ah d'accord. Non mais avant, dans votre formation universitaire, avant de devenir prof de maths vous n'en aviez jamais fait ? Bon d'accord, et donc ça fait 2 personnes sur je ne sais pas combien. Ah oui vous aussi.

— S3 : Moi j'en ai fait un petit peu en prépa.

— R. Cori : En prépa, d'accord, sous la forme de un chapitre au début de l'année ?

— S3 : Exactement.

— R. Cori : La première semaine, d'accord. Et les autres pas du tout ?

Murmures : non, en prépa, initiation

— R. Cori : Personne n'a fait à l'université, à part vous, un module intitulé logique ou quelque chose de ce genre ? D'accord. Et vous qui avez fait de l'électronique, vous aviez quand même, j'imagine, un cours de calcul booléen ?

— S4 : Oui.

— R. Cori : Voilà, d'accord. Bien, et alors qui est-ce qui en a fait au lycée en étant élève ? Ah ben non non c'est pas tout le monde. Ça a existé à certaines époques et puis après ça a totalement disparu. Donc vous oui, oui ça fait pas beaucoup de monde quand même.

Dialogue 0.3 : Présentation de l'organisation du stage :

— R. Cori : Bon alors, on vous explique peut-être comment on organise ces journées. Donc ce matin vous allez subir un peu mon baratin, je vais essayer de vous donner quelques éléments qui permettront peut-être de mieux vous situer dans ce que vous entendrez de la part de mes collègues à partir de cet après-midi. Et donc cet après-midi vous aurez des témoignages de collègues enseignants du secondaire, enfin sauf qu'apparemment il y en qui sont en difficulté.

— Z. Mesnil : On va voir.

— R. Cori : Et puis vous aurez un collègue qui va vous, qui est d'ailleurs l'auteur de ce test sur les formulations en français quelque soit il existe il existe quelque soit, et qui est un spécialiste de la théorie de la démonstration qui est une branche des mathématiques, et qui viendra justement vous parler un peu des preuves mathématiques. Et ça, ça sera plutôt cet après-midi. Et puis alors les bouquins c'est cet après-midi ?

— Z. Mesnil : Non, demain après-midi.

1. Cette année là, un cours de logique a été proposé dans le cadre d'un master enseignant s'adressant à des professeurs déjà en activité.

— R. Cori : Donc demain nous aurons dans la matinée un autre collègue qui vous parlera d'une expérience faite dans un lycée avec une collègue dans l'académie de Rennes, et puis l'autre chose que j'oublie c'est quoi ?

— Z. Mesnil : On a dit un petit historique le matin et puis une autre collègue qui viendra.

— R. Cori : C'est ça, on va faire un petit exposé historique sur la logique mathématique.

— Z. Mesnil : Et une collègue qui viendra présenter une activité qu'elle a faite en Terminale avec logique et algorithme, parce que c'est souvent une question « comment est-ce qu'on peut lier les deux ? »

— R. Cori : c'est ça, le lien logique algorithmique sera exploré. Et puis donc demain après-midi on s'occupera des bouquins essentiellement.

— Z. Mesnil : Mais du coup on fera un peu comme préconisent les programmes c'est-à-dire que quand on montrera des activités etc. ça sera aussi l'occasion soit de réinvestir des éléments théoriques qui ont déjà été dits soit au passage d'en dire qu'on avait pas encore dit et qui nous paraissent importants pour bien voir ce qui est en jeu dans l'activité.

Dialogue 0.4 : Rappelle des deux axes principaux de la formation :
– la logique est une branche des mathématiques :

— R. Cori : Alors je voudrais dire deux choses avant qu'on commence. La première c'est que la logique c'est une branche des mathématiques à part entière, autant que la topologie, le calcul différentiel, la géométrie. Sa spécificité, nous venons d'en avoir une preuve, je pense que si j'avais demandé qui a fait de l'algèbre au cours de sa formation universitaire, personne, enfin peut-être à part notre collègue physicienne et notre collègue électronicienne, tout le monde aurait levé la main. Bon. En logique vous avez vu le résultat : c'est très très peu enseigné. Cependant c'est une branche des mathématiques et quand on fait de la logique on fait des mathématiques. Alors évidemment une idée assez répandue c'est de dire ah oui mais la logique c'est quand même à part, c'est vraiment à la frontière des mathématiques, c'est vraiment en dehors des mathématiques. Alors d'un certain point de vue c'est vrai parce qu'on s'y pose des problèmes qui ne sont pas les mêmes. Quand on fait de la logique, on se pose inévitablement des problèmes au sujet de l'activité mathématique en général, ce qu'on ne fait pas quand on fait de la topologie ou du calcul différentiel. Néanmoins quand on se met à étudier des notions de logique en tant que notions de mathématiques et bien il faut bien avoir à l'esprit que ce qu'on est en train de faire c'est des mathématiques et il faut avoir la même attitude que quand on fait de la géométrie du calcul diff de l'analyse etc. C'est une branche des mathématiques. La deuxième chose c'est que c'est une branche jeune. C'était complètement en dehors des mathématiques jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle et donc c'est une branche qui est récemment une branche des mathématiques et ça c'est important pour se situer.

– le langage va être au coeur de la formation :

— R. Cori : Et la deuxième chose que je veux dire c'est que bon, on a eu dans les quelques témoignages qu'on a entendu tout-à-l'heure, on a entendu dire ce qu'on entend toujours dire, à savoir ce qui est important le raisonnement la démonstration etc. Mais il faut bien voir, alors c'est en effet extrêmement important et nous allons abondamment en parler comme je vous l'ai dit, mais il faut quand même savoir que la logique s'occupe essentiellement de deux choses : certes le raisonnement, la démonstration, mais elle s'occupe aussi du langage. Et le langage, l'expression en mathématiques c'est quelque chose de fondamental sur lequel l'accent n'est pas suffisamment mis, à notre sens en tout cas, et nous allons beaucoup insister, peut-être trop à vos yeux, vous le direz après, sur les aspects langage, c'est absolument essentiel d'avoir une réflexion sur ce que c'est que le langage, comment on parle les mathématiques, qu'est-ce qu'on dit, en quoi ça consiste un discours mathématique. Et il y a des éléments assez performants pour analyser ce langage et pour se poser des questions qu'en général on ne se pose pas parce que, ben parce que la coutume en mathématiques c'est de ne pas faire attention au langage. Le langage ça semble être un… on en est équipé naturellement et on n'y fait pas vraiment attention. Et nous on pense que ça peut être souvent une source d'incompréhension, d'erreur même de la part des élèves, le fait de ne pas avoir fait attention aux ambiguïtés du langage, aux difficultés de l'expression etc. Donc on va beaucoup beaucoup insister sur la partie langage.

K.2 Test de début de stage

Dialogue 0.5 : Préambule au test

— R. Cori : Ayant dit tout ça je vous propose de passer un certain temps à réfléchir sur ces exos là et à remplir le test. Il y a une activité d'ordre mathématique et une activité d'ordre extra-mathématique. Voilà. Je suppose que dans l'exercice 1 il y a un mot que vous ne comprenez pas. Confirmez moi ça s'il vous paît ?

— S1 : Moi ça serait « naturel ».

— R. Cori : Ah ça serait naturel. Ben ce mot vous avez intérêt à l'apprendre, parce que si vous enseignez les mathématiques.

— S1 : J'ai oublié.

— R. Cori : Bon les entiers naturels ce sont les entiers positifs ou nuls 0, 1, 2, 3, voilà c'est tout naturel. Mais je pense qu'il y a un autre mot qui oui ?

— S2 : C'est se prononcer : c'est dire si c'est vrai, si c'est faux ?

— R. Cori : Non sur l'ambiguïté de la question ça c'est voulu. Voilà. En effet c'est pas un exercice.

— S3 : Astreinte, ça veut dire quoi « astreinte » ?

— R. Cori : Voilà, alors le mot que vous ne comprenez pas c'est « astreinte ». Alors donc c'est un mot qui est en effet pas très utilisé. Quand je dis « la variable n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels », ça veut dire que lorsque vous la rencontrerez dans le discours qui suit, et bien elle ne pourra désigner que des entiers naturels, c'est une sorte d'ensemble de référence.

— S4 : Pourquoi vous ne dites pas « n appartient à $\mathbb{N}$ » ?

— R. Cori : Pourquoi je ne dis pas ? C'est une très bonne question, je vous remercie. Pourquoi est-ce que je ne dis pas « appartient à » ? Bon, et bien parce que je tiens à faire la différence entre la variable en tant que symbole, la lettre, et puis l'élément qu'elle représente, entre ce qu'on appelle le signifiant et le signifié. Vous avez des éléments, les entiers, et puis vous utilisez des lettres, des variables pour les nommer. Quand je dis « la variable n », je ne parle pas d'un élément, je parle de cette lettre là, et quand je dis « elle est astreinte » ça veut dire que les éléments qu'elle est appelée à désigner dans ce qui suit seront des éléments qui appartiennent à $\mathbb{N}$, est-ce que vous voyez la distinction ? Voilà, c'est pour ça que je dis « astreinte », c'est pas uniquement pour vous embêtez, voilà. Donc à partir de là vous pouvez y aller.

Université Paris Diderot   **Janvier 2013**
IREM Groupe logique   **stage "Initiation à la logique"**

Exercice 1.
Pouvez-vous vous prononcer sur chacun des énoncés suivants (dans lesquels la variable n est astreinte à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels) ?

(1) n est un carré parfait et n est impair.

(2) n est impair $\Rightarrow$ n est premier.

(3) n est divisible par 5 ou n n'est pas divisible par 4.

Exercice 2.

On dispose de trois formes en bois :

un disque ● , un carré ■ et un triangle ▲

On sait que l'une des formes est **rouge** , une autre **bleue** , et une autre jaune .

● ● ● ?   ■ ■ ■ ?   ▲ ▲ ▲ ?

Voici trois affirmations qui concernent ces pièces :

1) **Si le carré est bleu alors le disque est jaune.**
2) **Si le carré est jaune alors le disque est rouge.**
3) **Si le disque n'est pas bleu alors le triangle est jaune.**

Quelle est la couleur de chaque pièce ?

Exercice 3.

(1) Vous connaissez le proverbe « La nuit tous les chats sont gris ». Que proposeriez-vous comme négation de cette phrase ?

(2) Voici un énoncé de la « propriété du triangle rectangle » extrait du manuel *Phare* 4^e (dans le chapitre sur le théorème de Pythagore) :

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés.

Que proposeriez-vous comme négation de cette propriété ?

(3) Voici un énoncé du théorème de Thalès extrait du manuel *Transmath* 3^e :

(d) et (d') sont deux droites sécantes en A.
B et M sont deux points de (d), distincts de A.
C et N sont deux points de (d'), distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Quelle formulation proposeriez-vous pour la réciproque de ce théorème ?

Exercice 2

Exercice 2.

On dispose de trois formes en bois :

un disque ● , un carré ■ et un triangle ▲

On sait que l'une des formes est **rouge** , une autre **bleue** , et une autre **jaune** .

● ● ● ?   ■ ■ ■ ?   ▲ ▲ ▲ ?

Voici trois affirmations qui concernent ces pièces :

1) **Si le carré est bleu alors le disque est jaune.**
2) **Si le carré est jaune alors le disque est rouge.**
3) **Si le disque n'est pas bleu alors le triangle est jaune.**

Quelle est la couleur de chaque pièce ?

Analyse a priori :

Cet exercice met en jeu des implications à prémisse fausse. Il donne l'occasion de voir comment, même sans se référer explicitement à la table de vérité de l'implication, on considère dans la résolution de la tâche qu'une implication dont la prémisse est fausse est vraie.

Cet exercice est une variante de celui ci-dessous [2] :

On considère trois nombres réels x, y et z.
1. Écrire un énoncé synonyme de

« l'un des trois nombres x, y et z est nul et les deux autres sont de signes contraires »

en utilisant exclusivement les lettres x, y et z, le symbole 0, le signe $=$, le signe $<$, les connecteurs propositionnels « non », « et », « ou », $\Longrightarrow$ et les parenthèses.

Peut-on obtenir un énoncé synonyme plus court en s'autorisant un symbole supplémentaire ?
2. On suppose que l'énoncé de la question 1 est vrai, ainsi que les trois énoncés suivants :

(1) $y = 0 \Longrightarrow x > 0$

(2) $y > 0 \Longrightarrow x < 0$

(3) $x \neq 0 \Longrightarrow z > 0$

Comparer les nombres x, y et z.

Nous proposons chaque année l'exercice sous cette deuxième forme en séance de Travaux Dirigés du cours Langage Mathématique 1 (pour des étudiants de mathématiques en première année d'université). La version « remaniée » était destinée à pouvoir être proposée à des élèves plus jeunes, l'exercice peut alors être résolu avec des pièces de bois.

La démarche de plusieurs étudiants de LM1 est la suivante pour la question 2 :

- Ils supposent la prémisse de l'implication (1) vraie, c'est-à-dire $y = 0$. Ils en déduisent, grâce à cette même implication, que $x > 0$. En utilisant l'implication (3), ils déduisent alors que $z > 0$, ce qui amène à une contradiction car il ne peut pas y avoir deux de ces nombres strictement positifs.
- Ils supposent alors la prémisse de l'implication (2) vraie, c'est-à-dire $y > 0$. Ils en déduisent $x < 0$, puis en utilisant l'implication (3), ils déduisent que $z > 0$, ce qui amène à une contradiction car il ne peut pas y avoir deux de ces nombres strictement positifs.
- Ils supposent finalement la prémisse de l'implication (3) vraie, c'est-à-dire $x \neq 0$. Ils en déduisent que $z > 0$, et donc $x < 0$, et $y = 0$. Mais alors, d'après l'implication (1), on a $x > 0$, d'où une contradiction.
- Ils concluent finalement qu'il n'y a pas de solution, c'est-à-dire pas de nombres x, y, z vérifiant les conditions exigées.

Il y a une et une seule combinaison vérifiant les conditions imposées et les trois implications : $y < 0$, $x = 0$, $z > 0$ ou carré rouge, disque bleu, triangle jaune dans la

2. La première question n'est pas reprise, pour la deuxième question, il y a correspondance : x/disque, y/carré, z/triangle, et strictement négatif/rouge, égal à 0/bleu, strictement positif/jaune.

version distribuée aux stagiaires (après élimination des autres possibilités comme dans le raisonnement ci-dessus, on vérifie que celle-là convient). Cette combinaison à la particularité de rendre les prémisses de chacune des trois implications fausses. Les étudiants qui suivent la démarche indiquée ci-dessus agissent comme si les prémisses devaient être vérifiées (avec une contradiction quand même par rapport à cette conception, puisqu'ils essaient de vérifier les prémisses des implications (2) et (3) alors qu'ils ont vu qu'il n'était pas possible de d'avoir celle de l'implication (1) vraie). Il manque dans leur raisonnement l'étape où l'on conclut que $y < 0$ après avoir éliminé les deux autres possibilités. Difficile de savoir si ce manque est dû à une conception erronée de l'implication ou à un manque de pratique de raisonnement impliquant de la combinatoire et l'exhaustion des cas.
La démarche qui consiste à essayer les combinaisons pour lesquelles les prémisses des implications sont vraies est la plus rapide. Il est aussi possible de lister toutes les combinaisons possibles (il y en a 6) et de vérifier pour chacune si les implications sont vraies. Dans cette démarche, les implications manipulées sont des implications entre deux propositions closes. C'est donc la table de vérité du connecteur IMPLIQUE qui permet de conclure.

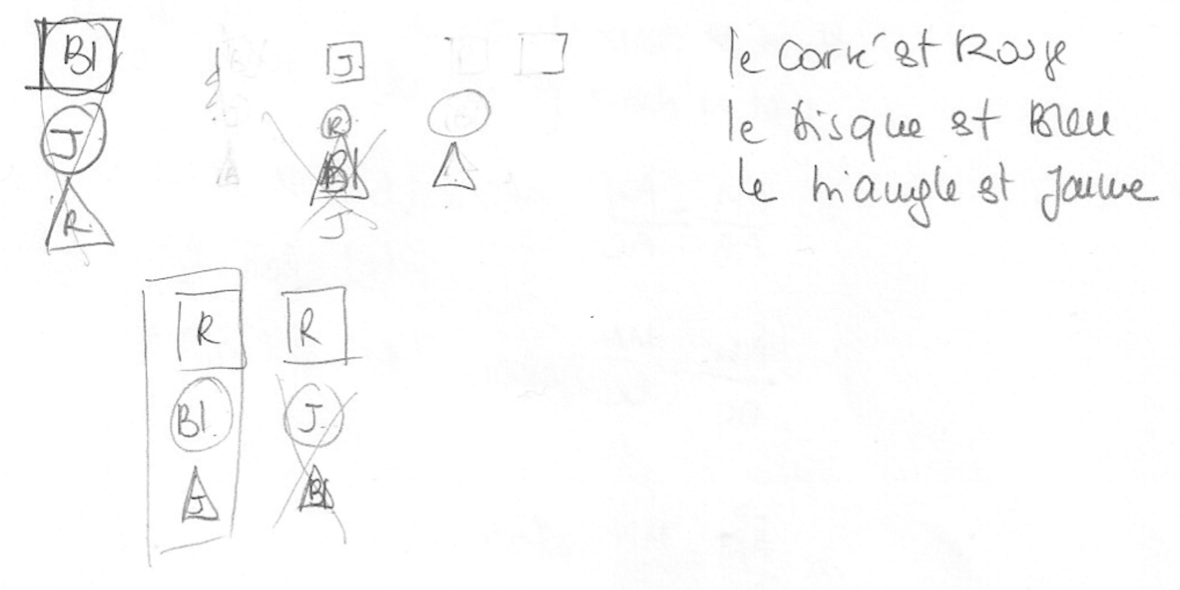
<u>Réponses des stagiaires :</u>
Un stagiaire seulement a conclu à l'impossibilité de trouver une combinaison vérifiant toutes les implications, de la même manière qu'indiquée ci-dessus pour les étudiants de LM1. Seize autres ont donné la bonne combinaison [3] :

- 5 ont seulement donné la réponse sans justification.
- chez 5 stagiaires nous retrouvons la trace de toutes les étapes du raisonnement (élimination de carré bleu, puis jaune, donc carré rouge, puis élimination de disque jaune). Parmi ceux-là, 1 précise que le « cas » trouvé finalement « est possible », puis conclut « donc le carré est rouge, le disque bleu et le triangle jaune. »
- 4 stagiaires ont représenté tous les cas, mais toutes les étapes du raisonnement n'apparaissent pas.
- 2 stagiaires n'ont pas décrit la dernière étape du raisonnement.

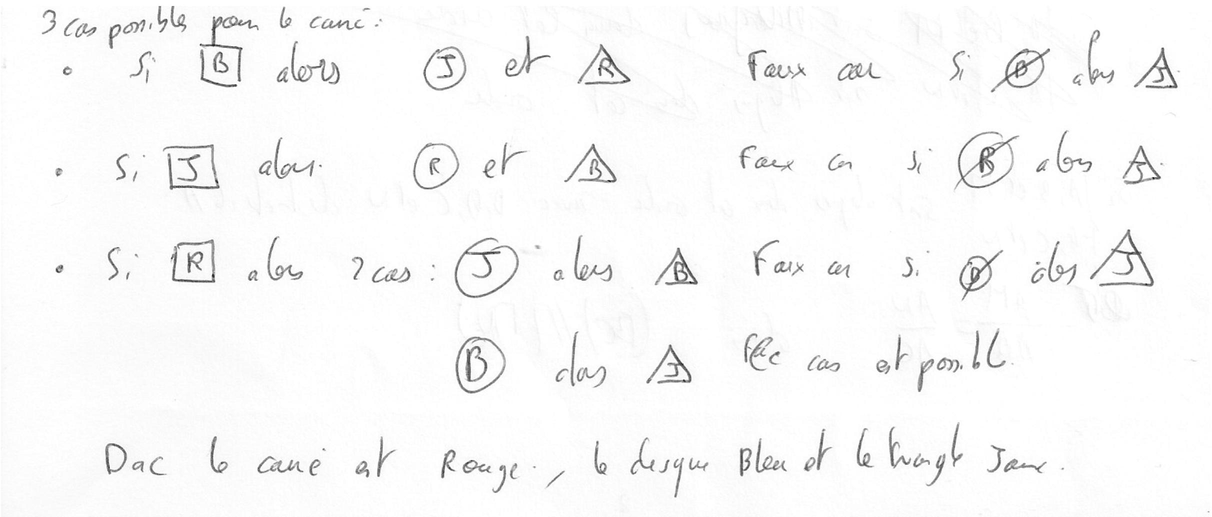
Au-delà du raisonnement à mettre en œuvre pour résoudre cet exercice, nous suggérons aux stagiaires, s'ils le proposent dans leur classe, de se pencher sur les représentations utilisées dans la résolution. Lors du stage 2013, sur les 11 stagiaires ayant expliqué leur démarche, 6 utilisent des formes avec à l'intérieur une lettre indiquant la couleur.

3. Un stagiaire n'a pas fait cet exercice.

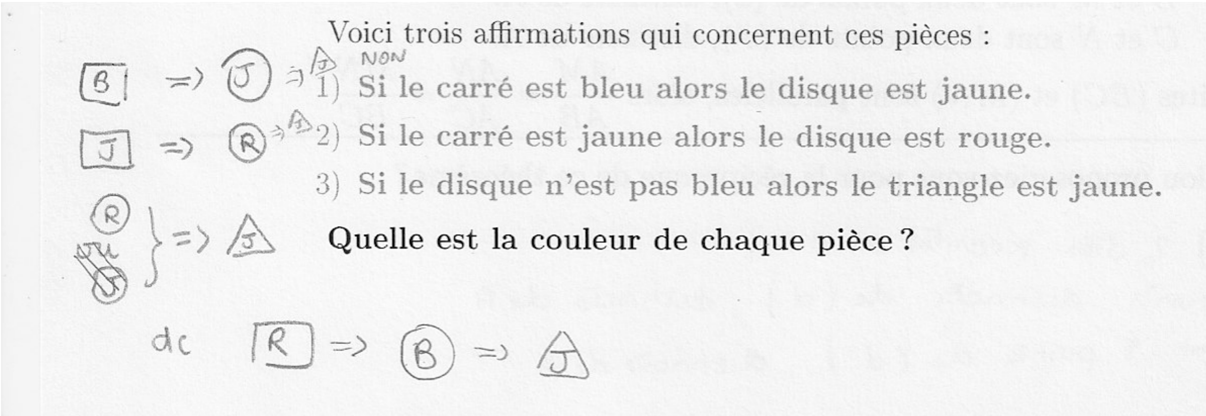
Dans la réponse présentée ci-dessous, ces représentations sont utilisées pour visualiser les différentes combinaisons :



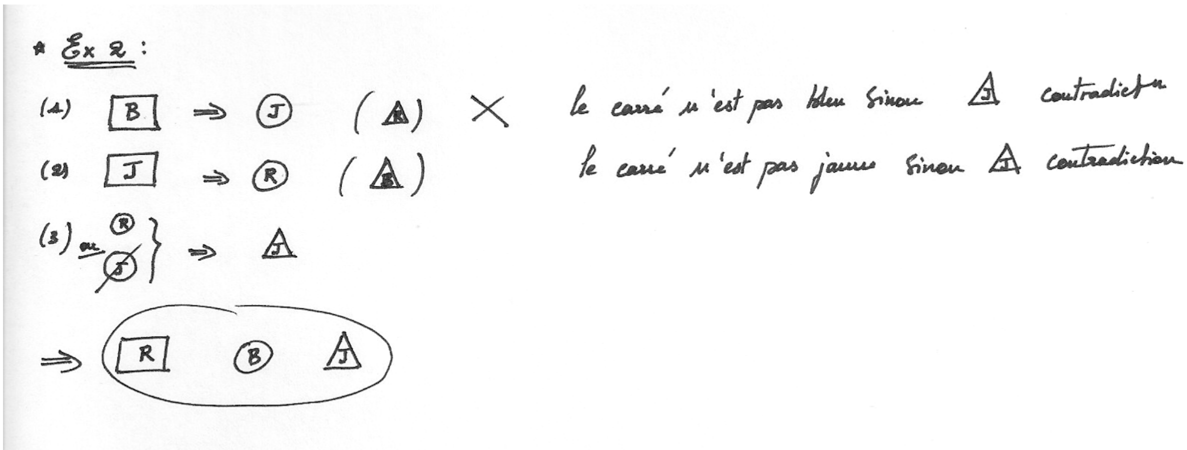
Dans cette autre réponse, ces représentations fonctionnent comme des abréviations pour des propositions, avec en plus l'utilisation des symboles barrés pour la négation de ces propositions :



Dans cette troisième réponse, les symboles fonctionnent de même comme des abréviations pour des propositions, la flèche d'implication est utilisée pour reprendre les « si… alors … » de l'énoncé, mais est utilisée à tort dans la conclusion à la place des connecteurs ET :



Enfin, cette quatrième réponse se rapproche de la précédente (les étapes permettant de conclure à des contradictions sont moins clairement exposées), il y a aussi une utilisation abusive de la flèche d'implication à la dernière étape où elle vient remplacer un « donc » :



Exercice 3, question 1

EXERCICE 3.

(1) Vous connaissez le proverbe « La nuit tous les chats sont gris ». Que proposeriez-vous comme négation de cette phrase ?

Analyse a priori :

Cet exemple [4] nous permet de discuter des dangers des exemples issus de la vie courante, et des quantifications universelles, notamment sur le temps, que l'on oublie souvent.

4. Qui est extrait du manuel *Transmath* et qui est discuté page 255.

Il donne aussi l'occasion d'aborder la différence entre négation et contraire, et entre négation et forme négative.

Réponses des stagiaires :

Lors du stage 2013, la majorité des stagiaires n'ont effectivement pas nié la quantification universelle sur les nuits. 5 d'entre eux proposent ainsi : « La nuit, il existe/il y a un chat qui n'est pas gris/qui est non gris. On retrouve aussi dans les réponses une autre erreur classique : « il existe des chats » au lieu de « il existe au moins un chat » (chez 3 stagiaires). Une autre réponse est plus ambiguë sur la quantification sur les chats : « la nuit, un chat n'est pas gris », une autre explicite la proposition initiale comme une implication et forme alors sa négation avec une conjonction : « C'est la nuit et il y a un chat non gris ». Ici, la quantification sur les nuits est ambiguë. 2 stagiaires donnent la forme négative « La nuit tous les chats ne sont pas gris », et 3 stagiaires donnent des réponses commençant par « Le jour ». Finalement, 3 stagiaires seulement donnent une négation avec une quantification existentielle sur les nuits, 2 d'entre eux ont d'ailleurs noté sur leur feuille une modélisation de la proposition initiale dans laquelle apparaissent les deux quantifications universelles.

Exercice 3, question 2

(2) Voici un énoncé de la « propriété du triangle rectangle » extrait du manuel *Phare* 4^e (dans le chapitre sur le théorème de Pythagore) :

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés.

Que proposeriez-vous comme négation de cette propriété ?

Analyse a priori :

Le but principal de cette question est de faire formuler la négation d'une implication. Tous les professeurs de mathématiques savent sans problème utiliser un contre-exemple pour montrer qu'une implication universellement quantifiée est fausse et savent expliquer ce qu'est un contre-exemple (un élément qui vérifie la prémisse de l'implication et pas sa conclusion). Mais écrire « formellement » la négation d'une proposition en « si…, alors… » peut être une difficulté. Il y a bien sûr le problème de la quantification universelle implicite, mais également le fait de ne pas savoir que la négation de la proposition $A \Rightarrow B$ est la conjonction A ET NON B, et non pas une implication.

Pour écrire une négation dans le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats, il est possible de recourir à des règles de traitement à l'intérieur de ce registre. Le choix d'un énoncé dans lequel n'apparaisse aucun symbole évite l'utilisation directe de telles règles.

Pour finir, le théorème de Pythagore est un emblème la géométrie du collège. L'évoquer provoque souvent des discussions sur sa présentation avec une équivalence ou avec deux une implications. Il permet aussi de traiter les notions de réciproque et de contraposée, de raisonnement direct et par contraposée.

Réponses des stagiaires :

Sur 17 réponses [5], on retrouve 9 formulations en « si…, alors… » pour la négation :

– 5 fois la forme NON $B \Rightarrow$ NON A. Il y a ici un souci, car le terme « hypoténuse » présent dans la conclusion de cette implication ne peut être utilisé que dans le cas d'un triangle rectangle. Deux de ces 4 stagiaires parlent alors de « plus grand côté » (par exemple : « si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors il n'est pas rectangle »). Un autre parle de toutes les égalités possibles : « si dans un triangle aucune longueur du triangle élevée au carré n'est égale à la somme des carrés des 2 autres longueurs … ». Un autre garde le terme hypoténuse, et le cinquième représente un triangle ABC rectangle en B et utilise les noms des points.
– 2 fois la forme NON$A \Rightarrow$ NON B, avec utilisation de « le plus grand côté » (par exemple : « si un triangle n'est pas rectangle alors le carré de la longueur du plus grand côté (s'il y en a un) n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des 2 autres côtés »).
– 2 fois la forme $A \Rightarrow$ NON B, ici avec conservation du terme « hypoténuse » qui ne pose pas de problème (par exemple : « si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de son hypoténuse n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés »).

Trois stagiaires proposent une négation commençant par « il existe un triangle rectangle », mais l'un d'entre eux ne termine pas la proposition (et écrit seulement ensuite « pour lequel le carré de la longueur … ») et il n'est pas possible de savoir comment il pensait terminer. Deux de ces trois stagiaires avaient également donné une réponse existentiellement quantifiée sur les nuits pour la question 1.

Un autre stagiaire propose « il y a des triangles rectangles » (même confusion entre « il y a des … » et « il existe au moins un » que dans la question précédente).

Enfin, quatre autres stagiaires proposent une négation sous la forme d'une conjonction mais sans quantification existentielle :

– 2 donnent la forme A ET NON B : « (triangle rectangle) et (il n'y a pas d'égalité) », et « un triangle est rectangle et le carré … n'est pas égal à … » Ces deux stagiaires ont d'abord écrit la contraposée, peut-être pour bien la différencier de la négation. Ils ont tous les deux utilisé une formulation assez schématique (utilisation de termes essentiels entre parenthèses pour le premier, utilisation de pointillés pour le deuxième) ce qui peut témoigner d'une démarche de formalisation de l'énoncé pour écrire sa négation, mais avec oubli de la quantification universelle implicite.

5. Un stagiaire n'a pas répondu à cette question.

– 2 donnent la forme NON A ET B et disent « le triangle n'est pas rectangle ».
Nous voyons dans ces réponses qu'un nombre non négligeable de professeurs ne savent pas formuler correctement la négation d'une implication. Ainsi, même si les professeurs savent utiliser des connaissances logiques dans l'activité mathématique (ils seraient certainement plus nombreux à savoir quoi faire pour convaincre quelqu'un que le théorème de Pythagore est faux, à savoir exhiber au moins un triangle rectangle ne vérifiant pas que le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés), ils ne savent pas forcément formuler ces connaissances.

Exercice 3, question 3

(3) Voici un énoncé du théorème de Thalès extrait du manuel *Transmath* 3ᵉ :

(d) et (d') sont deux droites sécantes en A.
B et M sont deux points de (d), distincts de A.
C et N sont deux points de (d'), distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Quelle formulation proposeriez-vous pour la réciproque de ce théorème ?

Analyse a priori :
Cet exercice permet de mettre en évidence que ce qui est appelé « Réciproque du théorème de Thalès » dans les manuels n'en est pas la réciproque au sens strict [6]. Nous pouvons alors nous attendre à des réponses différentes selon qu'elles seront influencées par cette habitude, ou par une rigoureuse application de la définition.
Par ailleurs, il y a dans cet énoncé des phrases d'introduction des variables, qui posent un contexte, et qui n'apparaissent pas dans la définition de la réciproque. Nous pourrons aussi voir comment elles sont traitées dans les réponses (absentes, reprises telles que, modifées).

Réponses des stagiaires :
Trois stagiaires n'ont pas répondu à cette question.
Cinq stagiaires donnent la réciproque stricto sensu, en reprenant le contexte à l'identique (un seul les ré-écrit, les autres utilisent des pointillés, ou des flèches).
Deux autres stagiaires rajoutent l'hypothèse de l'alignement dans le même ordre pour les points, puis la réciproque stricto sensu. Cette démarche est assez étonnante car elle est un mélange entre un respect strict de la définition de la réciproque et le rajout de l'alignement des points dans le même ordre qui fait partie de ce qui est classiquement appelé « Réciproque du théorème de Thalès » (appelée ci-après « réciproque classique », dans laquelle il n'y a que l'égalité des rapports entre les longueurs sur les côtés du triangle). Trois autres stagiaires au contraire n'ajoutent pas l'hypothèse de l'alignement des points dans le même ordre, mais mettent par contre comme hypothèse qu'il y

6. Au sens de la définition suivante : la réciproque de l'implication « Si A alors B » est l'implication « Si B alors A ».

a égalité entre deux des trois rapports. Ici encore on a un mélange entre réciproque classique et réciproque stricto sensu (qui n'est peut-être qu'un oubli dans la réciproque classique).Par ailleurs, trois stagiaires donnent la version classique de la « réciproque ». Un autre stagiaire donne la contraposée, et un autre essaie de le faire mais ne met qu'une différence entre deux rapports en hypothèse.
Finalement, là aussi peu de stagiaires donnent la réponse « logiquement correcte ». Ici, plutôt qu'un manque de connaissances en logique, c'est sans doute la réciproque classique qui influence les réponses.
Les réponses au 3 questions de l'exercice 3 peuvent être utilisées dans la formation comme base pour des discussions sur des notions de logique. Elles montrent un manque de connaissances « théoriques » à propos de ces notions. Peu de professeurs ont recours à une formalisation des énoncés et à des manipulations syntaxiques des propositions. Ceci conforte la nécessité d'apporter de telles connaissances dans le stage.

K.3 Exposé sur le langage mathématique

phase 1, la quantification universelle implicite des implications : prise de conscience

Dialogue 1.1 : Collectivisation des réponses :

— R. Cori : Bien alors, on sera amené à commenter les divers points de cette feuille d'exo. Je voudrais commencer par le premier, donc je commence par la proposition numéro 1 *(en écrivant)* « n est un carré parfait et n est impair » et je voudrais savoir qu'est-ce que vous avez dit de ça ? Vous vous êtes prononcez, oui ?

— S1 : Moi j'ai dit de tels nombres existent.

— R. Cori : De tels nombres existent, bon je note ça *(écrit)*. Qu'est-ce qu'il y a eu d'autre comme réponse ?

— S2 : J'ai dit que n était de la forme $2p + 1$ au carré.

— R. Cori : n est de la forme *(écrit)* $2p + 1$ au carré. Il y en a d'autres qui ont dit autre chose ?

— S3 : Faux.

— R. Cori : Pardon ?

— S3 : Faux.

— R. Cori : Vous avez dit faux, bon *(écrit)*. Qui a dit faux ? 1, 2, 3, 4, 4 personnes.

— S4 : Je me demande si l'énoncé est complet, parce qu'on ne peut pas décider s'il est vrai ou faux sans savoir si ça porte sur tout les entiers, ou si on veut savoir s'il existe un entier ou si c'est vrai pour tous les entiers.

— R. Cori : *(écrit)* Bon, je ne note pas tout ce que vous avez dit mais enfin ça commençait comme ça. Est-ce qu'il y a eu d'autres types de réactions ?

— S5 : Moi j'ai dit qu'elle était fausse, parce que par exemple elle est fausse pour 4.

— R. Cori : Vous êtes compté dans les 4 ?

— S5 : Comme elle est fausse pour un, elle est fausse tout le temps.

— R. Cori : Est-ce que vous êtes comptabilisé dans les 4 qui ont dit faux ? D'accord oui. Est-ce qu'il y en a qui ont dit autre chose ?

— S6 : Il y a un contre-exemple, contre-exemple pour $n = 4$.

— R. Cori : Contre-exemple pour *(écrit)*. C'est tout, il n'y a pas eu d'autres sortes de réactions, tout le monde se reconnaît dans ce qui est écrit là ? Alors je passe à la 2, on commentera après *(écrit « n est impair $\Rightarrow$ n est premier »)* Là dessus vous avez dit quoi ?

— Plusieurs S : Faux.

— R. Cori : Alors qui a dit faux ? Alors bon 1, 2, 3 ? 4, 5 , 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 , 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 vous êtes 25, bon et les deux qui n'ont pas dit faux ils ont dit quoi ?

— S7 : Ne se prononce pas.

— R. Cori : Ne se prononce pas, d'accord bon. Bien alors ce serait intéressant de voir avec la troisième. Voyons rapidement, sur la troisième vous dites quoi ?

Plusieurs stagiaires en même temps

— R. Cori : La même chose que la première . . . pas clair, pas clair et la même chose. Donc je ne l'écris pas là hein, 3 je note *(écrit)* « idem 1 », « pas clair », il y a eu d'autres choses que idem 1 et pas clair ?

— S8 : Faux.

— R. Cori : Faux. Alors je suis intéressé à comptabiliser les faux, qui a dit faux pour le troisième ? 1, 2 seulement. Ah bon, ça alors. Bon. Très bien. Alors bon, d'abord je tiens à vous remercier parce que personne n'a dit ici *(en montrant premier énoncé)* « question idiote », j'apprécie cette délicatesse.

Dialogue 1.2 : La différence de réactions face à ces énoncés est due à la présence de l'implication dans l'énoncé (2) :

— R. Cori : Bon alors ce qui est intéressant, c'est de comparer les réactions à 1 et 2 d'accord : dans un cas il y a une quasi unanimité pour dire c'est faux et dans l'autre cas il y a des hésitations, des on ne sait pas, des c'est ambigu, est-ce que c'est complet, j'ai un contre-exemple, ça existe enfin bon. Alors qu'est-ce qui provoque cette différence de réactions ?

— S1 : L'implication.

— R. Cori : C'est la présence de l'implication, l'implication a le mérite de vous mettre tous d'accord, c'est très bien, bon.

Dialogue 1.3 : Mise en évidence de la structure $P_1 \alpha P_2$ commune aux trois énoncés :

— R. Cori : Alors moi je regarde comment sont constituées ces deux phrases. Alors d'abord est-ce que nous sommes d'accord que on peut appeler ça des propositions mathématiques ? Alors dans le papier il y avait écrit « énoncé », moi je dis indifféremment énoncé, proposition, assertion. Bon voilà. Alors il s'agit de, on peut appeler ça des propositions mathématiques on est d'accord ? Comment elles sont fabriquées ? Donc ce sont deux phrases d'un discours mathématique, comment sont-elles fabriquées ? Comparons la façon de les fabriquer. Cette phrase là *(en montrant la première)* elle est faite à partir de quoi ? On fait une analyse comme on fait une analyse grammaticale d'une phrase en français, comment est-ce que c'est obtenu cette ?

— Murmures stagiaires : C'est deux. . .

— R. Cori : J'ai pris deux propositions : la première c'est une proposition A qui est *(écrit)* « n est un carré parfait », une proposition B qui est *(écrit)* « n est impair ». Bon et ensuite, j'en ai fabriqué une nouvelle en assemblant ces deux là à l'aide ?

— S2 : Du et, du connecteur logique et.

— R. Cori : Du connecteur et. Donc j'ai constitué ce que je vais appeler *(écrit)* « A et B ». Bon, procédé courant en mathématiques, à partir de propositions on en fabrique d'autres en utilisant ce qu'on appelle les connecteurs. Alors maintenant ici *(montre le deuxième énoncé)*, quel est le procédé de fabrication ?

— S3 : Une proposition en implique une autre.

— R. Cori : J'ai pris une proposition A', qui est d'ailleurs égale à B, c'est pas la peine de lui donner un autre nom, et j'ai pris une proposition *(écrit)* C qui est « n est premier »et à l'aide cette fois des propositions B et C j'ai fabriqué la proposition ?

— S4 : B implique C.

— R. Cori : Euh B implique, non, oui, B implique C c'est ça *(écrit)*.

Dialogue 1.4 : Aspect sémantique des propositions élémentaires utilisées pour fabriquer les trois énoncés :

— R. Cori : Maintenant regardons ces propositions A, B et C, qu'est-ce qu'elles, en quoi elles consistent ?

— S5 : C'est une affirmation.

— R. Cori : Une affirmation à propos de quoi ?

— S5 : D'un objet.

— S6 : D'un entier.

— R. Cori : Bon ce sont trois propositions qui me disent quelque chose au sujet ?

— S7 : De n.

— R. Cori : D'un objet qui s'appelle n et dont on m'a averti au départ que ça serait forcément un entier naturel. D'accord, donc j'ai trois affirmations qui concernent n, je peux les appeler si ça ne vous ennuie pas A de n puisque ça parle de n, B de n ce sont des affirmations au sujet de n et C de n *(complète ce qui est noté au tableau avec la variable entre crochets : « $A[n]$ »)*. Ce crochet indique simplement que ce sont des affirmations qui concernent un objet qui s'appelle n et donc avec ça j'ai fabriqué « $A[n]$ et $B[n]$ » et « $B[n]$ implique $C[n]$ » *(complète)*. Les trois propositions sont de même nature, elles disent des choses différentes mais à chaque fois il s'agit de propriétés de n : n est un carré parfait, n est impair, n est premier, bon on aurait pu imaginer des tas d'autres choses. Bon, donc elles sont de nature tout à fait semblable. Et puis j'ai fabriqué d'une part l'assemblage « $A[n]$ et $B[n]$ » et d'autre part l'assemblage « $B[n]$ implique $C[n]$ ». Dans les deux cas, le procédé de fabrication aussi est assez analogue puisque je prends ces deux propositions élémentaires et je les assemble à l'aide de ces deux machins là qu'on appelle des ?

— S8 : connecteurs.

— R. Cori : Qu'on appelle des connecteurs logiques : il y a le connecteur et, la conjonction, le connecteur implique, l'implication, bon.

Dialogue 1.5 : Relance sur la différence des réactions :

— R. Cori : Alors face à ça, on peut être étonné de la différence de réaction quand on vous demande de dire quelque chose au sujet de ces affirmations sur ces deux là, parce que, encore une fois le procédé de fabrication est absolument analogue : j'ai pris des proposition élémentaires, j'aurais pu prendre les mêmes d'ailleurs, j'aurais pu prendre « A et B » et « A implique B », les réactions auraient été à peu près les mêmes. « A implique B » c'est quoi ? C'est « n est un carré parfait implique n est impair », vous m'auriez tous dit en choeur c'est faux bien. Alors ? Alors quoi, quel est le problème, est-ce que vous voyez ce qui vous fait réagir différemment dans ce cas là et dans ce cas là ?

Pas de réponse.

Dialogue 1.6 : Amener l'idée de la quantification :

— R. Cori : Ici *(montre la proposition « $A[n]$ et $B[n]$ »)* on m'a dit « j'ai un contre-exemple », on m'a dit « je me demande si c'est complet, on a l'impression qu'il manque un renseignement », on m'a dit « ça existe ». Bon il y en a 4 qui m'ont dit « c'est faux », 4 c'est pas beaucoup c'est pas 22. Les 4 qui m'ont dit faux, vous pouvez me redire votre argumentation pour dire c'est faux ?

— S9 : Ben moi je suis parti du principe que comme pour 4 la phrase était, ne marche, ne fonctionne pas, donc c'était faux tout le temps. Enfin c'était pas faux tout le temps mais c'était faux une fois

— S10 *(superposée)* : C'est pas toujours vrai, c'est faux.

— S9 : Donc du coup.

— R. Cori : Alors ce qui n'est pas toujours vrai est faux, bon OK, moi je veux bien. C'est pas comme ça qu'a réagi la majorité. Oui ?

— S11 : La différence entre les deux c'est que la deuxième, elle affirme quelque chose, alors que la première elle n'affirme rien de particulier.

— R. Cori : Ah, alors ça c'est très intéressant.

— S11 : On ne peut pas dire que c'est faux.

— R. Cori : La première phrase n'affirme rien de particulier ? Si, elle affirme que n est un carré parfait et que n est impair, elle affirme deux choses.

— S11 : Oui mais elle ne dit pas que tous les entiers

— R. Cori : Ah, elle ne dit pas que tous les entiers, oui. Tandis que pour vous la deuxième ?

— S11 : Ben la deuxième elle dit que tous les nombres impairs sont des nombres premiers.

Dialogue 1.7 : Montrer l'implicite de la quantification universelle :

— R. Cori : D'accord, est-ce que vous pouvez me montrer dans l'écriture de la phrase qu'est ce qui indique que l'interprétation que vous faîtes est la bonne ? Vous êtes en train de me dire que la deuxième phrase dit que tous les entiers bla bla bla bon qu'est ce qui vous, à quoi reconnaissez-vous que ça dit que tous les entiers ?

— S11 : Que tous les impairs sont

— R. Cori : Oui.

— S12 : Implicitement, quand il y a une implication, c'est que ça concerne, ça doit être vrai pour tout n.

Dialogue 1.8 : Le *si... alors* est porteur de quantification universelle :

— R. Cori : Voilà, alors je vous rassure tout de suite, votre réaction est tout à fait normale. Le contraire aurait été anormal, vous avez la réaction qu'aurait n'importe quel mathématicien. Si je fais venir un de mes collègues ici et que je lui montre ces deux phrases et que je lui dis par exemple « est ce que c'est vrai ou faux là » *(montre l'implication)*, il n'aura aucune hésitation comme vous n'en avez eu aucune à me dire que c'est faux évidemment. Et tandis que là *(montre la conjonction)* qu'est-ce qu'il va me dire ? Il va me dire « tu te fous de moi », il va me dire « c'est quoi cette question imbécile, c'est vrai ou faux, ben ça dépend » Ça dépend de qui ? Ça dépend de n, d'accord. Il y en a eu 4 parmi vous qui ont interprété ça en disant ben c'est faux parce que je connais un cas où c'est faux mais ça, c'est pas ainsi que réagirait la plupart des gens ne réagissent pas comme ça. La plupart des gens, quand ils regardent cet énoncé là *(montre la conjonction)*, ils considèrent que il y a quelque chose qui, c'est incomplet. Votre première réaction c'est de dire « je me demande si l'énoncé est complet » Là on ressent un manque d'information, on ne sait pas qui c'est n donc on ne peut pas dire si c'est vrai ou faux. Je ne peux pas dire si c'est vrai ou si c'est faux parce que je ne sais pas qui c'est n. Là *(montre l'implication)*, tout le monde me dit « ah mais non, mais c'est faux », personne ne me dit « je ne sais pas qui c'est n donc je ne peux pas me prononcer ». Pourtant c'est vrai que je ne sais pas qui c'est n. Et donc ce qui se passe c'est quoi ? C'est que vous avez des yeux de mathématiciens, ce qui n'est pas étonnant puisque vous êtes professeurs de mathématiques, et dans les yeux des mathématiciens, c'est comme ça qu'on sélectionne les mathématiciens, on leur fait subir un examen ophtalmologique et on regarde si leurs yeux sont configurés comme il faut. Et la configuration d'un oeil de mathématicien c'est que quand il voit ça *(montre l'implication)*, en réalité il voit quelque chose que les yeux des êtres humains normaux ne voient pas et ce qu'il voit, et que les yeux des êtres humains ne voient pas, c'est ça *(écrit le quantificateur universel devant l'implication)*. Tous vos yeux ont vu ça, vous êtes d'accord ? Personne ne va me démentir, tous vos yeux ont vu ça. Donc il y a 46 yeux qui ont vu ça, plus les deux miens d'ailleurs, et bien ça c'est une chose, c'est un fait qui est avéré, chaque fois que le mathématicien lit ou écrit une implication dans laquelle figure une variable ou plusieurs, il l'interprète systématiquement comme étant quantifiée universellement. Le *si... alors...* est porteur de quantification universelle.

Dialogue 1.9 : Commentaires sur « astreinte à » :

— R. Cori : Oui allez-y ?

— S12 : Ce qui était écrit dans l'énoncé au-dessus entre parenthèses, « n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels », est-ce c'est pas équivalent à ça ?

— R. Cori : Non pas du tout parce que si c'était équivalent là *(montre l'implication)* ça serait équivalent là *(montre la conjonction)*. Enfin si c'était vrai là, ça devrait être vrai là. Or vous avez réagi différemment vous saviez pertinemment qu'on disait n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels mais ça n'a pas empêché que vous avez eu une attitude différente devant celle-là *(montre la conjonction)* et devant celle-là *(montre l'implication)*. Donc ce qui a fait cette différence c'est bien l'utilisation de l'implication.

Phase 2, la quantification universelle implicite des implications : les problèmes que cela peut poser

Dialogue 2.1 : Importance de la quantification en mathématiques :

— R. Cori : Et donc quand on vous dit l'implication, quand on vous dit les connecteurs logiques ça vous évoque quoi ? Les deux qu'on a là, l'implication.

— S13 : Et.

— R. Cori : Le et, bon celui qu'on avait dans la troisième, le ou, il y en a d'autres.

— S14 : Équivalent

— R. Cori : L'équivalence. Bon, c'est les quatre principaux binaires et puis il y a un connecteur logique unaire à une place c'est ?

— S15 : La négation.

— R. Cori : La négation, qui fait passer d'une proposition à une autre. Les connecteurs binaires font passer de deux propositions à une proposition, bien. Oui seulement, vous voyez qu'il y a, ils ont une fonction, ils ont un rôle qui n'est tout-de-même pas tout à fait le même les connecteurs : le implique il n'a pas la même fonction que le et pour nos yeux de mathématiciens le implique c'est plus compliqué. Bon, et en effet, l'implication c'est compliqué et la chose importante à savoir, vraiment importante, c'est ça : c'est que les mathématiciens utilisent l'implication presque exclusivement non pas comme le simple connecteur binaire mais comme le connecteur binaire accompagné d'une quantification universelle implicite. Et les implicites en mathématiques ça joue un rôle absolument fondamental et massif et notre langage est truffé de choses de ce genre. Quand on regardera les extraits de manuels, bon c'est dommage parce que je vous en aurais déjà projeté un là *(le vidéoprojecteur ne fonctionne pas)*, l'implication, le *si... alors...* est systématiquement interprété comme quantifié universellement et la quantification n'est jamais explicite pour une raison très simple, c'est que nous sortons d'une période, j'espère que nous sommes en train d'en sortir, où les quantificateurs ont été totalement bannis de l'enseignement secondaire. Je me souviens à une époque c'était presque interdit. Je ne parle pas des symboles, les symboles ont été interdits assez rapidement, c'était même interdit de faire état de la quantification. Pourquoi ? Parce que c'est difficile. Très bien, c'est difficile, sauf que les mathématiques sans quantification ça n'existe pas. Donc on ne peut pas faire de maths si on n'utilise pas les quantificateurs. Tous les énoncés de mathématiques, bon sauf quelques très rares exceptions, évidemment on peut dire que l'énoncé « 2 plus 1 égal 3 » ne comporte pas de quantificateur, bon seulement on fait plus que, on va au-delà de ce niveau d'énoncé quand on fait des maths même dès le collège. Et au collège, il y a une avalanche de propriétés, de théorèmes etc. qui sont quantifiés, sauf que la quantification n'apparaît essentiellement jamais explicitement. Tous les théorèmes de géométrie, « si un quadrilatère a 18 angles crochus alors c'est un machin », bon ça c'est quantifié, ça veut dire « quelque soit le quadrilatère bla bla bla ». Ça n'apparaît jamais et l'examen des bouquins, des manuels à ce sujet est tout à fait édifiant parce que vous constatez ça tout le temps, tout le temps, tout le temps : le *si... alors...*, et en particulier dans les exos estampillés logique, on reviendra là dessus, depuis qu'il y a les nouveaux programmes, c'est absolument constant, cette quantification n'est presque jamais explicitée. Bon, il y a heureusement des exceptions mais ça n'est presque jamais explicité. Bien, alors ça c'est le premier point sur lequel je voulais insister. Alors je vous ai prévenu qu'on allait vraiment mettre l'accent sur les questions de langage, seulement vous voyez qu'on ne peut pas vraiment séparer langage et raisonnement parce que dans l'interprétation est-ce que c'est vrai, est-ce que c'est faux, dans le raisonnement, ben le langage intervient parce que effectivement ici il y a un élément essentiel. Alors je vais vous donner un autre exemple et je vais vous montrer, j'espère, pourquoi cette affaire est quand même fondamentale. Parce qu'on pourrait se dire après tout bon OK, soyons prévenus que quand on voit le signe d'implication il faut voir automatiquement avec un quelque soit. Bon, il faut savoir sur quoi va porter le quelque soit et le quelque soit il va porter sur quoi ? Il va porter sur les variables qui apparaissent dans les phrases qui sont écrites là *(montre les propositions qui composent l'implication).* Mais je vais vous donner un autre exemple qui va peut-être vous rappeler des souvenirs de vos études universitaires.

Dialogue 2.2 : Retour sur les réponses « Faux » :

— R. Cori : Avant de le faire, juste un dernier commentaire là sur, pour ceux qui ont dit à ça *(premier énoncé avec et)* c'est faux. Bon, ils se sont dit qu'ils manquaient d'information et ils ont complété eux-mêmes l'information en se disant « si on me demande de me prononcer, comme je ne suis », enfin j'imagine que c'est ça leur réaction, « comme je ne suis pas capable de me prononcer puisque je ne sais pas qui c'est n, je vais répondre à une autre question qui ne m'a pas été explicitement posée et je vais supposer que ce qu'on me demande c'est est-ce que c'est vrai pour tous les n, et là je vais dire c'est faux », je ne sais pas si c'est ça que vous avez eu comme idée ?

— S16 : J'ai dit c'est faux pour 4 puis c'est tout, j'ai pas développé, mais on peut dire aussi c'est vrai pour.

— R. Cori : Oui c'est ça si vous dites c'est faux pour 4 donc c'est faux, implicitement vous mettez un pour tout n devant.

— S16 : Non j'aurais pu répondre, enfin j'ai répondu ça mais j'ai hésité à répondre aussi c'est vrai pour 1 puis c'est tout point.

— R. Cori : Oui d'accord, ah ben là vous n'auriez pas dit c'est faux c'est différent.

— S16 : Non mais sans développer.

— R. Cori : C'est faux pour 4 c'est vrai pour 1 ça c'est une réponse qui fait état de votre incertitude et du manque d'information encore une fois. Bien alors pour le ou, j'ai pas étudié je ne veux pas y passer trop de temps, l'énoncé avec ou là vous m'avez un peu étonné parce que d'habitude, il y a plus de gens qui disent c'est faux pour le ou que pour le et. Et là ça a été l'inverse. Le ou, les gens disent, ont plus facilement tendance à considérer qu'il faut le regarder comme quantifié universellement, bon alors qu'en réalité ça ne se justifie pas non plus tellement, mais enfin bon, en général le ou a plus d'adeptes pour le voir quantifié universellement et donc dans ce test là, la plupart du temps on a plus de réponses c'est faux pour le 3 que pour le 1 mais là vous avez inversé. Bien.

Dialogue 2.3 : Problème de la quantification implicite pour écrire la négation :

— R. Cori : Alors donc je vais écrire *(écrit)*, alors il s'agit de nombres réels, une suite de nombres réels et ℓ est un nombre réel et je considère la phrase « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ». Bon ça c'est une chose qui vous est familier. Là où je fais appelle à vos souvenirs universitaires c'est dans la traduction de ça avec des quantificateurs et des epsilon etc. Alors allez-y, un petit effort je vous écoute.

— Plusieurs S : Pour tout epsilon.

— R. Cori : *(écrit)* Pour tout epsilon.

— Plusieurs S : Il existe n_0 appartenant à grand N.

— R. Cori : *(écrit $\exists n_0$)*

— S17 : Tel que quelque soit n plus grand que n_0.

— R. Cori : Ouais mais là c'est parce que vous êtes trop bons. Alors moi, quand j'étais étudiant, j'ai eu des cours où on m'écrivait ça *(écrit $n \leqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$)*. Ça figurait dans des tas de bouquins et je pense que ça continue à figurer sous cette forme dans des bouquins. Bon, mais vous vous êtes excellents, vous avez mis ici un pour tout n supérieur ou égal à n_0 mais posez vous la question devant une phrase comme ça est-ce que vous réagiriez en disant tiens tiens il y a quelque chose qui ne va pas où est-ce que vous vous diriez ouais c'est ça ?

— S18 : On le sous-entend.

— R. Cori : Bon, personne ne s'indignerait. Tout le monde se dit, voilà, même problème ça *(en montrant $\Rightarrow$)* ça sous-entend pour tout n, mais le pour tout n ne figure pas. Très bien. Alors je reviens à des temps très anciens où j'avais eu un cours donc avec ça comme définition de (u_n) converge vers ℓ et bon ben, très bien. Donc le bon étudiant il a appris son cours, donc on lui dit la suite converge vers ℓ traduisez, bon, très bien. Et puis si on lui dit montrez que la suite de terme général je ne sais pas quoi tend vers 0 ben il se dit je prends un epsilon je vais trouver un n_0 tel que, il sait faire ça très bien, il le fait très bien, tout est parfait. Et puis maintenant il y a une suite où il s'agit de montrer qu'elle ne converge pas vers ℓ, donc il s'agit d'exprimer la négation de cette propriété. Quelle est la négation de cette propriété ? Alors la négation de cette propriété, alors si ça c'est la propriété A la propriété NON A est équivalente à ?

— S19 : Il existe epsilon tel que quelque soit.

— R. Cori : *(écrit)* Il existe un epsilon positif tel que quelque soit n_0 appartenant à $\mathbb{N}$.

— Plusieurs S : Il existe n n plus grand que n_0 et.

— R. Cori : Alors mettons nous dans la peau de l'étudiant de cette époque ancienne qui avait appris ça comme définition de (u_n) converge vers ℓ et qui savait en plus, comme vous savez, nier : je dois mettre ici un il existe, ici un quelque soit et ici qu'est-ce que je dois mettre ? Ben je dois mettre la négation de ça *(montre l'implication)*. Bon en plus, il était très bon cet étudiant parce qu'il savait que la négation de A implique B *(écrit)* c'est ?

— Plusieurs S : A et NON B.

— R. Cori : A et NON B. Il n'y en a pas beaucoup qui savent ça, pas beaucoup bon. Mais grâce à vos cours de logique au lycée bon, il y en a beaucoup qui sauront, mais à l'époque il n'y en avait pas beaucoup qui savaient. Mais là c'était un bon étudiant il savait ça, donc qu'est-ce qu'il faisait ? Il écrivait ça *(écrit $n \leqslant n_0$ et $|u_n - \ell| > \varepsilon$)*. Bon et face à ça, il était saisi d'une petite angoisse là, parce que devant cet énoncé là il y a un petit malaise quoi. Et le malaise c'est quoi ? C'est que là, n, on se dit on ne sait pas qu'est-ce que c'est on ne sait pas d'où ça sort, qu'est-ce que c'est que cette histoire. Bon, il avait pas la bouteille d'un mathématicien qui lui automatiquement saura qu'il s'agit ici d'un il existe n. Bon alors, autant je veux bien admettre qu'on dise l'implication c'est toujours accompagné d'une quantification universelle sous-entendue, autant sortir ce il existe du néant c'est quand même hein ? Bon alors je vais vous dire quelque chose que je vais peut-être être amené à vous répétez souvent au cours de ce stage : nous n'allons pas changer le monde c'est-à-dire même si on découvre que cette habitude qu'ont les mathématiciens de considérer les implications comme étant universellement quantifiées peut poser des problèmes, on ne va pas changer ça parce que c'est trop universellement répandu. Encore une fois, tous les mathématiciens face à la phrase numéro 2 qui a été effacée vont vous dire c'est faux parce qu'ils l'interpréteront bon on ne va pas changer ça. Tout ce qu'on peut faire, c'est informer, attirer l'attention sur et dire attention c'est comme ça que les gens l'interprètent et le fait d'être conscient de ça ben le jour où vous serez devant des élèves dans une situation où ça pourra intervenir et bien vous serez mieux armés pour éviter des malentendus des ambiguïtés. voilà, je tiens à préciser il ne s'agit pas de dire on va changer tout ça et on va mettre des quelque soit partout dans nos phrases, non, simplement j'attire votre attention sur un certain nombre de problèmes langagiers dont celui là. Donc effectivement il faut mettre il existe alors moi il m'est facile de dire si on a mis le quelque soit ici c'est plus facile de penser à mettre le il existe dans la négation. Et donc en effet, oui, c'est mieux, c'est mieux de le mettre que de ne pas le mettre. Mais je suis obligé de constater que personne ne la met la quantification universelle, bon voilà, c'est comme ça c'est la vie. Mais en tout cas, ça vous montre qu'un problème qui pourrait paraître ne pas être bien grave, ben quand même dès que je fais cette chose élémentaire qui consiste à prendre la négation, ça me conduit à un problème qui lui est un peu plus sérieux. Voilà bon, sur ces histoires de quelque soit il existe on sera amené à revenir. Je vais beaucoup insister, sans doute lourdement aux yeux de certains d'entre vous, sur cette question de l'implication. L'implication c'est la chose la moins bien maîtrisée en logique, c'est vraiment le problème majeur c'est l'implication. Surtout au niveau où nous sommes d'enseigner ces choses là au lycée ou au collège, l'implication, *le si... alors...*, ces choses là c'est vraiment compliqué. Bien, avez-vous des questions à poser des remarques à faire ?

Phase 3, la notion de proposition

Dialogue 3.1 : Collectivisation des réponses sur la notion de *proposition* :

— R. Cori : Alors je vais passer maintenant à la notion de proposition qu'est-ce que c'est qu'une proposition mathématique

(écrit les huit assemblages ci-dessous :)

$\int_0^1 x dx$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 3$

$n \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$

$(n \geqslant 3$ et n premier$) \Rightarrow n$ impair

Soit x un réel positif

Le théorème 3.5.2 est évident

$\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$

— R. Cori : Voilà j'ai écrit 8 expressions, 8 assemblages divers et je vous demande de me dire pour chacune de ces écritures si c'est ou non, selon vous, une proposition mathématique ?

— S1 : La première non.

— R. Cori : La première non. Bon, est-ce qu'il y a d'autres opinions au sujet de la première ? Non personne ne pense que c'est une proposition mathématique ? D'accord, est-ce que vous pouvez dire pourquoi vous avez dit non.

— S1 : Parce qu'il n'y a pas de verbe, c'est pas.

— R. Cori : En fait vous avez raison mais je ne suis pas sûr que cet argument convainque.

— S1 *(superposé)* : C'est pas une phrase.

— R. Cori : Des gens à qui vous allez dire après qu'il y en a d'autres où on ne voit pas de verbe non plus et qui sont des propositions.

— S2 : On ne peut pas dire si c'est vrai ou faux.

— R. Cori : On ne peut pas dire si c'est vrai ou faux.

— S3 : C'est un nombre

— R. Cori : C'est un nombre. Voilà alors je retiens tout ça *(écrit)* donc : pas de verbe, on ne peut pas dire si c'est vrai ou si c'est faux, c'est un nombre. D'accord. Bon, la deuxième ? ($\cos^2 x + \sin^2 x = 3$)

— Plusieurs S : Oui

— R. Cori : Tout le monde pense que c'est une proposition mathématique ? *(écrit unanimité)*

— S4 : Il n'y a pas de quantificateur sur x.

— R. Cori : Il n'y a pas, est-ce que ça change votre position ? est-ce que du coup vous diriez que ça n'est pas une proposition ?

— S4 : Oui

— R. Cori : Ah donc vous pensez que ça n'en est pas une alors. Donc *(écrit)*, une objection. Je vous dit tout de suite c'est une proposition, voilà. Celle-ci ? ($n \in \mathbb{N}$)

— Plusieurs S : Oui.

— R. Cori : Unanimité *(écrit unanimité)*. Le verbe là, c'est quoi ?

— Plusieurs S : Appartient.

— R. Cori : C'est appartient, très bien. Ici ? ($n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$)

— Plusieurs S : Oui.

— R. Cori : Oui tout le monde dit oui d'accord unanimité *(écrit unanimité)*. Ça ? (($n \geqslant 3$ et n premier) $\Rightarrow n$ impair)

— Plusieurs S : Oui.

— R. Cori : Unanimité *(écrit unanimité)*. Ça ? (Soit x un réel positif)

— Plusieurs S : Oui.

— R. Cori : Oui, là aussi unanimité ? Non ah ?

— S5 : Non mais je me demande si je n'ai pas une objection aussi sur n appartient à $\mathbb{N}$.

— R. Cori : Vous avez une objection sur n appartient à $\mathbb{N}$?

— S5 : Celle là et soit x un réel positif.

— R. Cori : Bon alors pas unanimité *(écrit une objection au troisième assemblage)*. Et donc ici je voudrais compter les objections : alors 1, je vois que l'opinion évolue, alors, non mais levez bien la main les objections : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, oui et pendant que je compte ça. Bon, 11 objections OK mais 11 ça reste minoritaire. Bon ça ? (Le théorème 3.5.2 est évident)

(Discussions inaudibles)

— R. Cori : Alors c'est une proposition mathématique, qui dit oui ? 1, 2, 3, 4, 5 donc 5 oui. Qui dit non ? Bon il y a des prudents quand même mais une majorité on va dire un douzaine pour non. Ça ? ($\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$)

— Plusieurs S : C'est un ensemble.

— S6 : Il n'y a pas de verbe.

— R. Cori : Appartient c'est pas un verbe ?

— Plusieurs S : Si mais.

(Discussions inaudibles)

—S7 : En toute logique si on dit oui à soit x un réel positif, on dit oui à la dernière.

— R. Cori : Ben c'est pas tout à fait la même chose quand même. Alors on va compter. Qui dit oui c'est une proposition mathématique ? 1, 2. Qui dit non ? Oui alors qui ne dit rien ? bon le reste dit non. Bien.

Dialogue 3.2 : Différence entre *si... alors* et *donc* : premier argument :

— R. Cori : Bon alors par quoi on commence. On va commencer par vous décevoir parce que le seul endroit où il y ait unanimité complète c'est l'endroit où c'est non. Donc on va s'attaquer peut-être direct à ça *(entoure l'assemblage 4)*. Ça, ce n'est pas une proposition mathématique. Je voudrais quand même attirer l'attention de ceux d'entre vous qui m'ont donné ici *(pour le premier assemblage)* comme argument on ne peut pas dire si c'est vrai ou c'est faux j'aimerais bien qu'ils me disent là si on peut dire si c'est vrai ou c'est faux.

— Plusieurs S : Oui.

— R. Cori : n appartient à $\mathbb{N}$ donc n positif vous dites c'est vrai ? Ouais, d'accord parfait.

Dialogue 3.3 : Différence entre *si... alors* et *donc* : deuxième argument :

— R. Cori : Alors est-ce que vous voudriez avoir la gentillesse de me donner la négation de cette proposition.

— S8 : Il existe un entier naturel qui est négatif.

— R. Cori : Alors il existe *(écrit « négation »)* un entier naturel n dans $\mathbb{N}$ oui ?

— S8 : strictement négatif.

— R. Cori : Donc tel que $n < 0$ *(écrit)*

Dialogue 3.4 : Différence entre *si… alors* et *donc* : troisième argument :

— R. Cori : On va faire le jeu suivant : je pars de cette proposition et je vous demande la négation, quelle est la probabilité que j'obtienne ça ? (*en montrant quatrième expression*).

Murmures.

— R. Cori : Quand je vous demande la négation de ça, quelle est la probabilité que j'obtienne ça ?

Rires

— R. Cori : Ayez le courage de dire zéro, parce que la probabilité que j'obtienne ça c'est zéro. Partant de ça, personne ne va me dire ça comme négation.

Dialogue 3.5 : Question d'une stagiaire pas convaincue :

— S9 : Est-ce qu'on ne peut pas interpréter le donc comme une implication, et dans ce cas on retombe comme tout-à-l'heure ?

— R. Cori : C'est une très bonne question et je vous rassure tout de suite il y a au moins la moitié des manuels qui interprètent le donc comme une implication. Et c'est dommage, là aussi je voulais vous montrer (*le vidéoprojecteur ne marche pas*), bon on vous montrera demain à l'occasion des manuels que le donc c'est la même chose que l'implication. Le donc ça n'est pas la même chose que l'implication et je vais essayer de m'employer à vous convaincre que le donc ça n'est pas la même chose que l'implication et que quand vous dites A donc B, ça n'a rien à voir, ou très peu à voir, et en tout cas vous dites quelque chose de complètement différent que quand vous dites si A alors B. Si A alors B et A donc B sont deux choses différentes. Et j'ajoute que si A alors B est une proposition mathématique, pour peu que A et B soient des propositions mathématiques elles-mêmes bien sûr, alors que A donc B n'est pas une proposition mathématique. Bien, je reviendrai là dessus en détail.

Dialogue 3.6 : Correction pour les autres expressions :

— R. Cori : Je vais passer en revue les autres. Bon alors pour le premier il n'y a pas de doute ça n'est pas susceptible d'être vrai ou faux, on ne peut pas parler de la négation de ça. Au fond l'argument que je préfère c'est celui qui me dit c'est un nombre. Plus généralement je dirai ça désigne, c'est le nom d'un objet mathématique. C'est *(écrit)* le nom d'un objet. Bon. $\cos^2 x+\sin^2 x = 3$ c'est une proposition, ça peut être vrai, ça peut être faux, ça a une négation qui est $\cos^2 x+\sin^2 x\neg 3$, c'est quelque chose qui est susceptible d'être vrai ou faux. Le fait qu'il n'y ait pas de quantificateur n'y change rien. Je veux dire, si j'avais écrit $\cos^2(\frac{\pi}{7}) + \sin^2(\frac{\pi}{7}) = 3$, vous ne m'auriez pas dit c'est pas une proposition parce qu'il n'y a pas de quantificateur. En fait il y a une distinction, c'est une proposition dans laquelle il y a une variable qui n'est pas précisée, bon ben voilà, c'est une catégorie, parmi les propositions il y en a qui parlent de certains objets qui ne sont pas précisés, où il y a des variables qui apparaissent comme ça, et il y en a d'autres où les variables sont toutes quantifiées par exemple, ou alors où il n'y a pas de variables du tout. Ça fait deux catégories mais ça reste quand même des propositions. Donc ça OK c'est une proposition mathématique. *(écrit en face du deuxième assemblage)* Oui. Ici c'est non *(écrit en face du premier assemblage)* ici c'est oui. Bien. n appartient à $\mathbb{N}$, évidemment c'est oui. Alors ceux qui ont eu une hésitation, et je pense à l'objection qui est apparue là *(montre le sixième assemblage)*, c'est que peut-être vous avez interprété ça comme soit n un entier, ou comme une annonce faite au début de l'énoncé d'un problème que vous donnez à vos élèves, à savoir dans ce qui suit n appartient à $\mathbb{N}$, dans ce problème, dans ce chapitre, dans ce paragraphe, dans tout ce livre n désignera un entier naturel. Bon, ça c'est une annonce d'une convention, et effectivement c'est pas une proposition mathématique. Seulement ça ne prend ce caractère là que parce qu'on le met dans le contexte en question. Évidemment si j'avais écrit dans ce qui suit n appartient à $\mathbb{N}$, là ça n'est pas une proposition mathématique, sachez qu'à partir de maintenant n appartient à $\mathbb{N}$, ça n'est pas une proposition mathématique. Mais n appartient à $\mathbb{N}$ tout seul, c'est une proposition mathématique, c'est susceptible d'être vrai ou faux suivant qui est n, ça a une négation qui est n n'appartient pas à $\mathbb{N}$, il n'y a aucun doute que c'est une proposition mathématique. Bon donc voilà. Alors n appartient à $\mathbb{N}$ *(montre le quatrième assemblage)* ça on va y revenir mais c'est non *(écrit)*. n supérieur ou égal à 3 et n premier implique n impair c'est oui. Ah oui, ici aussi il y avait unanimité et bien cette unanimité était justifiée. Oui ?

— S10 : Vous voulez dire que toute proposition mathématique a une négation sinon ça n'en est pas une ?

— R. Cori : Euh est-ce que je veux dire ça ? En tout cas c'est vrai que toute proposition mathématique a une négation.

— S10 : Et si il n'y a pas de négation ça n'en est pas une ?

— R. Cori : S'il n'y a pas de négation ? Euh on reviendra là dessus parce qu'on va parler de la négation des propositions. On reviendra là dessus, on peut dire ça mais c'est. Bon alors soit x un réel positif, après tout ce qu'on vient de dire, est-ce que le vote différerait ? Oui ?

(Murmures inaudibles)

— R. Cori : On ne peut pas dire c'est vrai ou c'est faux soit x un réel positif, on ne peut pas dire qu'est-ce que c'est la négation de soit x un réel positif, c'est pas une affirmation concernant des objets mathématiques qui est susceptible d'être vraie ou fausse. C'est à un autre niveau, soit x un réel positif c'est au niveau de la communication entre deux personnes qui sont en train de causer mathématiques et il y en a une qui dit à l'autre et bien je prends un nombre réel positif x, je prends un nombre réel je l'appelle x, c'est pas du tout du niveau du discours mathématique, c'est à un autre niveau donc c'est non ça n'est pas une proposition mathématique. Bon le théorème 3.5.2 est évident c'est quelque chose qui ne parle pas d'objets mathématiques c'est un commentaire entre deux étudiants blasés. C'est une plaisanterie, ça n'a rien à voir. Une proposition mathématique ça parle d'objets mathématiques, donc là c'est clairement non *(écrit)*. Et en dernier lieu c'est non aussi et là l'argument c'est le même qu'en 1, c'est le nom d'un objet, ça désigne un ensemble c'est le *(écrit)* nom d'un objet.

Phase 4, en quoi consiste l'activité mathématique ?

Dialogue 4.1 :

— R. Cori : Alors petite parenthèse on va essayer de s'interroger, quelle heure il est, sur l'heure qu'il est. Bon, on s'aperçoit qu'il est 11h35. Bon vous êtes épuisés ou non ? Non vous n'avez pas l'air. Bien alors on va, on fera une plus longue pause café ce midi. En fait on a commencé tard et on s'arrêtera juste pour déjeuner à midi et demi. Bien. Alors, on va s'interroger sur qu'est ce que c'est que faire des mathématiques. Vaste question. En quoi consiste l'activité mathématique ? En quoi consiste l'activité du mathématicien, qu'est-ce qu'il fait le mathématicien ? Bon. Je pourrai vous demander votre opinion là dessus, ben je vais le faire allez.

— S1 : Ça ressemble à des casses-tête chinois.

— R. Cori : Ça ressemble à des casses-tête chinois d'accord.

— S1 : Moi je le prends comme ça.

— R. Cori : D'accord bon. J'ai un conseil à vous donner, si vous devenez professeur de mathématiques essayez de ne pas propager cette.

— S1 : Mais j'aime bien les casses-tête chinois.

— R. Cori : Voilà justement. Bon qui d'autre aurait quelque chose à dire si on lui demande. Après tout, il y a sûrement des gens, sachant que vous faites des mathématiques, ils vous demandent en quoi ça consiste, de quoi il s'agit. Non personne, ils n'osent pas ? Alors qui pourrait donner une définition de son activité ? Je ne parle pas de son activité d'enseignant mais de son activité quand il fait des maths.

— S2 : Ben on va dire émettre des règles et organiser le raisonnement sur

— R. Cori : Sur quoi, alors sur quoi ?

— S2 : Sur tout.

— R.Cori : Sur tout, ça c'est ambitieux.

— S2 : Pas sur la philosophie en fait, sur des choses pratiques.

— S3 : Voir si les propositions mathématiques sont vraies ou fausses.

— R.Cori : Oui mais ces propositions mathématiques, OK, c'est des phrases, c'est des phrases qui parlent de quoi ?

— S3 : D'objets mathématiques.

— R.Cori : D'objets mathématiques, alors là nous y sommes.

— S4 : Résoudre des problèmes.

— R.Cori : Oui, résoudre des problèmes mais c'est quoi les problèmes.

— S4 : Mais que ça soit vrai ou de la modélisation mathématique pour résoudre des problèmes concrets.

— R.Cori : Bon alors vous voyez là j'avais un problème tout-à-l'heure, je n'arrivais pas à faire communiquer l'ordinateur et le vidéoprojecteur, et les mathématiques ne m'ont été d'aucun secours. Et ne seront jamais d'aucun secours. Enfin elles pourraient l'être, elles sont derrière les

— S4 : La technologie.

— R.Cori : Bien sûr elles sont derrière, elles sont cachées quelque part derrière ce qui a fait qu'en fait ça peut marcher et que c'est juste parce que je suis un idiot et que j'ai pas réussi à faire, mais voilà.

Phase 5, dans l'activité mathématique, on cherche à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques

Dialogue 5.1 : les mathématiciens cherchent à donner des informations sur des objets mathématiques :

— R. Cori : Bien. Alors en tout cas il y a une chose qui m'a plu, que j'espérais dans ce que vous avez dit, c'est la notion d'objets mathématiques. On manipule des objets qui sont des objets mathématiques. Alors ces objets mathématiques ils sont de natures très diverses, ça peut être quoi ? Les premiers qui viennent à l'esprit c'est bien entendu les nombres, c'est les premiers qu'on a rencontrés dans notre vie 1, 2, 3 etc. Ça peut être des nombres alors des nombres plus ou moins compliqués, il y a les entiers naturels et puis il y a des nombres un petit peu plus compliqués, il y a les entiers relatifs qui inclus aussi les nombres négatifs les -1, -2, -3 etc. Puis après il y a les nombres décimaux, les nombres rationnels, il y a les nombres réels, il y a les nombres complexes. Voilà, tous ces gens là ce sont des objets mathématiques et puis après il y a d'autres sortes d'objets mathématiques, quoi par exemple ?

— S5 : Les dessins.

— S6 : Les figures.

— R. Cori : Les objets de la géométrie quoi oui les figures si vous voulez.

— S7 : Les fonctions.

— R. Cori : Les fonctions absolument. Donc il y a les objets de l'analyse, les fonctions. Bon et puis il y a les espaces de fonction et puis il y a les probabilités et puis il y a les séries et puis, bon voilà, il y a quantité de choses la liste est extrêmement longue et extrêmement variée. Donc on a comme ça des *(écrit)* objets mathématiques. Et en fait ce qui s'est passé à la fin du 19ème siècle, avec l'apparition de la théorie des ensembles a vraiment changé beaucoup les choses en mathématiques parce que jusque là les objets de natures diverses, enfin on ne considérait pas que les nombres, et les triangles, et les fonctions et les espaces de Banach et je ne sais pas quoi, enfin à l'époque les espaces de Banach n'étaient pas nés, on ne considérait pas que c'était des objets de même nature. C'était des objets de natures essentiellement différentes et celui qui faisait de la théorie des nombres il ne manipulait pas les mêmes objets que celui qui faisait de l'analyse complexe. Ça avait l'air d'être des gens qui avaient certes des connexions mais enfin les objets n'étaient pas de même nature. Bon. La théorie des ensembles a permis d'unifier en quelque sorte les mathématiques en montrant qu'on pouvait faire comme si tous les objets étaient de même nature. Et la théorie des ensembles elle a dit tous les objets sont des ensembles. Ça a un avantage considérable sur le plan conceptuel, ça permet de dire la mathématique c'est une chose qui n'utilise qu'une sorte d'objets mais sur le plan pratique ça a aussi beaucoup d'inconvénients parce que ça tue un peu l'intuition. Expliquer à quelqu'un que le nombre 2 c'est un ensemble ça ne va pas forcément de soi, bien que ça ne soit pas insurmontable de se faire à cette idée. En effet, la différence de nature des objets est quelque chose qui aide à l'intuition et le fait de tout considérer de même nature ça n'aide pas à l'intuition. Enfin peu importe, on ne va pas entrer dans ce débat. En tout cas on peut considérer, je suis en mesure de dire aujourd'hui que ce que fait un mathématicien, c'est qu'il observe un monde, un univers peuplé d'objets mathématiques. Je ne rentre pas du tout dans la question de la définition de cet univers, c'est vague, c'est intuitif, je laisse comme ça vague et intuitif. Donc nous observons des objets mathématiques et qu'est-ce que nous faisons en les observant ?

(Murmures inaudibles)

— R. Cori : Ben on s'intéresse à, on cherche à avoir le maximum d'information sur eux, et ces informations nous les restituons sous forme de phrases qui disent des choses sur les objets mathématiques. Nous donnons un bulletin d'informations après avoir examiné le monde, c'est ce que font les journalistes tous les jours, bon. On peut discuter de la fiabilité des informations données par les mathématiciens qui vous démontrent un théorème et le journaliste qui vous récite son journal à la radio ou à la télé. Mais enfin bon, c'est quand même à peu près de même nature : on observe des objets et on donne des informations sur ces objets, on donne des propriétés de ces objets. Alors ces propriétés peuvent apparaître à l'oeil nu, par exemple quand je dis *(écrit)* 3 appartient à $\mathbb{N}$, ben 3 appartient à $\mathbb{N}$ ça n'a pas besoin d'être beaucoup commenté, expliqué c'est un fait que je vois, c'est un fait qui est élémentaire, qui apparaît comme ça. Et puis si je vous dis *(écrit)* il n'existe pas d'entiers n supérieur ou égal à 3 et d'x, y, z non nuls enfin tous trois non nuls tels que x puissance n plus y puissance n est égal à z puissance n, bon ça c'est une autre information. Mais l'obtention de cette deuxième information, c'est tout autant une information que celle-là, bon l'obtention de cette deuxième information va demander des investigations un peu plus longues que la première voilà. Et ce n'est vous savez que très récemment qu'on a pu s'apercevoir que cette information était digne de foi, était fiable, était vraie. Bon, pour ceux qui ne l'auraient pas reconnu c'est le théorème de Fermat. Bien. En tout cas, ça reste des affirmations au sujet des objets.

Dialogue 5.2 : Expressions mathématiques :

— R. Cori : Bien, pour communiquer ces informations, c'est quand même une affaire de communication, il faut les formuler, il faut les exprimer. Donc on a besoin de faire des phrases pour les dire. Et pour donner des informations sur les objets, il faut commencer par quoi ?

— S8 : Les nommer.

— R. Cori : Il faut commencer par nommer les objets. Donc de quoi j'ai besoin pour faire ce travail ? *(écrit)* J'ai besoin de noms pour les objets mathématiques, et j'ai besoin de ce que je vais appeler des propositions, ou des assertions, ou des énoncés. Alors je mets énoncés entre parenthèses parce que surtout au collège et au lycée, le mot énoncé a un gros défaut c'est que l'énoncé c'est l'énoncé du problème à remettre pour la semaine prochaine. Il y a deux sens à énoncé, dans ce cas il vaut mieux dire proposition donc gardons proposition mais enfin les matheux ils disent souvent aussi énoncé. Donc les propositions qu'est ce que c'est ? Ben c'est *(écrit)* le récit des aventures de ces objets. On nomme les objets puis on raconte leur histoire. De même qu'on vous dit le président de Roumanie a été reçu hier par le premier ministre indien, pour dire ça il a fallu nommer les deux personnages et puis faire une phrase pour dire ce qui leur est arrivé. C'est tout à fait pareil en mathématiques. Et donc je vais dire qu'en mathématiques j'utilise ce que je vais appeler *(écrit)* des expressions mathématiques qui se subdiviseront en deux grandes catégories : les noms et les propositions. Je dirai, bon c'est une pure convention, intégrale de 0 à 1 de $x\,dx$ c'est une expression mathématique qui n'est pas une proposition mais un nom, c'est le nom d'un objet. Bon ça *(désigne* $\cos^2 x + \sin^2 x = 3$ *)* c'est une proposition dans laquelle figurent évidemment des noms. Il y a beaucoup de noms là vous voyez : 3 c'est un nom, x c'est un nom, $\sin^2 x$ c'est un nom, $\cos^2 x$ c'est un nom, $\cos^2 x + \sin^2 x$. Donc il y a des tas de noms qui apparaissent. Bon, et ce que ça vous dit c'est que ce qui arrive à ces braves gens ben c'est ça *(désigne*

$\cos^2 x + \sin^2 x = 3$ *)*, ce qui vient de leur arriver c'est ça. n appartient à $\mathbb{N}$ c'est une proposition, ça *(désigne $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$)* c'est rien du tout, ça *(désigne ($n \geqslant 3$ et n premier) $\Rightarrow n$ impair)* c'est une proposition, ça *(désigne Soit x un réel positif)* c'est rien du tout, ça *(désigne Le théorème 3.5.2 est évident)* c'est rien du tout et ça *(désigne $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$)* c'est un nom. Bon cette classification est grossière et tout ce que je suis en train de vous raconter là n'est évidemment pas susceptible de démonstration. Je ne peux pas vous prouver ce que je dis parce que je ne suis pas en train de faire des mathématiques là. Qu'est-ce que je suis en train de faire ? Je suis en train de faire une analyse naïve de ce que je fais quand je fais des maths, donc vous avez tout à fait la possibilité de dire que je délire complètement, c'est pas du tout comme ça, je ne peux pas vous apporter de preuves. Moi je ne sais pas faire de preuves en dehors des mathématiques. Là nous sommes en dehors des mathématiques, nous les observons mais nous sommes en dehors des mathématiques. Un collègue, un logicien important d'ailleurs, qui s'appelle Daniel Lacombe, qui a été entre autres un de mes maîtres, a coutume de dire que la logique ça fait partie des mathématiques appliquées, ce sont des mathématiques appliquées aux mathématiques, le domaine d'application c'est les mathématiques, on applique des mathématiques aux mathématiques. Bien. Alors on va maintenant être amené à dire comment sont constitués ces noms ces propositions etc. Et bon, dans la mesure où les propositions c'est les récits des aventures des objets mathématiques, ben de même que quand un journaliste vous dit le président roumain a été reçu hier par le premier ministre indien, ben ça peut être vrai comme ça peut être faux, et ben si c'est vrai, on aime bien avoir une certitude une preuve que c'est vrai. Et donc ce que fait le mathématicien lorsqu'il observe l'univers des objets mathématiques c'est donc d'essayer de donner le maximum d'informations à leur sujet. Alors il y a des informations qu'il va, qui résultent du simple examen et puis il y a des informations qui résultent de raisonnements et à partir d'informations déjà obtenues, en les agençant d'une façon convenable, en obéissant à certaines règles, on va arriver à la conclusion qu'il y a d'autres informations qui sont également vraies, d'autres faits qui sont vrais et ça c'est la démonstration. Bien.

Phase 6 : y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?

Dialogue 6.1 :

— R. Cori : Alors de même que je dis le président roumain a été reçu hier par le premier ministre indien, je pourrais dire il n'y a pas d'entiers, je ne peux pas trouver d'entiers tels que en élevant il est impossible de trouver quatre entiers tels que en élevant le premier à la puissance quatrième j'obtiens la même chose que en élevant le second à la puissance du quatrième et le troisième à la puissance du quatrième et en additionnant je trouve la même chose. Donc là j'ai fait une phrase avec le langage courant et j'ai dit il n'existe pas d'entier, alors j'ai oublié de dire supérieur ou égal à 3, non nuls voyez ça aurait fait une phrase un peu emberlificotée mais enfin je pourrai la faire cette phrase emberlificotée et j'arriverai à vous dire le théorème de Fermat avec la langue usuelle. Et du coup la question qui se pose c'est quelle est la différence, s'il y en a une, *(écrit)* y a t-il une différence entre la langue usuelle, la langue qu'on appelle langue naturelle d'ailleurs, la langue naturelle celle avec laquelle nous communiquons, avec laquelle nous avons commencé à parler, et la langue mathématique, le langage mathématique ? Alors est-ce que vous avez une opinion là dessus ?

— S1 : Ben non.

— R. Cori : Non il n'y a pas de différence.

— S1 : C'est un langage adapté c'est tout.

— S2 : Ben si, sinon on ne s'embêterait pas à.

— R. Cori : Alors langage adapté bon.

— S3 : Je pense que la différence c'est que dans la langue naturelle il y a des sous-entendus qu'il n'y a pas dans les énoncés mathématiques.

— R. Cori : Ah.

— S3 : Ben si il y en a quand même puisqu'on a vu tout-à-l'heure avec les implications mais.

— R. Cori : D'accord.

— S3 : Il y en a plus dans le langage naturel que dans le langage mathématique.

— R. Cori : Oui ?

Phase 7 : différence syntaxe/sémantique

Dialogue 7.1 :

— R. Cori : Mais alors votre remarque est tout à fait pertinente, simplement votre remarque elle ne porte pas sur la langue elle-même, elle porte sur la signification qu'on donne à ce qu'on dit, ça n'est pas tout à fait la même chose. Votre remarque elle est au niveau de ce qu'on appelle la *(écrit)* sémantique. Dans toute langue il y a deux aspects, il y a la sémantique et il y a *(écrit)* la syntaxe. La syntaxe c'est la façon d'organiser le discours, la structure du discours, la façon d'assembler les symboles, les règles qui président à la fabrication de ce qu'on va appeler des phrases bien formées. La syntaxe de la langue française est régie par ce qu'on appelle la grammaire ça va vous dire que tel assemblage de lettres et puis de mots, d'abord que tel assemblage de lettres est un mot, ça c'est un peu différent de la grammaire, mais ensuite que tel assemblage de mots est une phrase acceptable, ça c'est du niveau de la grammaire. Bon, et quand je fais de la syntaxe, je ne m'intéresse pas du tout à la signification de ce que je dis. La sémantique elle, alors sémantique ça parle du sens, la sémantique s'intéresse à la signification de ce que vous dites, il y a un exemple célèbre d'une phrase que je vais vous écrire voici une phrase de la langue française *(écrit)* « pour grands que soient les rois, ils sont ce que nous sommes » bon est-ce que l'un d'entre vous a déjà lu ou entendu cette phrase ? Personne ? Il n'y a pas une seule personne dans cette salle qui ait jamais lu ou entendu cette phrase ?

— S4 : Si mais je ne sais plus où.

— R. Cori : Ah si mais vous ne savez plus où d'accord. Il y a une personne à qui ça dit quelque chose, deux. Bon c'est une phrase d'une œuvre célèbre de la littérature française. Bon, c'est un vers du Cid de Corneille voilà, qui effectivement n'est plus fréquenté, enfin pas autant qu'il l'était autrefois. Vous remarquez que c'est un alexandrin quand même pour grands que soient les rois, ils sont ce que nous sommes. Bien donc voilà. Alors cette phrase célèbre, enfin qui l'est moins qu'autrefois mais qui l'est quand même un peu, il y a deux façons de la considérer. Soit vous adoptez le point de vue sémantique, soit vous adoptez le point de vue syntaxique. Le point de vue syntaxique ça consiste à regarder comment elle est faite, elle a une structure qui n'est pas courante. Quand vous allez acheter votre pain chez le boulanger c'est rare que vous utilisiez ce genre de forme de phrases, donc c'est une, c'est tout à fait correct, c'est une phrase qui est tout à fait conforme aux règles de la syntaxe. Bon, c'est une forme particulière et ça s'appelle, enfin, pour grands que soient les rois, ils sont ce que nous sommes ça donne un exemple de ce qu'on appelle en grammaire une subordonnée circonstancielle d'opposition. Bon voilà, c'est de la technique grammaticale, c'est comme ça donc quand je dis pour grands que soient les rois, ils sont ce que nous sommes c'est une subordonnée circonstancielle d'opposition. Bon, je dis que la subordonnée est placée avant la principale, la principale c'est ils sont ce que nous sommes, le ils renvoit aux rois qui sont placés avant. Bon, c'est une forme qui est admise dans la langue et ça s'appelle subordonnée circonstancielle d'opposition et si je faisais un cours de grammaire je pourrais être amené à commenter, à développer, à faire plein de remarques sur cette phrase sans jamais un seul instant m'intéresser à sa signification. Là je fais de la syntaxe, je m'intéresse juste à la façon d'assembler les choses et pas du tout à la signification. Maintenant, je suis en train de préparer mon discours de candidat à la présidence de l'association des bouchers du coin et je veux montrer que j'ai un idéal démocratique fort et bien vous allez dire vous voyez moi je suis pour la démocratie chez les bouchers et je trouve qu'il n'y a pas besoin d'avoir un roi parce que vous voyez un roi, et là je vais développer une idée qui est, voilà, les rois qui sont censés être au dessus de nous, ben finalement ils ne sont pas autre chose que nous. Grande envolée démocratique, et là je m'intéresse uniquement au sens de cette phrase et pas à sa structure grammaticale, à sa structure syntaxique. Bon, pour rendre mon discours un peu plus olé olé j'ai adopté une forme qui est un peu inusitée, qui est la forme subordonnée circonstancielle d'opposition, mais ce qui m'intéresse avant tout c'est le contenu sémantique, c'est-à-dire le sens. Vous voyez il y a ces deux choses là. Ben en mathématiques c'est pareil, sauf que c'est rarissime qu'on s'intéresse à la forme et à la syntaxe. La syntaxe on s'en fout et tout ce qui nous intéresse c'est le sens en mathématiques, c'est la sémantique. Et bien ce dont la logique s'occupe c'est les deux choses, à la fois la sémantique et la syntaxe, et on ne peut pas se passer de la syntaxe et de savoir comment on parle de même que en français, pour parler français il faut connaître un minimum les règles de syntaxe sinon on n'est pas compris si on n'a pas une syntaxe correcte, donc en mathématiques ce que je suis en train de faire jusqu'à maintenant c'est plutôt des remarques d'ordre syntaxique. Quand je vous dis c'est organisé en noms, propositions, on fait des assemblages etc. c'est plutôt des remarques d'ordre syntaxique. Et au fond quand je vous disais *(écrit)* n premier implique n impair, quand je comparais n premier implique n impair et je ne me souviens plus ce que c'était, enfin bon, je vais reprendre les mêmes, ça n'est pas grave *(écrit)* n premier et n impair, et bien mes remarques consistant à dire *(en entourant n premier)*, là j'ai une proposition qui parle de n *(en entourant n impair)*, là j'ai une proposition qui parle de n je les assemble *(désigne le implique)* à l'aide de ce machin là que j'appelle un connecteur logique binaire et j'obtiens une nouvelle proposition, et ici c'est la même chose, tout ce que je vous ai raconté tout-à-l'heure à ce sujet c'était des remarques purement syntaxiques. Et ça n'est qu'après qu'on s'est posé des questions de voilà est-ce qu'on peut dire c'est vrai ou c'est faux etc. Et c'est là qu'on a vu que ça, mais en fait le hiatus qu'il y avait, c'est que deux phrases à la construction syntaxique identique avaient une interprétation sémantique différente. Donc cette distinction syntaxe/sémantique elle est importante.

Phase 8 : y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?

Dialogue 8.1 :

— R. Cori : Alors maintenant je vais, bon je vais effacer le Cid tant pis pour lui. Ah oui mais du coup, on a laissé tomber ma question sur la différence langue mathématique langue naturelle. Bon c'était juste pour vous dire que quand vous me dîtes dans la langue naturelle il y a plus d'ambiguïtés les ambiguïtés ça relève de la sémantique, il y a double interprétation possible mais du point de vue de la syntaxe c'est pas, a priori c'est pas ça en tout cas la différence. Alors donc je reviens à ma petite enquête sur la différence entre langue naturelle et langue mathématique. Est-ce qu'il y a d'autres idées. Oui ? Alors je m'intéresse plutôt à la syntaxe, oui ?

— S5 : Dans la langue naturelle il y a des synonymes.

— R. Cori : Ben en mathématiques aussi, je dirai même qu'en mathématiques il y en a beaucoup plus que dans la langue naturelle. Ça c'est une très bonne remarque parce que c'est un point que je vais développer : la synonymie c'est beaucoup beaucoup utilisé en mathématiques. Oui ?

— S6 : Ce que vous disiez tout-à-l'heure, le fait que le langage mathématique soit plus concis, permet de mieux saisir l'ensemble du discours.

—R. Cori : Alors une question de concision peut-être. On peut peut-être penser que. Alors je suis étonné que personne n'ai dit déjà quelque chose, enfin vous vous l'avez vaguement dit tout-à-l'heure à votre première réaction à la différence entre langue naturelle.

— S7 : J'ai dit qu'il n'y en avait pas.

— R. Cori : Ah vous avez dit qu'il n'y en avait pas.

— S7 : Que c'était un langage adapté.

— R. Cori : Oui mais alors qu'est-ce que c'est que ce adapté ? Quand vous avez dit c'est adapté ça veut dire quoi ?

— S7 : C'est adapté aux choses qu'on est en train de considérer.

— R. Cori : Bon d'accord. Bon vous pratiquez la langue mathématique tous les jours et la langue naturelle aussi vous voyez une différence essayez de

— S8 : Le vocabulaire, c'est plus précis.

— R : Alors plus précis, je suis dans le domaine de la sémantique dans l'interprétation dans le sens que je donne. Oui ?

— S9 : On utilise du vocabulaire mathématique spécifique.

— R. Cori : Il y a du vocabulaire spécifique d'accord, mais quand vous regardez, je ne sais pas moi, le vocabulaire des chaudronniers, ils ont des, ils ont un, voilà. Oui ?

— S10 : En français on peut trouver plusieurs sens à un même mot.

— R. Cori : La polysémie, oui, plusieurs sens à un même mot mais vous voyez, vous êtes encore dans le sens. Oui ?

— S11 : Le langage mathématique, la syntaxe est plus rigoureuse, plus précise.

— R. Cori : La syntaxe est plus rigoureuse oui. Enfin a priori si un professeur de français vous entendait, il ne serait pas content il vous dirait ben chez nous aussi c'est rigoureux ma pauvre dame, hélas cette rigueur n'est pas beaucoup observée mais enfin.

— S11 : Elle n'est pas appliquée en tout cas dans ma classe.

— R. Cori : Vous savez en maths aussi, les matheux, surtout les matheux professionnels, ne respectent absolument pas les règles de la syntaxe, ils s'en foutent complètement puisqu'ils se comprennent. Puisqu'ils la maîtrisent parfaitement, à partir du moment où ils la maîtrisent parfaitement ils s'en foutent, bon ce qui les intéresse c'est les idées. Alors ?

— S12 : Les symboles.

Phase 9 : les symboles ne sont pas une distinction fondamentale

Dialogue 9.1 :

— R. Cori : Ah, voilà, j'attendais les symboles, ils ont tardé à venir mais les voilà. La langue mathématique elle use de symboles, ça c'est quelque chose qui est clair. En français vous n'avez pas de symbole. Donc la langue mathématique use de symboles et ça c'est une différence. Mais je dirais que c'est une différence mineure, et même c'est presque pas une différence parce que au fond, les symboles, on pourrait s'en passer. La meilleure preuve c'est qu'il y a eu toute une période de l'humanité qui s'en est très bien passée. Le symbolisme c'est apparu à peu près à l'époque de Descartes, c'est récent à l'échelle de l'histoire de l'humanité, c'est évidemment récent. Avant il y avait des mathématiques, et même des mathématiques de très bon niveau, prenez les mathématiques arabes des onzième siècle, douzième siècle, dixième, bon et bien vous avez des mathématiques, d'ailleurs c'est assez intéressant d'aller regarder des ouvrages, des reproductions d'ouvrages de cette époque des mathématiques arabes, ou pas arabes, enfin antérieures au symbolisme, et qu'est-ce que ? Je ne sais pas si ça vous est déjà arrivé ? Oui ? Quelle est la première observation ? D'ailleurs je ne sais pas, il y en a peut-être parmi vous qui ont essayé de faire des petites incursions dans l'histoire des mathématiques avec leurs élèves, en leur montrant des textes et qu'est-ce qui est frappant dans ces textes anciens antérieurs au symbolisme ?

— S13 : Ben ça ne ressemble à rien d'autre. Non mais c'est, enfin on, par rapport à d'autres textes écrits à la même époque, on sent qu'il y a une différence dans le domaine abordé rien qu'à la façon dont les phrases sont tournées.

— R. Cori : Oui mais comparé aux livres de mathématiques d'aujourd'hui, quelle est la différence ? Ben il y a deux différences, c'est que : d'abord il n'y a pas de symboles, alors si, il y a des symboles parce que les chiffres étaient, et encore que il y a même une période où ils sont peu utilisés, ce qui apparaît parfois c'est des figures géométriques mais si vous mettez de côté les figures géométriques, vous avez des textes, c'est du texte pur, c'est-à-dire vu de loin on ne peut pas s'apercevoir, sauf à examiner de plus près, qu'il s'agit de mathématiques. Bon, mais surtout, la caractéristique pour nous c'est que c'est ?

— S14 : C'est incompréhensible.

— R. Cori : C'est incompréhensible, c'est totalement incompréhensible, c'est des phrases d'un kilomètre de long. Comment ?

— S15 : Ils manquent de vocabulaire posé que nous on a d'avantage maintenant.

— R. Cori : Oui si on veut. Mais il y a surtout que comme on avait quand même, les mathématiques ont toujours cette exigence de rigueur et de précision, et bien on est obligé de dire tout ce qu'il y a à dire, on ne peut pas passer des choses sous silence, on ne peut pas faire de sous-entendus, ce qui donne des phrases extrêmement compliquées et nous on a le plus grand mal. Ceci dit ça a existé, il fût un temps où on parlait comme ça et on parlait quand même et ça avait un sens et on faisait des maths etc. Alors le symbolisme c'est considéré comme une révolution dans l'histoire des mathématiques, car en effet ça a fait faire des bons gigantesques en mathématiques parce qu'effectivement on avait là un outil qui permettait de gagner, d'optimiser, enfin de gagner du temps, de gagner en longueur de phrase par exemple mais pas que. Enfin ça c'est un exemple, évidemment on ne pourrait pas s'en passer, ça serait idiot de vouloir s'en passer mais en théorie, si on voulait, on pourrait s'en passer, et tout-à-l'heure quand j'ai commencé à vous faire une phrase alambiquée pour vous dire le théorème de Fermat sans utiliser la moindre lettre et le moindre, voilà, et vous voyez bien que si j'étais un peu plus soigneux j'y serai arrivé. Je n'y suis pas complètement arrivé mais bon. Donc c'est certes une différence mais ça n'est pas une différence cruciale, on pourrait se passer des symboles. Alors où est la différence à part ça ?

Phase 10 : la distinction fondamentale c'est la présence de variables dans le langage mathématique

Dialogue 10.1 :

— R. Cori : Et bien je ne vais pas faire durer le suspens longtemps : la différence essentielle, pour moi en tout cas, c'est que *(écrit)* le langage mathématique utilise des variables. Et ça c'est une caractéristique du langage mathématique qui le distingue de façon essentielle, de façon fondamentale, du langage naturel. Et là, j'attends vos protestations, normalement dans le scénario vous devez vous mettre à protester en disant mais si dans la langue naturelle il y a plein de variables.

— S16 : Mais vous entendez la langue naturelle par exemple, les documents de raisonnements mathématiques ?

— R.Cori : Non, non, la langue naturelle, la langue que vous utilisez pour communiquer.

— S16 : Celle qu'on utilisait quand il n'y avait pas les symboles.

— R.Cori : La langue de la littérature française, la langue de Marcel Proust, celle de celui qui a écrit la notice d'utilisation de votre réfrigérateur, là c'est peut-être faux parce que bon. Enfin bref la langue française usuelle hors mathématiques. Bon je dis en mathématiques il y a des variables, dans la langue française il n'y en a pas, habituellement l'objection que j'ai, mais vous êtes un bon public vous n'objectez pas, c'est mais je peux très bien utiliser la lettre x dans une phrase du langage courant, je peux dire hier j'ai rencontré monsieur x. Sauf que quand je dis hier j'ai rencontré monsieur x, non mais vous mettez x à la place de dupont c'est pas ça qui en fait vraiment une variable.

— S17 : C'est les valeurs numériques ?

— R.Cori : C'est pas une question de valeurs numériques c'est un tout petit peu plus compliqué que ça.

Phase 11 : le destin des variables en mathématiques c'est qu'elles peuvent devenir muettes

Dialogue 11.1 :

— R.Cori : Le destin des variables dans la langue mathématique c'est quoi ?

Murmures inaudibles.

— R.Cori : Quand vous utilisez une variable en mathématiques, qu'est-ce qui va lui arriver in fine ?

Réponses inaudibles.

— S18 : On va la fixer.

— R. Cori : Pas toujours, souvent vous allez finir par lui attribuer une valeur donc vous la ferez disparaître mais il y a une autre façon de la faire disparaître.

— S19 : Elle est muette.

— R. Cori : Et bien si on revient au début de notre conversation, enfin de mon monologue, oh vous avez participé un peu tout de même, nous avions examiné ces phrases là n premier implique n impair, n premier et n impair etc. bon.

— S20 : C'est muet.

— R. Cori : Ah, plus fort.

— S20 : C'est une variable muette.

— R. Cori : Voilà, le destin des variables en mathématiques c'est que elles peuvent devenir muettes. Ce qui provoque le silence complet.

Phase 12 : donnez moi un exemple d'une phrase mathématique avec une variable muette

Dialogue 12.1 :

— R. Cori : Alors, donnez moi un exemple d'une phrase mathématique avec une variable muette.

— S1 : a plus b au carré est égal à a au carré plus b au carré plus deux a b. Non, c'est pas muet ça ?

— R. Cori : C'est muet parce que vous avez vos yeux de mathématicien.

— S2 : Mais qu'est ce ça veut dire une variable muette ?

— S3 : Intégrale de 0 à 1 de x dx.

— R. Cori : *(écrit)* L' intégrale de 0 à 1 de x dx. Dans cette affaire là, la variable x, qui apparaît deux fois, on dit qu'elle a deux occurrences dans l'expression, est muette. Elle est muette c'est-à-dire que ça, contrairement aux apparences, c'est pas du tout, l'objet qui est désigné par ce nom là c'est pas du tout un objet qui dépend de quelqu'un qui s'appelle x. Quand vous écrivez *(écrit)* cosinus x, cosinus x c'est le nom d'un objet mais qui dépend de façon essentiel de qui est x. Cosinus x c'est un objet qui est lié à un objet qui s'appelle x, qui en dépend d'accord ? Donc quand vous dites cosinus x ça désigne quelque chose qui dépend de x et quand vous direz cosinus x *(écrit)* égal 7 et bien vous donnerez une information, à savoir que, ben ça c'est une information sur un objet qui s'appelle x et qui dit tiens le cosinus de x c'est 7. Le fait que ça puisse arriver ou non ne m'intéresse pas. Tandis qu'ici, ben je ne parle pas d'un x en particulier, si j'avais écrit *(écrit)* intégrale de 0 à 1 de y dy, tout le monde serait d'accord avec moi pour dire qu'il s'agit exactement du même objet. Dans un cas j'ai mis la variable x, dans l'autre cas j'ai mis la variable y. Je dis que ces variables sont muettes. En réalité, une meilleure preuve encore c'est que je peux donner un nom de cet objet où il n'y ait plus de variable du tout. Donner moi un autre nom pour cet objet où il n'y ait pas de variable.

— S4 : Un demi.

— R. Cori : *(écrit)* Un demi.

Phase 13 : synonymie

Dialogue 13.1 :

— R. Cori : Voici 3 noms pour ce même objet, et c'est pour ça que je reviens à cette histoire de synonymie, pour dire qu'en mathématiques la synonymie est utilisée à haute dose. Et le propre, un petit peu, des mathématiques, c'est que pour un même objet on dispose d'une quantité de noms énorme. Et souvent notre activité consiste à trouver de nouveaux noms pour des objets, à changer le nom, à trouver d'autres désignations et à l'opposé il y a une autre activité tout aussi importante qui consiste à découvrir qu'au contraire sous deux noms différents se cache le même objet, ou bien on vous donne le nom d'un objet et on vous demande d'en trouver un autre qui a voilà, ou bien on vous donne deux noms et on vous demande, le but c'est de prouver que ces deux noms désignent le même objet. Donc là vous voyez, dans la mesure où ce truc là s'appelle un demi et bien ça montre bien que le rôle de la variable x là dedans il est assez modeste. La variable x, c'est une façon de désigner dans laquelle elle joue un rôle certes, mais elle est muette, tandis qu'ici, quand je dis cosinus x égal 7 et bien il est très difficile, il est même impossible de dire la même chose sans parler de x, parce que vous donnez une information sur x. Alors si, peut-être que pour éviter des discussions inutiles je mettrai cosinus x égal un demi, si je dis cosinus x égal un demi, et bien c'est une phrase qui vous renseigne sur un objet qui s'appelle x et si je vous demande de me dire ça autrement, vous allez peut-être trouver des tas de façons de me le dire mais dans toutes ces façons que vous trouverez il y aura x. Parce que si vous me dites quelque chose où il n'y a pas x, ça ne pourra pas vouloir dire cosinus x égal un demi. On est bien d'accord ? Cosinus x égal un demi, il y en a qui vont me dire que x est égal à Pi sur 3, d'autres qui vont me dire ah oui mais ça non c'est x égal Pi sur 3 plus 2 k Pi, enfin bon voilà, il y aura des tas de. Mais à chaque fois, x sera présent vous me parlez de x et de personne d'autre. Cette proposition là parle de x, ceci *(en montrant intégrale)* n'en parle pas. Là il n'y a pas d'objet x dont on parle. Comme ça parle de x, ben je dis que x est parlante là dedans et muette là dedans. Et bien cette situation ne se présente pas dans la langue française.

Phase 14 : qu'est-ce qui me fait dire que x est muet ?

Dialogue 14.1 :

— R. Cori : Alors une autre façon de rendre les variables muettes, ici là *(en montrant intégrale)* x est muet alors est-ce qu'il y a quelque chose qui me signale que x est muet là dedans. Quand je regarde cette expression, qu'est-ce qui me fait dire que x était muet là dedans, qu'est-ce qui vous a fait dire que x était muet là dedans ?

— S5 : dx

— R. Cori : Oui, il n'y a pas que le d. Si j'avais écrit dx vous ne m'auriez pas dit que x est muet. Si le x est muet c'est parce qu'il n'y avait pas que le d il y avait aussi ?

— S6 : Le signe d'intégrale.

— R. Cori : Le signe d'intégrale effectivement. Donc ce qui a attiré l'attention sur le fait que la variable x est muette là dedans c'est ça *(en entourant au tableau)*, c'est l'assemblage intégrale de quelque chose à quelque chose et puis le d. Quand je vois ça, je sais que la variable qui suit le d partout dans cette expression partout va être muette. Il y a une autre façon plus commune de fabriquer des proposions avec des variables muettes et ça m'étonne que vous ne l'ayez pas encore, donnez moi un autre exemple de variables muettes.

— S7 : Les équations.

— R. Cori : Oui, vous avez raison mais c'est un peu compliqué.

— S8 : Les fonctions.

— R. Cori : Ouais. Bien tout à l'heure quand j'ai écrit la définition avec les epsilon de la phrase la suite u_n est convergente et converge vers ℓ la traduction que j'en aie donné a fait apparaître plein de variables autres. Quand je dis la suite u_n est convergente de limite ℓ, bon il y a la variable ℓ, alors il y a la variable n, bon c'est un peu compliqué mais ensuite quand j'ai donné la définition vous avez vu epsilon, vous avez vu n_0, et donc quel est le statut de epsilon là dedans ?

— S9 : Muet.

— R. Cori : Ben epsilon est muet, si vous dites quelque soit êta à la place de quelque soit epsilon ça sera pareil. Et si vous dites la suite u_n converge vers ℓ vous avez fait purement et simplement disparaître la variable epsilon. Donc la variable epsilon était évidemment muette là dedans. Bon, qu'est-ce qui l'a rendue muette, enfin qu'est-ce qui fait qu'elle était muette ?

— S10 : Quelque soit.

— R. Cori : Quelque soit, le quantificateur. Les quantificateurs rendent les variables muettes. Et alors j'en viens à ceci. Donc ça, dans l'expression *(écrit* $\forall x\ A[x]$*)* quelque soit x et puis n'importe quoi A de x, et bien dans toute expression de ce genre les occurrences de x sont muettes, les occurrences c'est les endroits où ça apparaît *(écrit)* les occurrences de x sont muettes.

Phase 15 : retour sur les énoncés « n est premier et n est impair »et « n est premier $\Rightarrow$ n est impair »

Dialogue 15.1 :

— R. Cori : Et du coup, je reviens encore une fois à mes exemples du début. *(écrit)* n est impair et n est premier, n est impair implique n est premier. Maintenant on est en mesure je pense de formuler de façon plus précise et plus claire peut-être qu'est-ce qui a fait que nous réagissons tous différemment devant ces deux phrases : et bien c'est que dans la première nous voyons une affirmation relative à un objet qui s'appelle n, et dans la deuxième nous voyons une affirmation générale relative aux propriétés de l'ensemble des entiers, et donc très précisément ce que ça signifie c'est que nous avons traité la variable n dans le deuxième cas comme si elle était

— S11 : Muette.

— R. Cori : Muette alors que ici *(en montrant première proposition)* elle était

— S11 : Parlante.

— R. Cori : Parlante. Alors les logiciens disent liée parfois à la place de muette, et libre à la place de parlante. Et c'est effectivement ça qui se passe, c'est que ici *(deuxième proposition)* on ne regarde pas ça comme une affirmation relative à un objet précis qui s'appelle n mais comme une généralité, alors qu'ici *(première proposition)* on voit ça comme une affirmation relative à un objet qui s'appelle n, en tout cas spontanément et majoritairement c'est comme ça qu'on l'interprète, et donc n est apparue comme parlante ici et muette là, alors que rien ne l'indique parce que la chose qui pourrait l'indiquer, pourquoi elle est muette parce qu'il y a le quelque soit, sauf qu'il n'est pas écrit mais il y est quand même. Oui ?

— S12 : Si on met n est impair donc n est premier.

— R. Cori : Ah, ça n'est plus une proposition.

— S12 : Elle est muette ou elle est parlante ?

— R. Cori : Alors *(en écrivant)* n est impair donc n est premier, alors premièrement ça n'est pas une proposition, et deuxièmement, si je dois donner un statut à n ça sera le statut de variable parlante, vous parlez d'un objet donné, ceci n'est pas quantifié du tout, n est impair donc n est premier, vous êtes en train de parler d'un objet n qui a été choisi peut-être tout-à-l'heure, peut-être que avant vous avez dit soit n un entier tel que bla bla bla et puis à un moment vous dites n est impair donc n est premier. C'est de celui-là dont vous parlez et pas d'un autre. Quand vous dites n est impair donc n est premier ça veut dire que vous avez été amené par des circonstances qui ne m'intéressent pas à considérer un entier n particulier, vous avez eu l'information qu'il était impair et par un raisonnement, faux d'ailleurs, vous dites n est premier. Mais vous parlez d'un objet précis il n'y a pas de mutification là dedans. Oui ?

— S13 : C'est ça ce que vous nous disiez tout-à-l'heure comme la différence entre le donc et l'implication ?

— R. Cori : Non, la différence entre le donc et l'implication j'y viens. Ben j'ai 5 minutes c'est très bien. Voilà, donc j'ai encore une chose à vous dire sur muette parlante mais je vais quand même passer par le donc.

Phase 16 : table de vérité de l'implication

Dialogue 16.1 :

— R. Cori : Alors je vais commencer par vous poser une question *(écrit $A \Rightarrow B$)* à laquelle au moins une personne dans cette salle pourra répondre c'est l'implication A implique B est-ce que vous pouvez me dire en fonction des vérités respectives de A et de B dans quels cas ceci est vrai et dans quels cas ceci est faux ?

— S1 : Si A est fausse c'est toujours vraie et si A est vraie, l'implication n'est vraie que si B est vraie.

— R. Cori : Que dit l'électronique ? L'électronique est d'accord ? L'électronique ne considère pas.

— S2 : En électronique il n'y pas d'implication.

— R. Cori : Il n'y a pas d''implication c'est plus commode, d'accord. Alors *(en commençant à dessiner la table de vérité)* on suppose que les vérités de A et de B sont indépendantes l'une de l'autre et qu'elles peuvent être, que tout peut arriver, c'est-à-dire qu'elles peuvent être vraies tous les deux, fausses tous les deux, l'une vraie l'une fausse, donc il y a combien de cas à examiner ?

— S3 : Quatre.

— R. Cori : Il y a quatre cas. Donc *(en complétant les deux premières colonnes de la table de vérité)* ou bien faux tous les deux, ou bien A faux B vrai, ou bien A vrai B faux, ou bien A vrai B vrai. Bon et bien je peux dire quel est le statut de A implique B dans chacun de ces cas. Donc là c'est ?

— S4 : *R. Cori écrit en même temps* Vrai vrai faux vrai.

— R. Cori : Bon alors on peut contester ça, et je vous rassure tout de suite il y a sans arrêt une foule d'objections qui apparaissent. Bon là *(en montrant la troisième ligne)* tout le monde est d'accord. Si A est vrai et si B est faux, A implique B est faux, unanimité. Si A est vrai et B est vrai, unanimité parce que ça coûte pas cher, bon voilà. Et par contre ces deux là *(en montrant les lignes avec A faux)* alors là ça peut susciter des discussions infinies. Il y a plusieurs façons de mettre fin à ces objections. Une façon de mettre fin à ces objections c'est : je veux convaincre quelqu'un que A implique B est faux qu'est-ce que je vais faire ?

— S5 : On l'écrit différemment.

— R. Cori : Non, non, sans changer l'écriture. J'ai deux propositions A et B et je veux convaincre mon voisin, qui ne l'est pas, que A implique B est faux. Je vais lui expliquer : ben voyons, A est vrai, B est faux donc l'implication est fausse, c'est le seul moyen dont je dispose. Je ne vais jamais convaincre quelqu'un que A implique B est faux en partant d'une situation où A est faux, ça ne le convaincra pas, ce qui veut bien dire que le seul cas où ça c'est faux, c'est celui là. Si c'est le seul cas où c'est faux ça veut dire que dans tous les autres cas c'est vrai. Alors maintenant si vous êtes savant, si vous avez accepté le fait que A implique B c'est la même chose que *(écrit)* NON A ou B, mais accepter ça c'est déjà accepter la table de vérité alors évidemment le seul cas où cette affirmation là *(en montrant NON A ou B)* est fausse c'est lorsque les deux qui sont là sont fausses, c'est-à-dire A vrai B faux. Alors c'est une des façons d'expliquer ça, il y en a d'autres. Il y a une autre façon qui est beaucoup meilleure, que je vous recommande, c'est de dire c'est comme ça on ne discute pas, c'est la table de vérité voilà. Non, je ne vous la recommande pas quand même. Ceci dit, il faut prendre les tables, de même qu'on apprend la table d'addition, vous n'expliquez pas aux gamins de primaire que 2+1 égal 3, vous les terrorisez pour qu'ils apprennent ça par cœur bon voilà d'accord. Alors donc la table de vérité, c'est une table de vérité, regardez moi, vous ne me verrez pas souvent faire des tables de vérité, en voilà une, c'est ce qu'on appelle la table de vérité de l'implication et ça me dit que l'implication A implique B est fausse uniquement dans le cas où A est vrai et B est faux. Dit comme ça, ça semble raisonnable. Quand je dis A implique B n'est faux que lorsque A est vrai et B est faux, c'est raisonnable, c'est conforme à votre pratique quotidienne des mathématiques. Vous n'avez jamais établi que A implique B était faux autrement qu'en disant que A était vrai et B était faux. Et ben oui, parce que vous n'avez pas d'autres possibilités, dans tous les autres cas c'est vrai donc ça a comme conséquence inévitable que ces deux cas *(avec prémisse fausse)* c'est vrai aussi. Alors il y en a, y compris parmi d'éminents collègues mathématiciens, qui disent on a qu'à considérer que ça n'est pas défini là, mais c'est absurde, ça ne tient pas la route, on est obligé de dire c'est défini et c'est vrai ici et c'est vrai là. Voilà bien, alors maintenant j'en viens à. Oui ?

— S6 : En fait les deux premiers cas on dit que c'est vrai parce que c'est pas faux, je ne comprends pas.

— R. Cori : Oui, en mathématiques un énoncé il est vrai ou il est faux, enfin s'il est normalement constitué.

— S6 : Non mais, enfin les deux premiers cas en fait

— R. Cori : Alors je vais vous proposer un énoncé, n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels, *(écrit* $\forall\, n$ *(*n *pair* $\Rightarrow n^2$ *pair))* est-ce que vous pensez que ce que je viens d'écrire est vrai, ou non, ou autre situation ?

— Plusieurs S : C'est vrai.

— R. Cori : Ça a l'air de vous faire de la peine mais vous êtes obligés de me dire que c'est vrai. Ça vous fait de la peine mais c'est vrai quand même, oui je suis désolé que ça soit vrai, mais c'est vrai, nous sommes tous d'accord que c'est vrai, pour tout entier n si n est pair son carré est pair aussi, OK ? Bien, ce qui veut dire que, j'espère que nous allons continuer d'être d'accords, que ceci, *(écrit n pair* $\Rightarrow$ *n^2 pair)* que cette implication est vraie quel que soit l'entier n, je ne fais que redire la même chose. Pour n'importe quel entier n cette implication est vraie. Ah, ils cherchent le piège désespérément, ils se disent à quel moment il va nous rouler dans la farine ? Bon. Si cette implication est vraie pour n'importe quel entier n, ça veut dire que je peux donner à n toutes les valeurs possibles et ça va être vrai. Autrement dit *(écrit)* 2 pair implique 2^2 pair c'est vrai, *(écrit)* 3 pair implique 3^2 pair c'est vrai, ah, aïe aïe aïe.

— S7 : L'implication est vraie parce que l'hypothèse est fausse.

— R. Cori : Là je suis dans la configuration faux implique faux. Si vous admettez que ça c'est vrai *(en entourant proposition de départ)* je suis vraiment navré mais vous êtes obligés d'admettre que 3 pair implique 3^2 pair. Ou alors il y a un problème. Ou alors il y a un gros problème.

— S8 : L'implication est vraie parce qu'on a quelque chose de faux au départ, on a quelque chose de faux à la fin, donc au total c'est vrai.

— R. Cori : Si vous voulez, si ça ça vous convainque. C'est pas le même argument qui va convaincre les uns et les autres. Ça c'est une grande leçon de, enfin une grande idée pour l'enseignement, c'est que c'est impossible que pour convaincre de quelque chose en mathématiques ça soit la même argumentation qui vaille pour tout le monde. Et ça c'est quelque chose qui devrait nous inviter, malheureusement les circonstances de notre métier font que c'est pratiquement impossible, mais si on avait la possibilité chaque fois qu'on veut essayer de convaincre de quelque chose, de prouver, de donner plusieurs démonstrations différentes, de donner plusieurs arguments différents et bien on toucherait d'avantage de monde. Bon je ne m'égare pas là dedans parce que. Donc voilà, si vous admettez que ça *(en montrant* $\forall\ n$ *(n pair* $\Rightarrow$ *n^2 pair))* c'est vrai vous êtes obligé d'admettre que ça *(en montrant 3 pair implique* 3^2 *pair)* c'est vrai et donc vous êtes dans une situation où faux implique faux c'est vrai et d'ailleurs dans toutes les situations faux implique faux est vrai. Bon voilà, vous êtes amenés à le considérer et à considérer que c'est vrai c'est comme ça, on n'y peut rien. Bien.

Phase 17 : différence entre *si* A *alors* B et A *donc* B

Dialogue 17.1 :

— R. Cori : J'en viens juste à une chose, quand vous dites si A alors B, qui est une phrase que vous prononcez souvent devant vos élèves, est-ce que savoir que ça c'est vrai ça vous renseigne sur la vérité de A ?

— Plusieurs S9 : Non.

— R. Cori : Non, ça ne vous renseigne pas sur la vérité de A, quand vous dites si A alors B vous ne dites rien sur le fait que A est vraie ou non, est-ce que ça vous renseigne sur la vérité de B ?

— S : Non.

— R. Cori : Non, ça ne vous renseigne pas sur la vérité de B, la seule chose que ça vous dit c'est que à coup sûr vous n'êtes pas dans le cas où A est vraie et B est faux en même temps et c'est tout. Ça ne vous dit absolument pas que A est vrai ni que A est faux, ça ne vous dit absolument pas que B est vrai ni que B est faux ça vous interdit un des quatre cas c'est tout. Bon maintenant écrivons A donc B, qui est aussi quelque chose que vous dites souvent à vos élèves, et vous je suis sûr que vous ne le dites pas indifféremment. J'en suis certain, quand vous dites A donc B, quand vous dites ça à vos élèves, qu'est-ce que vous êtes en train de leur dire ?

— Plusieurs S : Que A est vraie.

— R. Cori : Vous êtes en train de leur dire que A est vraie, et vous êtes en train de leur dire que B est vraie, et vous êtes en train de leur dire une troisième chose, parce que si vous voulez juste leur dire que A est vraie et B est vraie, il y a une façon plus simple.

— Plusieurs S : A et B.

— R. Cori : Je dirais A et B, mais A et B c'est pas pareil que A donc B, qu'est-ce qui distingue A et B de A donc B ?

— S10 : A implique B est aussi vrai.

—R. Cori : Dans A donc B il y a A, il y a B et il y a un renseignement supplémentaire qui n'est pas d'ordre mathématique. La différence essentielle entre ces deux choses là c'est que ça *(A implique B)* c'est une proposition, mais ça *(A donc B)* ça n'en est pas une. Quand vous dites A donc B vous dites A est vraie, vous dites B est vraie, et suivant les circonstances, vous dites un troisième ingrédient, en tout cas vous ajoutez une troisième chose qui est et j'ai de bonnes raisons de pouvoir vous dire que B est vraie après vous avoir dit que A était vraie, ou bien mes petits vous devriez le savoir puisque dans le théorème numéro 3 du cours d'hier, il y avait bien quelque chose qui me permettait de déduire B de A. Donc vous dites A, vous dites B, et vous donnez une justification à ça, mais la justification n'est pas contenue dans la proposition mathématique, donc en général la justification c'est quoi ? C'est A implique B. Donc la plupart du temps quand vous dites A donc B, ce que vous voulez dire c'est A , B et A implique B, c'est pas forcé, ça c'est une interprétation de ma part, il peut y avoir d'autres raisons pour lesquelles je dis A donc B, mais très souvent en mathématiques, du collège en tout cas et même du lycée, très souvent quand on leur dit A donc B on fait référence à un théorème du genre A implique B. Mais vous voyez bien que ce on fait référence à un théorème n'a plus rien à voir avec une proposition mathématique, c'est tout autre chose, j'invoque un résultat antérieur etc. Oui, il se fait tard on va s'arrêter. Donc j'espère que maintenant vous êtes tous convaincus que A donc

> B c'est pas pareil que si A alors B. La chose essentielle c'est que quand vous dites si A alors B vous n'affirmez pas que A est vraie et quand vous dites A donc B vous affirmez que A est vraie, ça devrait suffire à vous convaincre que c'est pas la même chose voilà. Et donc les bouquins qui disent que c'est la même chose vous les mettez dans le feu. Bon cet après-midi ça sera beaucoup plus cool il y aura plein de collègues à moi qui vont parler beaucoup moins que moi et de façon beaucoup plus pertinente donc ne vous découragez pas de tout ce que je vous ai raconté.

K.4 Exposé sur la structure modulaire du raisonnement mathématique, dialectique démonstrateur/utilisateur

T. Joly présente ce qu'il appelle la structure modulaire du raisonnement mathématique : dans une démonstration, nous ne re-démontrons pas tout à partir des axiomes, nous utilisons des boîtes, des théorèmes, qui sont isolables au sein de la démonstration, et qui permettent d'avoir des preuves plus faciles à suivre et à vérifier. Il fait le parallèle avec la structure des programmes informatiques. Nous nous retrouvons ainsi lors de la rédaction d'un raisonnement mathématique alternativement en position de démonstrateur d'une (ou plusieurs) propositions et d'utilisateur d'autres propositions, ce que T. Joly appelle la dialectique démonstrateur/utilisateur.
Il évoque également la gestion des connecteurs dans les preuves. Il précise que les règles logiques concernant les connecteurs mises en œuvre dans une preuve le sont généralement de manière implicite, et apporte un autre éclairage sur la différence entre *si... alors* et *donc* en présentant la règle du *modus ponens* : le *donc* correspond à la barre marquant la déduction dans la présentation des règles logiques (par exemple $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}$ pour le *modus ponens*) :

> T. Joly : Il y a une différence énorme entre une preuve formelle, quand on a vraiment tout écrit, et une preuve telle qu'on les rédige. C'est en général un truc dont on n'a pas tout à fait conscience, c'est que en fait, les preuves rédigées sont remplies de trous, on utilise implicitement des tas de choses mais sans le dire, et on n'a pas forcément conscience des règles logiques que l'on utilise, alors que ce sont toujours les mêmes. Alors la plus célèbre ça s'appelle le *modus ponens*, si A implique B et A on en déduit B (*écrit* $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}$). Si P alors Q or P donc Q. J'insiste sur la différence entre implique et donc. Si on dit que A implique B, implique exprime un connecteur, ça exprime un énoncé mathématique susceptible d'être vrai ou faux. Donc, c'est pas une articulation entre vous voyez là (*montre* $A \Rightarrow B$), c'est finalement, c'est comme une conjonction de formulations entre deux propositions, on s'inspirait des langues naturelles, du français par exemple. Donc ça c'est une articulation

> entre des propositions, entre des sous-énoncés. Tandis que le donc c'est une articulation entre des énoncés pour constituer la preuve. Le donc c'est ça (*montre la barre dans* $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}$), c'est le fait de déduire B à partir de A implique B et de A.

T. Joly précise que la règle du *modus ponens* est la plus largement utilisée, mais que souvent l'hypothèse A *implique* B n'apparaît pas explicitement.
Il présente ensuite les règles d'introduction et d'élimination du connecteur ET, juste pour donner un exemple de ces deux types de règles logiques. Il ne souhaite pas développer ces règles concernant les connecteurs, car selon lui les stagiaires connaissent déjà « le raisonnement par l'absurde, tout ces trucs là… » R. Cori, qui a en tête la distinction pas toujours très claire pour les mathématiciens entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée, lui demande tout-de-même de dire un mot. T. Joly aborde alors d'abord les règles associées à la négation :

> T. Joly : Il y a un connecteur qui est un peu conflictuel, c'est normal par nature, c'est la négation. Donc en général, enfin comment on utilise la négation ? Ben c'est ça revient à, alors déjà on peut la dissoudre dans l'énoncé, c'est-à-dire qu'un énoncé qui est en apparence, en apparence atomique, enfin qui a une négation par exemple (*écrit*) c ne majore pas P, et ben on va l'utiliser directement sous la forme (*écrit*) il existe x appartenant à P tel que x est supérieur à c. Donc cette négation qui était en surface, hein ça c'est non c majore P, et ben pof, en fait c'est non quel que soit x appartenant à P x inférieur ou égal à c, pof, par les règles de De Morgan, on a fait passer en dessous la négation en fait elle se trouve là (*montre* $x > c$). Comme ça on utilise un, on dissout, on fait descendre les négations dans l'énoncé. Parce que sinon ben, comment utiliser un négation directement ? Ben par confrontation. Alors ça donne lieu à une règle voisine de celle-ci (*montre la règle du modus ponens*) qui s'appelle le *modus tollens* c'est-à-dire, alors il ne faut pas que je me trompe (*écrit* $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$). Vous voyez, ben oui, si on a non B on peut en déduire non A, évidemment parce que c'est tout à fait, c'est, c'est ce qu'on appelle une contraposition, en fait ça revient finalement à utiliser les implications dans l'autre sens. Les implications c'est sens unique en principe, contrairement aux équivalences, mais finalement la négation, vous voyez les implications conduisent la vérité dans ce sens là (*de prémisse à conclusion*) et la fausseté dans ce sens là (*de conclusion à prémisse*). C'est-à-dire que finalement on peut utiliser ça (*montre l'implication*) pour partant de non B on peut arriver à non A, voilà, ça permet de, voilà. Et en dehors de ça est ce qu'il y a quelque chose de spécifique au raisonnement par l'absurde ? Alors on pourrait ramener, enfin je ne sais pas, je n'ai pas envie de.

Il ne parle finalement pas spécifiquement du raisonnement par l'absurde.

T. Joly revient ensuite à la dialectique démonstrateur/utilisateur et au fait de *choisir* ou *subir* les variables selon la position que l'on a, avec une dualité entre les deux quantificateurs existentiel et universel. Puis il veut montrer comment ces considérations peuvent aider à retrouver des « règles logiques ». Il prend alors l'exemple des énoncés (*) $\exists x\ (P[x]$ et $Q[x])$ et (**) $(\exists x\, P[x]$ et $\exists x\, Q[x])$.
R. Cori met en doute l'affirmation de T. Joly qui stipule que l'énoncé (*) est plus fort que l'énoncé (**). Cette intervention a l'effet voulu de faire réagir les stagiaires :

— T. Joly : Simplement dans cette réalité d'utilisation des quantificateurs on retrouve, enfin c'est un guide pour la sémantique, enfin on retrouve naturellement, ça permet, oui, on retrouve naturellement des principes, des énoncés qui sont toujours valides, ou le fait qu'ils ne le sont pas. Par exemple si je dis *(écrit* $(\exists x\, P[x]$ *et* $\exists x\, Q[x])$, si on doit comparer cet énoncé à *(écrit* $\exists x\ (P[x]$ *et* $Q[x])$ il existe x tel que P de x et Q de x, on peut retrouver le fait que en fait ça *(en montrant le deuxième énoncé)* c'est plus fort que ça *(en montrant le premier énoncé)*. Plus fort, ça veut dire que ça ça implique ça. Alors vous voyez, c'est déjà dans une perspective d'utilisation : quand on dit fort, faible, fort c'est à dire que c'est un outil plus fort.

— R. Cori : Pourquoi c'est plus fort, c'est pareil non ?

— S1 : Non, c'est pas forcément le même x

[...]

— R. Cori : Je ne suis pas convaincu

— S2 : Dans la première formulation c'est nécessairement le même x qui permet de vérifier P et Q alors que dans la deuxième formulation ça peut être un x différent, enfin un certain x pour P et un autre nombre qui ne sera pas forcément x qui peut être y pour Q c'est pas forcément le même.

— R. Cori : Vous n'auriez pas quelque chose de plus convaincant ? Qu'est-ce qui serait plus convaincant ?

— S2 : Ben un exemple.

— R. Cori : Ah très bien un exemple, donnez moi un exemple.

— T. Joly : On peut prendre par exemple x

— R. Cori : Attends attends qui a un exemple ?

— S3 : Il existe un x tel que $x - 1$ est positif, il existe un x tel que $x - 3$ est positif, il existe un x tels que les deux soient positifs sans qu'il y ait les deux en même temps. La propriété $P[x]$ et la propriété $Q[x]$ ça peut être.

— S4 : On peut reprendre ce qu'on a fait ce matin, il existe un entier tel que n est impair et n est premier et il existe un entier n tel que n est impair et il existe un entier, on va l'appeler différemment, m tel que m est premier.

— R. Cori : Oui mais tout ce que vous me racontez là c'est vrai.

— S4 : Oui mais dans la deuxième formulation c'est pas forcément le même entier.

— S5 : Mais ça pourrait être le même.

Murmures

— R. Cori : Moi ma question c'est d'avoir un exemple devant lequel je sois obligé de.

— T. Joly : Bon René je vais essayer de te convaincre.

— R. Cori : Mais je ne veux pas être convaincu par toi.

— T. Joly : Alors déjà un exemple. Pour faire efficace, autant prendre un exemple pour lequel P et Q sont totalement incompatibles, comme ça ça saute aux yeux.

— S4 : Ben il existe un entier, enfin un nombre positif et il existe un nombre strictement négatif.

— T. Joly : Par exemple, il existe un entier pair et un entier impair [...] Alors je reprends, quand on dit qu'un énoncé A est plus fort qu'un énoncé B, ça s'utilise, par exemple on dit le théorème fort de machin, variante forte ou variante faible du théorème, ça veut seulement dire A implique B. Mais vous voyez que dans cette dialectique démonstrateur/utilisateur, ça prend tout son sens, toute sa saveur. Ça veut dire que si A implique B, ben à partir de A comme hypothèse, on peut faire plus de choses, ah ça c'est sûr, on pourra toujours faire au moins autant de choses qu'avec B : si on a A comme hypothèse on a d'emblée B, et donc on peut faire tout ce qu'on peut faire avec B. Donc A plus fort que B ça veut dire pour l'utilisateur A outil plus efficace que B. Côté démonstration ça veut dire, et bien si c'est mieux, ça coûte plus cher, donc côté démonstration ça veut dire que A est plus dur à prouver que B [...] Alors on peut retrouver le fait que ça *($\exists x\ (P[x]\ et\ Q[x])$)* c'est plus fort que ça *($(\exists x\, P[x]\ et\ \exists x\, Q[x])$)* simplement avec ces considérations démonstrateur/utilisateur, c'est-à-dire que là, alors mettons nous d'un côté, par exemple l'utilisateur : alors ça c'est plus fort que ça, ça veut dire que c'est un outil plus puissant, ben oui, l'utilisateur de ça et bien il va subir un x, ça c'est sûr, dans les deux cas il va subir un x, sauf que là *($\exists x\ (P[x]\ et\ Q[x])$)* il va subir un x pour lequel il a à la fois P et Q, tandis que là *($(\exists x\, P[x]\ et\ \exists x\, Q[x])$)* il va subir un x qui vérifie P, un x qui vérifie Q [...] Alors par exemple pourquoi ça *($(\exists x\, P[x]\ et\ \exists x\, Q[x])$)* n'implique pas ça *($\exists x\ (P[x]\ et\ Q[x])$)*? Et bien quand on est utilisateur de ça on dispose d'un x tel que $P[x]$, d'un x' tel que $Q[x']$ mais ce x et ce x' on ne les choisit pas justement on est utilisateur donc on subit, comme on ne les choisit pas on ne peut pas imposer qu'il soit le même et donc on ne peut pas dire pour un même x pour les deux.

Il est en fait demandé aux stagiaires, mais sans l'expliciter dans ces termes, de donner un contre-exemple pour montrer qu'une implication est fausse (l'implication « quelles que soient les propositions P et Q, $[(\exists x\, P[x] \text{ et } \exists x\, Q[x]) \Rightarrow (\exists x\ (P[x] \text{ et } Q[x]))]$ »). Cette tâche est *a priori* assez élémentaire pour des professeurs de mathématiques.

Pourtant, deux stagiaires proposent des exemples avec des prédicats P et Q pour lesquels les deux énoncés sont vrais. Outre que cette implication n'est pas explicitement écrite sous leurs yeux, ces erreurs peuvent être expliquées par le fait que l'implication est quantifiée universellement sur des propositions, et donc les stagiaires doivent donner des valeurs pour les propositions P et Q qui rendent la prémisse vraie et la conclusion fausse. Or cette manipulation des propositions comme objets mathématiques n'est pas habituelle. Je reviendrai sur cette tâche après l'exposé de T. Joly pour l'expliciter dans ces termes de la logique mathématique (implication universellement quantifiée sur les propositions P et Q).
Finalement T. Joly présente le tableaux ci-dessous que j'appelle *Tableau de manipulations des quantificateurs* :

	Démonstrateur	Utilisateur
de $\forall x\ P[x]$	doit envisager tous les x possibles <u>subit</u> x	<u>choisit</u> le x qu'il veut
de $\exists x\ P[x]$	<u>choisit</u> un x pour lequel il prouve $P[x]$	<u>subit</u> un x arbitraire, dont il sait seulement $P[x]$
$\forall x\,\exists y\ P[x,y]$	subit un x arbitraire, en fonction duquel il choisit le y pour lequel il démontre $P[x,y]$	choisit le x qu'il veut et subit en retour un y pour lequel il dispose de $P[x,y]$
$\exists y\,\forall x\ P[x,y]$	choisit y librement, puis subit n'importe quel x pour lequel il démontre $P[x,y]$	subit un y, puis choisit x, x' ... pour lequel il dispose de $P[x,y]$, $P[x',y]\dots$

Il illustre ces manipulations en prenant l'exemple de la limite de la somme de deux fonctions. Dans cette preuve il n'y a que deux idées mathématiques : majorer chaque différence par $\frac{\varepsilon}{2}$ et utiliser l'inégalité triangulaire. Tout le reste est affaire (complexe !) de manipulation des quantificateurs.

K.5 Activités sur les connecteurs ET et OU au collège

Première activité

Autour des critères de divisibilité, sur les connecteurs ET/OU, négation.

L'activité peut-être proposée dès la $6^{\text{ème.}}$

Exercice 1
Rappeler la propriété vue en cours concernant les nombres entiers divisibles par 5 (« critère de divisibilité par 5 »).
Comment pouvez-vous caractériser les nombres entiers non divisibles par 5 ?

Exercice 2
1) Pour chacun des nombres suivants : 315; 4864; 730 ; 5610; 955 ; 561 et 30.
- le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 10 et dans le tableau de droite sinon,
- répondre par « oui » ou par « non » aux questions « Ce nombre est-il divisible par 2 ? » et « Ce nombre est-il divisible par 5 ? ».

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

2) Compléter les tableaux suivants en proposant quand c'est possible un nombre qui convienne :

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

3) Recopier et compléter les propriétés suivantes pour qu'elles soient vraies :
- Les nombres entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 ….. par 5.
- Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui …............ par 2 …........... par 5.

Cette activité n'a en fait pas été testée dans une classe dans sa version finale. Elle a été élaborée à partir d'un exercice proposé par une collègue du groupe dans une classe de Sixième. Le premier exercice n'a pas été modifié par rapport à la version initialement proposée. G. Notter se contente de soulever quelques points sensibles autour du langage :

> — G. Notter : La collègue qui a proposé cet exercice dans sa classe de Sixième elle participait au groupe. Donc elle était sensibilisée à l'utilisation de la logique et suite à une discussion qu'on avait eu autour des connecteurs et ou elle s'est dit, comme elle venait de finir le chapitre sur la divisibilité en Sixième, elle s'est dit c'est tout pile le moment, je vais pouvoir en parler un peu dans mes classes. Donc ce qu'elle a proposé comme premier exercice c'était de travailler sur la négation d'une propriété où il y avait un ou. Donc elle demande d'abord à ses, alors le premier exercice on ne l'a pas modifié il est resté comme la collègue l'avait proposé dans sa classe. Donc elle demandait de d'abord rappeler la propriété concernant les nombres entiers divisibles par 5 et ensuite de caractériser les entiers non divisibles par 5. Alors déjà on s'était interrogé sur le fait de formuler ici la négation, sur entiers non divisibles par 5, qui est relativement courante, d'utiliser le mot comme ça en mathématiques, beaucoup moins dans la vie courante, dans le langage courant et probablement encore moins pour des élèves de Sixième. C'était vraiment la formulation que la collègue avait utilisé spontanément donc elle a très certainement travailler sur ben ça signifie les entiers qui ne sont pas divisibles par 5. On s'était interrogé sur quelle propriété elle avait pu donner dans son cours et comment elle était formulée. Dans la question qu'elle pose, elle demande de caractériser donc dans sa propriété c'était probablement une caractérisation aussi, donc quelque chose ben, elle devait être formulée comme les entiers divisibles par 5 sont ceux dont le chiffre des unités est 0 ou 5, donc où il y a certainement, donc la caractérisation avec sont ceux qui sont divisibles par 0 ou 5, non qu'est-ce que j'ai dit ? Sont ceux dont le chiffre des unités est 0 ou 5. Et au moment où elle demande donc de caractériser les entiers non divisibles par 5, on se demande comment ça va être formulée cette négation, ne pas être divisible par 0 ou par 5. L'une des premières approches, enfin une des premières réponses des élèves, sera très certainement les entiers non divisibles par 5 sont les entiers dont le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5. On est sur quelque chose qui pourrait être relativement calqué sur le français mais qui pose souci : quand on dit n'est pas 0 ou 5, c'est de voir comment c'est entendu. N'est pas 0 ou n'est pas 5, et à ce moment là peut-être que des élèves le comprennent comme ils ont envie de le comprendre, mais à ce moment là en mathématiques le chiffre des unités n'est pas 0 ou n'est pas 5, ça c'est vérifié par tous les entiers, on ne caractérise plus du tout les entiers non divisibles par 5. Une formulation avec laquelle travailler c'est celle qui

fait intervenir un ni, ni, donc les entiers non divisibles par 5 sont ceux dont le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5. C'est probablement la formulation la plus accessible en Sixième on peut en avoir une aussi qui fait intervenir un et : ceux dont le chiffre des unités n'est pas 0 et n'est pas 5 non plus. Donc voilà a priori sur quoi portait la discussion autour de cet exercice et de ce qu'elle en attendait. Il était certainement plus là pour introduire l'exercice 2, mais quand on donne une propriété, ce qui nous semble utile dans le groupe c'est à chaque fois de travailler des exemples de nombres qui vérifient la propriété, mais aussi d'en proposer qui ne sont pas divisibles par 5 donc de travailler en même temps sur la négation pour bien comprendre cette définition ou cette propriété qui a été donnée en classe. C'est pour ça qu'on arrive sur ce travail sur la négation qui est relativement fréquent.

Pour le deuxième exercice, déroulement et enjeux d'apprentissage sont détaillés. Par exemple, on voit apparaître les tables de vérités des connecteurs Et et OU dans la question 2, qui est prévue pour faire l'objet d'une discussion plutôt que d'une résolution individuelle par chaque élève :

— G. Notter : Ce qu'on proposait pour cet exercice c'est de donner quelques nombres, alors pas deux trois parce que ça nous semblait pas assez, pas quinze non plus même si quinze serait encore pas suffisant pour pouvoir essayer de conjecturer sur la suite. Donc a priori la première chose que l'on proposait c'était de séparer en deux les nombres divisibles par 10 et ceux qui ne sont pas divisibles par 10 de façon à essayer d'en dégager des règles de fonctionnement claires pour les deux groupes de nombres et après pour chaque nombre parmi ceux qui sont divisibles par 10 s'interroger : est-ce qu'ils sont divisibles par 2, est-ce qu'ils sont divisibles par 5 ? Alors en demandant des oui ou des non, pour les compléter tous, pareil pour ceux-là *(en montrant le tableau de droite de la question 1)*, l'objectif étant quelque part d'aller vers la table de vérité qui serait proposée ici *(en montrant la question 2)* où on étudie a priori les 4 cas possibles : est-ce qu'on peut trouver un nombre divisible par 10 qui soit à la fois divisible par 2 et par 5 ? Donc on a un oui dans les deux cases. Alors là ça ne pose pas de problème, c'est tous ceux qui étaient là *(en montrant le tableau de gauche de la question 1)* et justement faire réfléchir sur le fait qu'on ne peut pas trouver de nombre divisible par 10 qui pourrait être divisible par 2 sans l'être par 5, donc là effectivement c'est plus quelque chose qui est prévu pour être mené ensemble avec les élèves [...] Ce qui importe dans cette question 2 c'est la discussion qui va y avoir autour, pour s'aventurer jusqu'à la troisième question. Et donc du coup l'objectif c'était de donner à compléter la propriété avec les entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 5, ce qui ne posait pas trop de souci mais ceux qui ne sont pas divisibles par 2 *(à la* *place de 10)*, on se retrouve ici face à la négation d'un et, donc les entiers qui ne sont pas divisibles par 2 *(à la place de 10)* sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 ou qui ne sont pas divisibles par 5.

La version initiale (ci-après) et les modifications sont ensuite commentées :

1. Recopier et compléter la propriété suivante :

   Les nombres entiers divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2. . . . . . qui sont divisibles par 5.
2. a˚) 315 est-il divisible par 2 ?, b˚) 315 est-il divisible par 5 ?, c˚) 315 est-il divisible par 10 ?
3. a˚) 4864 est-il divisible par 2 ?, b˚) 4864 est-il divisible par 5 ?, c˚) 4864 est-il divisible par 10 ?
4. En vous inspirant de la propriété du 1), comment pouvez-vous caractériser les nombres qui ne sont pas divisibles par 10 ?

—G. Notter : Alors ce que vous avez ici c'est la version initiale de l'exercice 2. Donc la collègue avait commencé par demander de compléter la propriété sur les entiers divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 et qui sont divisibles par 5, mais là c'était quelque chose qui n'avait pas été donné dans son cours, donc qui arrivait à notre sens plutôt un peu trop tôt par rapport à l'activité où on commençait à s'interroger. Et dans ses questions 2 et 3 elle proposait de s'intéresser aux nombres 315 et 4864 et dans le groupe ça ne nous a pas semblé assez pour pouvoir éventuellement en tirer quelque chose. D'autant plus que la question qu'on pouvait se poser pour le petit c, donc pour 315 les élèves répondent divisible par 2 par rapport à leur critère sur le chiffre des unités, là aussi sur le chiffre des unités *(montre la question 2b˚)* et pour le petit c on ne savait pas trop ce que la collègue attendait. C'était que les élèves répondent non selon ce qu'ils avaient dit en a˚) et en b˚), c'est-à-dire en utilisant le critère *(montre question 1)*, qui n'est même pas celui là d'ailleurs, qui est celui qui viendrait après sur les nombres non divisibles par 10, ou si c'était en faisant référence au chiffre des unités ce qu'ils avaient dans le cour ? Si c'est en faisant référence uniquement au chiffre des unités, et de la propriété du cours pour a˚), b˚) et c˚) le 1 nous a vraiment semblé être là beaucoup trop tôt et le mettre plutôt en dernière question. Et on a préféré pour les propriétés les donner à compléter en précisant bien le par 2 et le par 5 pour éviter que ça ne parte totalement dans toutes les directions et cadrer un peu, limiter un peu le nombre de possibilités au moment des corrections, sachant qu'il y en aurait quand même déjà pas mal à aborder.

Finalement, les lois de Morgan, qui sont sous-jacentes à cet exercice, sont écrites au tableau. Bien sûr, dans le déroulement décrit dans une classe de collège, ces lois ne sont pas explicitement abordées, mais par contre, cette activité est présentée aux stagiaires comme pouvant faire l'objet d'une séance dans une classe de lycée, là où les notions mathématiques de critères de divisibilité sont mieux maîtrisées (ou en associant le travail sur les connecteurs à d'autres notions), pour faire un travail sur ces propriétés des connecteurs ET et OU.

Deuxième activité

C. Huet présente ensuite un exercice qu'elle a proposé à ses élèves de Sixième également sur les connecteurs ET et OU :

Pour chaque phrase dire si elle est vraie ou fausse :
Phrase n° 1 : 1444 est divisible par 4 donc par 2.
Phrase n° 2 : 1236 est divisible par 3 et par 9.
Phrase n° 3 : 204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24.

Cet exercice n'était pas planifié à l'avance dans la progression de C. Huet, mais lui a été suggéré par des discussions avec les élèves autour du ET utilisé dans des exercices de géométrie pour relier deux conditions portant sur un objet. Cet exercice est extrait d'un contrôle qui suit une séquence où les élèves ont construit eux-mêmes des propositions vraies ou fausses portant sur des questions de divisibilité et comportant des connecteurs ET, OU ou le mot « donc » :

> — C. Huet : J'enseigne de la Sixième à la Terminale S. Dans toutes les classes j'essaie de mettre de la logique. En fait c'est pas que j'essaie, c'est naturel, j'en mets quasiment tout le temps. Donc en Sixième, au moment par exemple de constructions de géométrie, il faut tracer des points, des segments, vous savez au tout début de la géométrie, les éléments de géométrie : points, droites, segments, tout ça. On se rend compte que parfois il y a deux conditions qui sont connectées par un et, puis l'élève se trompe et à ce moment là on se tourne vers la classe et on se dit : en quoi s'est-il trompé ? Et puis boum, ben on en arrive à leur faire dire des choses comme ça *(en montrant les lois de Morgan)* : P et Q est fausse parce que par exemple il y avait P qui était fausse. Alors partant de ce constat avec les élèves ben j'ai fait un peu d'arithmétique aussi dans le même goût. Alors là vous n'avez par écrit que ce que j'avais demandé en contrôle mais pour arriver à ça, on a discuté pendant plus d'une heure avec les élèves où ils devaient eux mêmes construire des phrases vraies puis des phrases fausses avec des petites contraintes. Par exemple je leur disais : vous devez utiliser le mot divisible et puis vous devez par exemple mettre un et. Alors très rapidement ils étaient capables de construire des phrases comme ça et la deuxième ne leur pose pas de souci.

C. Huet commente elle-même l'utilisation de phrases avec donc :

> — C. Huet : Après je leur disais, alors je sais René râlerait mais il y avait un donc, j'avais pas trop envie de parler de si alors pour les raisons que vous devinez. Pour des Sixièmes, imaginer des prémisses fausses et pour autant une phrase de type A implique B qui serait vraie, ça me semblait un peu abstrait. Donc j'avais boycotté le si alors pour arriver à quelque chose que somme toute on utilise plus souvent en maths : A donc B, avec A vraie B vraie. Bon, et ils devaient me construire des phrases aussi de type la 1, pas trop de souci. Par contre, alors pardon, ils avaient aussi lors de notre entretien qui a duré une grosse heure, faire des phrases avec ou. Alors là ça a posé tout d'un coup beaucoup plus de soucis mais ils sont rentrés dans le jeu, très vite ils ont été capables de construire des phrases en arithmétique, je veux dire avec A ou B vraie, en comprenant qu'il suffisait qu'il y en ait une des deux qui soit vraie. Voilà ça c'était déjà pas mal gagné et la dernière, alors pour les plus forts on a réussi à dire avec leurs mots à eux que pour que ça marche il fallait deux nombres premiers entre eux mais c'était avec leurs mots. Bon, on a dit même le mot après mais le jour du contrôle vraiment les bons élèves ont su restituer et ne pas tomber dans le piège, pour les autres ça a été un peu plus dur, mais enfin on a quand même eu ce beau challenge de faire de la logique en arithmétique. Donc par écrit il ne reste plus que ça mais ça donne objet à beaucoup beaucoup de réflexions en classe.

Je reviens ensuite sur ce choix en rappelant la différence entre *si A alors B* et *A donc B* et en suggérant d'utiliser un vocabulaire différent :

> —Z. Mesnil : Par rapport à cette histoire de donc, ce qui est important c'est de bien se rendre compte que la phrase 1 et la phrase 3 ce ne sont pas des propositions, hein. Quand on dit un donc, vous en avez parlé ce matin manifestement, A donc B c'est pas une proposition [...] Moi la seule chose que je changerai dans cet exercice c'est par rapport à la manière de demander vrai ou faux , c'est-à-dire que j'ai l'impression que c'est important de garder le vrai et le faux pour des propositions. Une proposition oui, on peut dire si elle est vraie ou si elle est fausse, si on a bien tous les renseignements dont on a besoin pour pouvoir le dire. Par contre A donc B ça n'est pas tellement en terme de vrai ou faux mais plutôt est-ce que c'est correct ou pas ? [...] C'est vrai que du coup quand on rédige un exercice c'est pas évident de mélanger ces deux niveaux de phrases, parce que finalement c'est pas tout à fait les mêmes termes qui s'y appliquent hein. On peut demander si ces phrases avec donc sont correctes ou pas, est-ce que effectivement l'élève qui fait ce raisonnement il a raison de faire ce raisonnement et il a raison d'énoncer cette conclusion, est-ce qu'il est correct ce raisonnement. Et des exercices avec des propositions où là, on peut demander si c'est vrai ou si c'est faux. Je pense que tant qu'à

faire, ne pas mélanger les deux et essayer d'avoir des vocabulaires séparés pour les deux.

Cette différence, déjà abordée de façon plus théorique le matin, est reprise ici sous un angle plus pratique : comment faire sentir cette différence dans la classe. Il n'est pas suggéré de l'expliquer aux élèves, il n'y a pas d'injonction à utiliser l'une plutôt que l'autre, mais seulement une proposition de marquer cette différence par une différence dans les énoncés des tâches.
J'ajoute finalement un autre commentaire sur le fait que des élèves peuvent penser que pour montrer qu'une conjonction est fausse, il faut donner une valeur qui rend les deux parties de la conjonction fausses, en m'appuyant sur une description d'un moment observé dans une classe d'un stagiaire de l'année précédente :

> — Z. Mesnil : L'année dernière je suis allée dans une classe de quelqu'un qui était venu suivre le stage et puis il avait demandé. C'était en Seconde, c'était sur des inéquations et il y avait une dernière proposition qui était : pour tout x appartenant à 1 plus l'infini, $f(x)$ positive et $g(x)$ négative. Et puis il y a un élève qui corrige qui dit c'est faux, qui donne un contre-exemple pour lequel les deux propositions $f(x)$ positive et $g(x)$ négative étaient fausses. Et puis il passe à la suite et puis il dit : ah mais au fait, et si j'avais, est-ce qu'il fallait forcément me donner une valeur qui rende les deux fausses ? Et en fait là, ça a donné lieu à discussion parce que il y avait la moitié de la classe qui pensait que ben oui et l'autre moitié de la classe qui disait ben non, puisque c'est un et, pour montrer que c'est faux il suffit d'une valeur qui rend fausse l'une des deux propositions. Voilà, et c'est juste pour dire aussi que là, il allait continuer, et en fait, le fait qu'il se dise tiens je vais revenir là dessus, en fait il a parlé pendant 5 minutes d'un petit truc de logique. Mais je pense que quand les programmes disent voilà, en parler à tout moment, c'est un peu ce genre de chose, c'est un peu à l'occasion d'une correction, tout d'un coup se dire ah mais là il y aurait un petit truc à dire et d'ailleurs là je vais en profiter pour vérifier. Parce que si ça se trouve, je ne sais plus si l'élève qui avait répondu, lui, il avait une bonne conception de la négation du ET ou pas. Des fois ils peuvent donner une réponse juste mais avoir quand même derrière une conception logique erronée donc ça vaut le coup d'aller vérifier derrière que tout est clair.

K.6 Activité sur les théorèmes de Pythagore et de Thalès

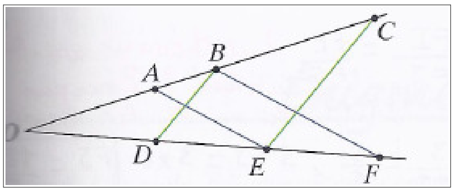
Après avoir analysé les énoncés des exercices A ,B...jusqu'à H ci-après,

dites, pour chaque question posée, si la résolution utilise la partie directe ou la réciproque du théorème de Thalès ou de Pythagore.
(dans le cas où vous choisissez la partie directe,
précisez si elle intervient telle quelle ou sous
sa forme contraposée) :

exercice A:

1°) Un triangle ABC est tel que $AB = 8\ cm$; $AC = 6\ cm$ et $BC = 4\ cm$.
Soit M le point de $[AB]$ tel que $AM = 5\ cm$ et N le point d'intersection de la droite (AC) et de la parallèle à (BC) passant par M.
a) Calculer AN et MN.
2°)Soit P le point de $[BC]$ tel que $MP = 2,25\ cm$.
Les droites (MP) et (AC) sont-elles parallèles?
Trouver deux méthodes pour calculer PC
(l'une d'elle n'utilisant pas du tout le théorème de Thalès).

exercice B:

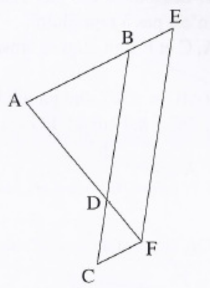


Dans la figure ci-dessus, $(AE) \parallel (BF)$ et $(BD) \parallel (CE)$.
1°) Démontrer que :
$\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OE}{OF}$ et $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OD}{OE}$.

2°) Après avoir prouvé que $OA \times OF = OC \times OD$,
prouver que les droites (AD) et (CF) sont parallèles.

exercice C:

AB = 3,2 cm , AD = 3,5 cm , BD = 4,2 cm ,
DC = 1,8 cm , DF = 1,5 cm et AE = 4,6 cm .



1. Les droites (AB) et (CF) sont-elles parallèles ?
2. Les droites (BD) et (EF) sont-elles parallèles ?

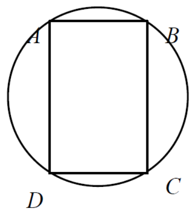
Exercice D:

Construire un triangle BEC tel que BE = 87, BC = 63, EC = 60 et le point S tel que CS = 80, ES = 100 et BS > 100. Montrer que les points B, C et S sont alignés.

Exercice E:

L'unité de longueur étant le cm, construire le triangle LIN tel que LI = 4,8, IN = 3,6 et LN = 6. Calculer le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice F:

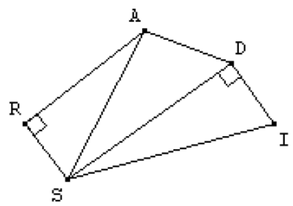


(C) est le cercle circonscrit à un rectangle ABCD tel que BC=2,4×AB. L'aire du rectangle est égale à 21,6 cm². Calculer la longueur du cercle (C) et l'aire du disque.

Exercice G:

Le polygone ci-contre RADIS est tel que :
RS = 20 RA = 48 DI = 72 SI = 97 AD = 39

Le triangle DAS est-il rectangle ?



Exercice H:

On considère le triangle ABC tel que AB = 9 cm AC = 40 cm BC = 39 cm.
Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, précise en quel point.

C. Huet présente une activité sur les théorèmes de Pythagore et de Thalès proposée dans sa classe de Troisième. Elle explique d'abord comment elle introduit les termes *théorème direct*, *contraposée*, *réciproque* dans une séance d'une heure avant d'attaquer la géométrie en Troisième :

> — C. Huet : Alors l'idée en Troisième depuis pas mal d'année [...], quel que soit le milieu scolaire où j'évolue, [...] ben j'ai toujours, enfin j'ai agi comme ça, c'est-à-dire : on discute, on fait de la logique avant d'attaquer la géométrie. Si alors, voilà, la phrase simple : si il y a ça, alors il y a ça, et qu'est-ce qu'on peut en déduire, et les noms que ça porte. Donc, j'hésite pas à utiliser ce mot barbare de contraposée, et de réciproque d'ailleurs. Bon, alors pourquoi allez-vous me dire ? Ben tout simplement parce que j'ai le sentiment, après de nombreuses années d'expérience, que donner les noms aux objets qu'on utilise en mathématiques aide à forger un peu le raisonnement, la rédaction, ce qu'on pourrait appeler nous tous depuis longtemps la rigueur. Et ça évite de voir des, je sais pas, cent égal cent qui nous exaspèrent tous autant qu'on est[...] Donc en fait ce qui se passe c'est que après avoir eu une heure de discussion avec eux sur qu'est-ce que c'est les éléments de logique élémentaire : [...] est-ce que la réciproque a le même degré de vérité que la partie directe et qu'en est-il de la contraposée ? Bon, tout ça avec des mots de la vie de tous les jours, c'est eux qui construisent leurs phrases. Ils comprennent très vite que la réciproque n'a pas du tout la même valeur que la partie directe et ils comprennent que la contraposée finalement est une espèce de synonyme de la partie directe. Donc moi ce qui m'intéresse c'est que les élèves sachent reconnaître la question qui va se poser à eux : va-t-il falloir utiliser la réciproque, la contraposée, et éventuellement même la partie directe afin d'éviter tous les déboires de rédaction qu'on connaît tous. Donc je leur donne ces exercices en vrac. [...] C'est assez flagrant de voir au début comme ça cafouille même au sein d'une même heure et voir petit à petit qu'au bout d'une heure ça y est quoi, le mécanisme mathématique et logique est enclenché.

Dans sa présentation, C. Huet a clairement exprimé sa position en faveur de l'utilisation du mot *contraposée*. Je mentionne alors les instructions officielles qui n'encouragent pas à utiliser le mot contraposée au collège (voir document ressource pour les classes du collège, *Raisonnement et démonstration*, paragraphe sur le raisonnement par l'absurde p. 14 « on utilise le raisonnement par l'absurde comme forme plus accessible d'un raisonnement par contraposée ») :

> — Z. Mesnil : Il faut savoir que les instructions officielles ne vous encouragent pas à utiliser le mot contraposée au collège.
>
> — S1 : Ni réciproque de Pythagore, on n'a plus le droit réciproque de Pythagore

Plusieurs murmures inaudibles de stagiaires

— Z. Mesnil : [...] C'est compliqué réciproque parce que ça part de l'intention de présenter sous forme d'une équivalence, qui n'est pas forcément une mauvaise intention. Sauf que moi j'ai l'impression que dans les manuels c'est pas du tout ça, c'est juste on a fait disparaître tout le vocabulaire [...] Dans le document par exemple sur la démonstration au collège, ils disent qu'ils préfèrent, c'est plus facile pour l'élève une sorte de raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire quand on a A implique B, ben plutôt que de dire on a aussi non B implique non A par contraposée, ben plutôt dire supposons qu'on a non$B$, ben supposons qu'on a A, ben non c'est pas possible parce que si on avait A on aurait B puisque A implique B, et puisqu'on a non B, il y a une contradiction, donc en fait on a non A. Alors évidemment ils ne le disent pas avec ces mots aussi formalisés mais voilà. Sans doute cette gymnastique elle est intéressante et elle est utile à faire un certain nombre de fois le temps de se convaincre finalement qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes mais c'est vrai qu'une fois qu'on est convaincu de ça ben c'est quand même un super outil pour pouvoir. Quand on a un théorème on en a deux quoi, on a A implique B puis au passage on a non B implique non A.

J'explique ensuite le choix dans l'énoncé de l'activité de ne pas mettre sur le même plan réciproque et contraposée (il est question de la partie directe ou de la réciproque, et pour la partie directe, de la forme telle quelle ou de la forme contraposée) :

—Z. Mesnil : Il y a une distinction entre partie directe et réciproque qui sont en fait deux théorèmes, alors il se trouve que dans leurs formes ils ont une ressemblance, ils ont un rapport syntaxique entre eux j'ai envie de dire, mais après ils peuvent être vrai ou faux complètement indépendamment l'un de l'autre. Alors que entre partie directe et contraposée c'est des énoncés équivalents.

Une stagiaire demande à C. Huet comment elle énonce le théorème dans sa classe. Elle évoque les manuels dans lesquels « on trouve propriété de Pythagore, théorème de Pythagore, réciproque de Pythagore, bon voilà il faut faire un choix à un moment donné, c'est quoi votre choix ? » C. Huet explique son choix de dire partie directe, partie réciproque et contraposée, tout en étant consciente de « tricher » par rapport au programme. La stagiaire reprend alors cette proposition en distinguant théorème et application du théorème : « si on devait faire un cours ça serait partie directe et deux applications, puis partie réciproque et deux applications. » Je rebondis sur cette distinction qui rejoint encore la différence entre implication et déduction :

—Z. Mesnil : [...] Le théorème de Pythagore c'est une équivalence (*écrit* $A \Leftrightarrow B$), voilà c'est tel truc équivaut à tel truc, être rectangle en A équivaut à BC^2 égal machin machin, voilà. Et maintenant, ce théorème unique il me

> permet d'agir dans quatre situations et c'est peut-être là finalement qu'il y a la différence et peut-être c'est important pour chaque situation de ré-écrire quelle est l'implication qu'on va utiliser etc etc. Mais je pense qu'on peut à la fois insister sur le fait que le théorème de Pythagore est une équivalence et à la fois bien différencier. Voilà, savoir A équivaut à B c'est quand même super parce que quand j'ai A je sais B, quand j'ai B je sais A, quand j'ai non A je sais non B, quand j'ai non B je sais non A. Alors c'est un petit truc, comme dirait, tout-à-l'heure Thierry parlait de démonstrateur/utilisateur, l'utilisateur de l'équivalence il est assez riche quand même, il a des outils pour un certain nombre de situations.

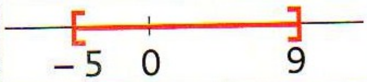
Un stagiaire s'exprime en faveur de la séparation entre théorème direct et théorème réciproque pour ne pas que les élèves pensent qu'il y a toujours équivalence. Une autre stagiaire évoque un problème dans la rédaction pour certains élèves qui supposent ce qu'ils ont à démontrer.
Cette question de la confusion entre implication et équivalence, et des choix de présentation des théorèmes, est une question qui fait polémique. C. Huet, et certains stagiaires, disent et justifient les choix qu'ils font. La logique n'apporte pas d'éléments permettant de faire pencher la balance d'un côté plutôt que de l'autre. En rappellant la distinction entre un théorème (qui est une proposition) et les déductions possibles à partir de ce théorème, il s'agit juste de donner un éclairage sur les raisonnements mis en jeu selon le choix qui est effectué.
Une stagiaire pose ensuite la question de la négation du théorème de Pythagore car une de ses collègues utilisait cette dénomination pour la contraposée. Elle demande confirmation qu'il y a erreur de la part de sa collègue.
R. Cori intervient ensuite pour insister sur le fait que la réciproque et la contraposée d'une implication se présentent sous forme d'une implication, implicitement universellement quantifiée, alors que la négation d'une implication est une proposition existentiellement quantifiée qui ne se présente pas sous forme d'une implication.
Nous revenons sur la négation du théorème de Pythagore demandée dans le test de début de stage, les stagiaires proposent tout de suite en chœur « il existe un triangle rectangle », mais nous avons vu dans l'analyse des réponses données le matin qu'ils étaient alors moins unanimes.

K.7 Activités sur les connecteurs ET et OU en classe de Seconde

EN CLASSE DE SECONDE:

Septembre (classe)
Manuel Repère (chap 1 Généralités sur les fonctions)

7. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Inégalités	Intervalles	Représentation sur une droite graduée
$x \geqslant 2$		
	$x \in [1;+\infty[$	
		
$x \leqslant 0$		
$x \leqslant -6$ ou $x > -2$		
	$x \in [-6;0] \cup]1;2[$	

Octobre (classe)
Manuel Indice

Compléter les phrases suivantes, soit avec « et », soit avec « ou » :

a. 1, 5, 8, 9, 11, 15 sont des entiers impairs … inférieurs à 10.
b. 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 … inférieurs à 10.
c. 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 … par 2.
d. 10, 20, 60 sont des multiples de 2 … de 5.

Manuel Repère (page logique, chap 1 Généralités sur les fonctions)

1. Compléter les phrases suivantes à l'aide de « et » ou « ou ».

a. $xy = 0$ équivaut à $x = 0$ …… $y = 0$.
b. $xy \neq 0$ équivaut à $x \neq 0$ …… $y \neq 0$.
c. $\dfrac{x}{y} = 0$ équivaut à $x = 0$ …… $y \neq 0$.
d. −5, 0 et 5 sont des entiers naturels …… des entiers relatifs.
e. $(x+3)(2x-3) = 0$ pour $x + 3 = 0$ …… $2x - 3 = 0$.
f. L'intervalle $]7;10[$ contient les réels plus grands que 7 …… plus petit que 10.
g. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels tels que $x \leqslant 3$ …… $x > 0$.
h. $[-1;4[$ est l'ensemble des réels tels que $x < 4$ …… $x \geqslant -1$.
i. 2, 8, 6, 10, 15, 20 sont des entiers pairs …… supérieurs à 12.

12 janvier 2013 (DS)
Vrai ou Faux ? Justifier les réponses.
d) Si $(x-2)(2x+1) > 0$, alors $x - 2 > 0$ ou $2x + 1 > 0$.

15 janvier 2013 (classe)
Déterminer le signe de (x-3)(3x+2)

G. Notter revient sur les connecteurs ET et OU mais pour exposer cette fois-ci une progression sur ces notions dans sa classe de Seconde. Le premier moment de rencontre avec ces connecteurs est au tout début de l'année, ils sont associés à la réunion et à l'intersection d'intervalles, avec des exercices de traduction entre une écriture avec inégalités, une écriture avec appartenance à un intervalle ou à une réunion d'intervalles, une représentation graphique. L'utilisation des connecteurs ET et OU dans ce cadre n'a globalement pas posé de problème à ses élèves. Notons qu'elle associe le connecteur ET à la représentation graphique d'un intervalle borné (troisième ligne du tableau). Or, dans la plupart des manuels, cette représentation graphique est associée à une double inégalité qui cache la conjonction. G. Notter est attentive au travail sur les connecteurs dans cet exercice, ce qui l'amène à expliciter cette conjonction, mais elle n'insiste pas sur ce choix et il est possible que les stagiaires ne remarquent pas qu'il y a là une position particulière.
Le deuxième exercice présenté est extrait du manuel *Indice*. G. Notter précise qu'elle ne le donne plus dans sa classe car l'énoncé est problématique : il donne l'impression qu'il n'y a qu'une réponse possible alors que là où on peut compléter avec ET, on peut aussi compléter avec OU. Elle raconte cependant les débats qu'il y a eu dans sa classe quand elle l'a proposé à ses élèves :

> — G. Notter : [...] Ben dans une classe il y a toujours, je dirai 90 % des élèves qui ont mis et ici, un ou deux qui a mis ou. Ils ont tous raison, ils ont du mal à l'admettre et en plus de ça, une fois qu'on dit à ceux qui ont mis et que celui qui a mis ou a aussi raison, alors là ça m'a, c'était intéressant mais après il faut s'attendre pendant les quinze jours qui suivent à avoir sans arrêt des questions du style : là vous avez mis et est-ce que vous pourriez mettre ou ? Là on a mis ou, est-ce qu'on va mettre et ? Mais vous aviez dit que [...] Ce qui me plaît moi dans les exercices de logique, c'est que ça permet de susciter des tas de débats, des tas de questions. On entend dans ces cours là des élèves que je n'entends pas habituellement. Il y a des élèves qui s'intéressent à la syntaxe et au langage qui sont parfois largement dépassés alors soit dépassés soit peu intéressés par ce qu'on peut faire sur des exercices plus classiques, et qui interviennent à ce moment là et de façon tout à fait pertinente.

Bien sûr, comme le décrit G. Notter, conformément au principe du maximum d'information, qui agit comme un contrat didactique, la plupart des élèves vont compléter avec ET quand c'est possible. Je souligne pour les stagiaires que le problème avec cet exercice, au delà de la formulation de la consigne, est la correction donnée dans le livre du professeur qui n'évoque pas la possibilité de mettre OU quand il est possible de mettre ET.
Une stagiaire intervient pour préciser qu'elle parle du ET et du OU en même temps que de l'intersection et de la réunion, en précisant que les éléments de la réunion appartiennent à l'un à l'autre ou aux deux, et dit qu'après elle n'a plus de soucis. Mais le

souci dans cet exercice n'est pas seulement que les élèves admettent que la proposition « 6 est un nombre pair ou un multiple de 3 » est vraie, mais qu'ils admettent qu'elle est « aussi vraie » que la proposition « 6 est un nombre pair et un multiple de 3 ». G. Notter précise que pour sa part, elle donne une définition de la réunion qui n'utilise pas le OU (la réunion des deux ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à l'un des deux), et qu'après elle leur dit que ça signifie dans l'un ou dans l'autre. R. Cori fait remarquer qu'« on peut définir la réunion de A et de B comme étant l'ensemble constitué des éléments de A et des éléments de B », le *et* ici n'ayant pas du tout valeur de connecteur, mais étant un « et d'adjonction. »
La rencontre suivante avec les connecteurs ET et OU pour les élèves de G. Notter se fait à l'occasion d'un devoir commun, dans un exercice Vrai/Faux avec une implication dont la conclusion est une disjonction (« si $(x-2)(2x+1) > 0$ alors $x-2 > 0$ ou $2x+1 > 0$ »). G. Notter raconte qu'elle n'a pas osé insister pour que la quantification universelle soit explicite, de peur d'être accusée de couper les cheveux en quatre. Dans les copies de ses élèves, les trois quarts avaient perçu la quantification mais par contre très peu avaient correctement donné un contre-exemple avec les deux facteurs négatifs. Du coup, peu de temps après, elle revient là dessus à l'occasion d'un exercice « déterminez le signe de $(x-3)(3x+2)$ » (première fois que les élèves rencontrent des inéquations avec un produit, juste après avoir travaillé sur le signe d'une fonction affine). Ils en sont alors arrivés à résoudre l'inéquation $(x-3)(3x+2) > 0$, une élève au tableau a proposé comme proposition équivalente « $x-3 > 0$ ou $3x+2 > 0$ », mais la classe a tout de suite réagi en disant « c'est pas un ou c'est un et ». Un élève a rapidement dit qu'il pouvait aussi y avoir les deux facteurs négatifs, et ils sont donc partis à résoudre l'inéquation en écrivant « $(x-3)(3x+2) > 0$ équivaut à $[(x-3 > 0$ et $3x+2 > 0)$ ou $(x-3 < 0$ et $3x+2 < 0)]$ ». G. Notter les a laissés, même si elle savait qu'un tableau de signes aurait été plus simple. Ils ont fini la résolution en utilisant des droites graduées, tout ça prenant un certain temps, et finalement, quand G. Notter a présenté le tableau de signe, celui-ci « a été perçu comme un soulagement ». Elle précise cependant qu'elle recommencera une telle discussion car le travail autour du ET et du OU était très intéressant.
R. Cori intervient sur la formulation « déterminez le signe de $(x-3)(3x+2)$ », pour lui la seule réponse raisonnable est « je suis incapable de déterminer le signe de $(x-3)(3x+2)$ attendu que je ne sais pas qui est x ». Cet énoncé est codé et l'élève doit savoir ce qu'on attend de lui, et que cette phrase ne parle pas d'un objet qui s'appelle x. Il suggère au moins de soulever cet implicite, ou même de choisir une formulation dans laquelle apparaît le fait qu'on ne considère pas une valeur de x particulière, comme « étudiez le signe de $(x-3)(3x+2)$ selon la valeur de x ».
Je reviens sur l'exercice avec les intervalles, et propose « $x \leqslant 6$ ou $x \leqslant 3$ », qui n'est pas couramment proposé. Au delà de l'intérêt par rapport au travail sur les intervalles, je fais remarquer qu'on peut aller assez loin dans les considérations logiques en faisant le

lien avec la tautologie $[(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \text{ ou } B) \Leftrightarrow A]$. Les stagiaires « soufflent » face à cette formule compliquée. Je fais remarquer que c'est sans doute juste du à un manque d'entraînement à écrire ce genre de formalisation, et suggère l'intérêt de se poser des questions de généralisation auxquelles la logique permettra de répondre, ici par exemple se demander pourquoi on a une proposition du type « A ou B » qui équivaut à A.
R. Cori fait part de sa gêne à propos du premier exercice car une variable x intervient dans les deux premières colonnes et pas dans la troisième. Et autant il n'est pas possible d'écrire dans la première colonne des inégalités sans variable, autant dans la deuxième colonne, il serait tout à fait possible d'écrire simplement un intervalle. R. Cori ne prétend pas que modifier l'exercice pour qu'il n'y ait plus ce problème (on pourrait par exemple faire apparaître la variable x dans l'énoncé de la troisième colonne : « représentation graphique sur une droite graduée de l'ensemble auquel appartient x ») changerait la réussite des élèves, il y a ici encore un effet de contrat, les élèves s'y soumettent sans doute sans trop de difficulté. Il attire simplement l'attention sur un souci de rédaction que les professeurs n'ont peut-être pas à l'esprit quant à l'utilisation des variables.
Il intervient ensuite, toujours en saisissant une occasion, sur la distinction entre la proposition A implique B et l'affirmation de la vérité de cette proposition, qui est souvent sous-entendue quand nous l'énonçons, comme ça a été le cas quand j'ai écrit la proposition $[(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \text{ ou } B) \Leftrightarrow A]$:

> — R. Cori : Le problème quand vous commencez à faire de la logique d'une façon ou d'une autre, c'est-à-dire à vous intéresser aux propositions, bon d'abord il faut, et c'est bien à mon avis d'habituer les élèves à l'idée que c'est pas parce que j'écris une proposition que cette proposition est automatiquement vraie. Donc je peux écrire une proposition fausse, je peux écrire une proposition et demander si elle est vraie ou fausse donc c'est pas parce que quelque chose est écrit que c'est vrai d'accord bon. Et donc après avoir abondamment dit A implique B est vrai, faux, si machin si truc etc. À un moment donné on se laisse entraîner par notre tentation naturelle qui dit : ah ben oui mais B implique A, il se trouve que ça implique que A ou B équivaut à A. Et donc qu'est-ce qu'on fait ?On écrit ça, et quand on écrit ça, le signe d'implication qu'on utilise c'est pas c'est pas ça qu'on a en tête quoi. Quand on écrit ça, on pense, on veut affirmer que c'est toujours vrai. (*j'écris « est une tautologie » à la suite de la proposition*) Oui, on peut dire ça comme ça, mais en fait on a l'impression de l'avoir dit en disant ça implique et dire ça implique c'est pas tout à fait la même chose que s'intéresser à l'énoncé P implique Q quoi voilà.

Une stagiaire demande des précisions sur ce qu'est une tautologie. C. Huet donne l'exemple de la tautologie $(A \Rightarrow B)$ OU $(B \Rightarrow A)$. R. Cori résout avec les stagiaires le petit exercice de calcul propositionnel qui consiste à vérifier que c'est une tautologie, en proposant le raisonnement suivant : soit A est faux et donc $A \Rightarrow B$ est vrai, soit

A est vrai et donc $B \Rightarrow A$ est vrai, quoiqu'il en soit la disjonction est vraie. Plusieurs stagiaires demandent à ce qu'il reprenne ce raisonnement. Il s'agit pourtant d'un raisonnement très simple sur les valeurs de vérité, habituel dès que l'on a fait un peu de calcul propositionnel, ce qui montre le peu d'habitude qu'en ont les stagiaires. R. Cori propose une reformulation de ce résultat : « quand j'ai deux propositions A et B quelconques il y en a toujours une des deux qui implique l'autre » et propose de l'appliquer à deux propositions :

> — R. Cori : Par exemple, ben par exemple, un exemple qu'on a vu ce matin A : n est impair et B : n est premier. n est impair implique n est premier, c'est faux m'a t-on dit. n est premier implique n est impair, c'est faux aussi malheureusement. Et donc quoi ? Donc il est en train de nous raconter des histoires [...] Où est l'embrouille ?
>
> — S1 : Les quantificateurs c'est pas les mêmes.
>
> — R. Cori : Voilà l'embrouille c'est les quantificateurs.

Il écrit alors les deux propositions $\big(\forall x\,(A[x] \Rightarrow B[x])\big)$ OU $\big(\forall x\,(B[x] \Rightarrow A[x])\big)$, qui n'est pas toujours vraie, et $\forall x\,\big((A[x] \Rightarrow B[x])$ OU $(B[x] \Rightarrow A[x])\big)$ qui est toujours vraie. Il indique qu'« un quel que soit ça ne se laisse pas distribué sur un ou » en donnant un exemple avec les propositions « n est pair » et « n est impair ».

Annexe L

Activités présentées par les stagiaires

L.1 Vrai ou Faux en Sixième

Une stagiaire (ci-après désignée par P1) présente une activité qu'elle a proposée dans sa classe de Sixième. Il s'agit d'une activité de type Vrai/Faux autour d'implications.

6ème

ACTIVITÉ

1) Voici 10 affirmations. Pour chacune d'elles, répondre par « vrai », « faux » ou « je ne sais pas ».

	Affirmations	Réponses
1	ABCD a quatre angles droits; on en déduit que ABCD est un carré.	
2	Un nombre entier qui est un multiple de 3 est aussi un multiple de 9.	
3	Lorsque deux droites se croisent en un seul point, elles sont perpendiculaires.	
4	Les nombres qui sont pairs se terminent par le chiffre 2.	
5	Un triangle équilatéral est un triangle isocèle	
6	Étant donné que les longueurs PA et PB sont égales, le point P est le milieu de [AB]	
7	Si un nombre est inférieur à 3 alors il est inférieur à 2	
8	24 est un nombre divisible par 3 et par 4	
9	On me demande de choisir un nombre divisible par 2 ou par 3. Je peux choisir le nombre 8.	
10	204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24	

2) Expliquez les choix que vous venez de faire. Vous avez le droit de changer d'opinion mais vous ne devez pas modifier votre réponse sur le tableau.

   Utilisez les phrases suivantes :

- « je pense que la phrase n° … est vraie (fausse) parce que ... »
- « je ne sais pas si la phrase n° … est vraie ou fausse parce que ... »
- « j'ai changé d'avis, je pense maintenant que la phrase n° … est ... parce que ... »

3) Regroupez-vous par trois ou quatre. Vous devez vous mettre d'accord sur une réponse (« vrai » ou « faux ») pour chacune des affirmations.

Rédigez vos justifications, vous aurez à les exposer au reste de la classe.

L.1.1 Analyse a priori

Trois moments sont prévus dans le déroulement permettant une évolution de la réflexion des élèves :

– Dans un premier temps ils doivent se prononcer individuellement sur la vérité de 10 affirmations, ils peuvent répondre « vrai », « faux », ou « je ne sais pas ». Il s'agit en quelque sorte d'une situation d'action, mais il n'y a pas de milieu antagoniste proposant des rétroactions.
– Dans un deuxième temps les élèves doivent, toujours individuellement, expliquer leurs choix. Il est précisé qu'ils peuvent changer d'avis par rapport à leurs premiers choix, mais qu'ils doivent laisser celui-ci dans le tableau. Il s'agit d'une situation de formulation, la nécessité d'expliquer étant vue comme une façon de construire un milieu antagoniste qui peut fournir des rétroactions qui modifient les choix de l'élève.
– Dans un troisième temps, les élèves se regroupent par trois ou quatre et doivent se mettre d'accord sur une réponse. Chaque élève doit convaincre, ou être convaincu : il s'agit d'une situation de validation, non seulement de la vérité ou non des affirmations proposées mais surtout de la validité ou non des arguments ayant servis pour conclure.

4 affirmations traitent de géométrie, 6 affirmations concernent les nombres (4 sur multiples et diviseurs, 1 sur nombre pair, 1 sur inégalités).
Les formulations utilisées sont différentes pour presque chaque affirmation :

– Les affirmations 2 et 5 sont énoncées avec des quantifications universelles relativisées implicites dans l'utilisation du terme « un » (un x (qui est) P est Q, c'est-à-dire « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ »).
– L'affirmation 4 est aussi de la forme quantification universelle relativisée, mais la quantification universelle est plus explicite puisqu'il y est question de « les nombres qui sont pairs ».
– L'affirmation 3 est une implication formulée avec le terme « lorsque », avec quantification universelle implicite.
– L'affirmation 7 est une implication classiquement formulée avec « si... alors », avec quantification universelle implicite.
– L'affirmation 8 est l'affirmation d'une propriété d'un objet particulier.
– Les affirmations 1, 6, 10 ne sont pas des propositions mathématiques mais relatent des raisonnements. Elles sont là aussi formulées avec différentes expressions (on en déduit, étant donné que... alors on a, donc). Les termes *vrai, faux* ne sont pas appropriés pour ce type d'affirmations. Quand des élèves répondent vrai ou faux pour ces affirmations, il est difficile de savoir à quoi se rapporte ce jugement : à la vérité ou non de l'hypothèse et de la conclusion ? À la vérité ou non d'une implication qui justifie le raisonnement ? Pour l'affirmation 10 par exemple, plusieurs réponses et justifications sont possibles :

  1. répondre VRAI à partir d'un raisonnement correct basé sur l'implication fausse « tout nombre divisible par 4 et par 6 est divisible par 24 » (car $4 \times 6 = 24$).

2. répondre FAUX en se prononçant en fait sur la conclusion « 204 est divisible par 24 » qui est fausse, avec ou non vérification que les hypothèses sont vraies.
3. répondre FAUX en se prononçant sur l'implication « tout nombre divisible par 4 et par 6 est divisible par 24 ».

– L'affirmation 9 n'est ni une proposition, ni l'expression d'un raisonnement mais plutôt le récit d'une situation. C'est une mise en scène d'un raisonnement qui lui-même est soutenu par la vérité d'une proposition, et c'est par rapport à la vérité de cette proposition que l'élève doit se prononcer. La mise en scène, dont on peut penser qu'elle fait partie d'une stratégie de dévolution (mais alors on peut se demander pourquoi l'affirmation 8 n'est pas rédigée de la même manière), obscurcit plutôt la tâche.

La diversité des formulations est telle que je fais l'hypothèse que c'est un fait voulu, peut-être parce que les élèves sont effectivement confrontés à toutes ces formulations. Si un des objectifs de l'activité est de mettre en place des techniques de validation ou non de propositions (qu'elles soient institutionnalisées ou que l'idée soit seulement que les élèves les rencontrent, les identifient), associées à la forme de celles-ci, cette diversité augmente la difficulté, car pour se ramener à telle ou telle technique, il faudra reconnaître la forme emblématique qui se cache derrière chaque formulation.
Seules les affirmations 1 et 6 comportent des variables, qui sont des noms de points du plan.

L.1.2 Présentation de l'activité

Beaucoup d'élèves ont répondu « Vrai » pour la première affirmation. P1 interprète ces réponses comme une « confusion entre l'implication [1] et la réciproque » en citant des réponses : « dans un carré il y a 4 angles droits donc c'est vrai ». Elle note cependant qu'elle n'a pas repéré de telle confusion pour les autres affirmations, et explique ce phénomène par une moins bonne disponibilité des connaissances mathématiques sur les quadrilatères qui n'avaient pas été revus en cours. Je suis quelque peu surprise qu'il n'y ait pas plus de réponses « je ne sais pas » et interroge P1 sur ce point. Elle signale alors d'autres réponses : « vrai mais ça peut aussi être un rectangle ». Les réponses du premier type sont effectivement des justifications de la réciproque de l'implication sous-entendue dans l'affirmation 1, mais on peut faire l'hypothèse que la mécompréhension des élèves vient également de l'utilisation de l'expression « on en déduit que » car cette notion de déduction n'est pas encore familière aux élèves de Sixième. Cette hypothèse permet d'expliquer également les réponses du deuxième type, dans lesquelles le problème de la quantification universelle implicite apparaît clairement.
L'affirmation n° 5 a également posé problème aux élèves. Ils ont répondu « faux » en donnant les deux définitions, et en arguant qu'elles n'étaient pas les mêmes. Il y

1. Celle sous-entendue par cette déduction.

a derrière ces réponses une mise en œuvre par les élèves du principe du maximum d'information, mais P1 ne le relève pas.
L'affirmation n° 6 est également présentée comme ayant posé problème, mais le commentaire de P1, « tout le monde a fait un petit dessin », ne suffit pas pour comprendre ce que les élèves ont fait. Notons que s'ils ont répondu « vrai » en faisant un dessin avec P au milieu du segment $[AB]$, ils adoptent la même démarche qu'en répondant « dans un carré il y a 4 angles droits donc c'est vrai » pour l'affirmation n° 1.

L.1.3 Discussion qui suit la présentation

Un stagiaire trouve qu'il peut être intéressant de leur proposer l'affirmation n° 6 avant de parler de la médiatrice, pour « voir justement les idées fausses ».
C. Hache demande quels sont les arguments utilisés par les élèves. P1 relate une discussion sur l'affirmation n° 1, entre des élèves qui pensent que c'est vrai parce que le carré a quatre angles droits, et des élèves qui font remarquer que le rectangle aussi a quatre angles droits, discussion où l'on a donc d'un côté une instanciation de l'implication qui est vraie puisque prémisse et conclusion sont vraies, et de l'autre une instanciation qui est fausse. Un stagiaire demande alors à P1 si elle avait déjà eu des discussions autour de « en mathématiques on dit que quelque chose est vrai s'il est tout le temps vrai. » Je signale que ceci ne concerne que les propositions universellement quantifiées, et que dans cette activité les affirmations sont effectivement presque toutes universellement quantifiées, mais de façon implicite, ce qui peut expliquer les « erreurs » des élèves, qui n'en sont finalement pas si on considère qu'ils répondent pour une instanciation de l'implication et non pour l'implication elle-même.
Une stagiaire fait remarquer qu'il y a peut-être une différence entre la façon de sous-entendre la quantification universelle dans les affirmations n° 1 et n° 2 : « quand on dit « un nombre entier » on sous-entend mieux que c'est tout nombre, alors que quand on dit « $ABCD$ » on n'est pas sûr ».
Un stagiaire propose d'expliquer les erreurs pour l'affirmation n° 1 par le fait qu'à l'école primaire, les élèves apprennent d'autres définitions du rectangle.
Au sujet des erreurs sur l'affirmation n° 5, une stagiaire dit qu'il faut faire comprendre aux élèves qu'en mathématiques on a besoin de définitions précises pour assurer la validité du raisonnement.
C. Hache signale que dans notre pratique mathématique, on n'appelle pas *rectangle* un carré. Une stagiaire relate un exercice où pour démontrer qu'un triangle est isocèle, des élèves démontrent qu'il n'est pas équilatéral. Il s'agit ici de difficultés liées au principe du maximum d'information, mais il n'est pas nommé dans l'échange, ni par la stagiaire, ni par les formateurs.
R. Cori explique que les affirmations 1, 6 et 9 (il n'a pas vu 10 car en bas de la diapo) ne sont pas des propositions mathématiques. Pour « $ABCD$ a quatre angles droits on en déduit que $ABCD$ est un carré », il précise qu'« on doit se prononcer non pas sur la

vérité d'un fait mathématique mais sur la correction d'un raisonnement ». Il distingue cependant : « 9 c'est un peu différent c'est en fait intermédiaire parce que 9 c'est très proche de l'énoncé qui dirait 8 est un nombre qui est divisible par 2 ou par 3 c'est pas très loin. Enfin malgré tout en fait ce qui se passe dans 1 dans 6 et dans 9 c'est que l'utilisateur est en cause. Ça ne parle pas que des objets mathématiques ça parle des objets mathématiques et de moi celui qui raisonne à leur sujet ». Il dit l'importance de séparer les deux types d'énoncés. Il précise bien qu'il ne s'agit pas d'expliquer la différence aux élèves mais de l'avoir en tête pour la rédaction des tâches. J'insiste sur le fait que le sens des mots vrai/faux en mathématiques n'est pas encore bien installé au collège et qu'il est donc important de ne les utiliser que pour des propositions. C. Hache propose de remplacer la question 10 par « 48 est divisible par 4 et par 6 donc par 24 » en demandant ce qu'on répondrait à ça, sachant que le raisonnement sous-jacent est faux mais que 48 est effectivement divisible par 24.

L.2 Vrai/Faux Troisième

Deux stagiaires qui sont collègues dans un même collège (P2 et P'2) proposent un exercice qu'ils ont rédigé pour un brevet blanc, de type Vrai/Faux sur des propositions quantifiées :

> Quatre affirmations sont données ci-dessous, pour chacune dire si elles sont vraies ou fausses en argumentant :
>
> 1. Il n'existe pas de nombre dont le produit par 7 est égal à 3
> 2. Pour tout nombre entier n, $(n-2)(n+2)+4$ est le carré d'un nombre entier
> 3. Pour tout nombre a l'expression $(a-7)^2 - a(a-14)$ est égale à 49
> 4. Pour tous nombres a et b positifs : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

L.2.1 Analyse a priori

Les quatre affirmations proposées sont des propositions universellement quantifiées, la première étant équivalente à « pour tout nombre x, le produit de 7 par x n'est pas égal à 3. »
L'affirmation 2 est d'une structure logique plus complexe puisqu'il y a une quantification existentielle cachée sous l'expression « est le carré d'un nombre entier ». La tâche consiste donc a priori à écrire l'expression sous forme d'un carré, ce qui peut demander des manipulations algébriques plus complexes parce que non canoniques. Mais finalement la technique à mobiliser est identique dans les affirmations 2 et 3 : il faut réduire les expressions, cette technique amenant directement la forme n^2 pour l'expression de l'affirmation 2. Les élèves n'ont donc pas vraiment besoin d'utiliser une technique de recherche d'élément associée à la quantification existentielle. Par ailleurs, la tâche

« montrer qu'une expression est le carré de » est peut-être une tâche bien identifiée, associée à une technique de mise sous forme d'un carré dans laquelle la quantification existentielle est complètement implicite.

L.2.2 Présentation de l'activité

En présentant cet exercice, P2 et P'2 insistent sur l'importance qu'ils ont accordé à la quantification, suite au deux premières journées du stage : « Suite au stage on a fait un exercice de brevet blanc et c'est vrai qu'on l'a rédigé en ayant en tête un peu ce qu'on avait fait dans le stage donc on a essayé quand même de quantifier à peu près correctement l'exercice ».
P2 et P'2 citent des réponses d'élèves pour la première affirmation, « il y a bien trois septième mais ça n'est pas un nombre », ce que R. Cori souligne comme étant correct du point de vue du raisonnement. Ils citent également comme justification pour la dernière affirmation que c'est écrit (ou non pour ceux qui connaissent leur leçon) dans le cahier de leçons.

L.2.3 Discussion qui suit la présentation

P2 et P'2 témoignent d'une prise de conscience suite aux deux premiers jours du stage. Ils ont vérifié dans leurs classes que l'implicite de la quantification universelle associée à une implication n'est pas forcément partagé par les élèves : « on est reparti sur des est-ce que c'est vrai ? oui mais c'est vrai quand même de temps en temps alors est-ce que c'est vrai quand même ? On s'est retrouvé avec des questions un peu dans ce goût là je dirais, sur lesquelles on serait passé un peu différemment si on avait pas fait les deux premières journées ». Ils ont l'impression qu'avec l'explicitation de la quantification, la notion de contre-exemple semble ne pas poser de problème dans des résolutions collectives faites oralement. P2 note cependant que l'utilisation d'un contre-exemple dans un travail écrit individuel n'est pas encore acquise, et il conclut que « c'est un travail de longue haleine ».
Une stagiaire témoigne de l'observation du phénomène inverse : elle a l'impression que d'expliciter la quantification universelle a fait réapparaître l'erreur de prouver une proposition universelle avec des exemples, car « comme c'est vrai pour tout ben ils ont essayé ». Il est possible que cette enseignante ait tout d'abord réussi à mettre en place un contrat pour la démonstration de propositions implicitement universellement quantifiées (« on ne prouve pas avec des exemples »), contrat qui pour les élèves ne s'applique pas aux propositions qu'elle présente maintenant avec une quantification universelle explicite. Il s'agit donc de remettre en place une technique de démonstration de ces propositions, et l'explicitation de la quantification universelle me semble au contraire permettre de justifier qu'on ne les prouve pas avec des exemples.

Un autre stagiaire intervient : pour lui, il est important que les élèves voient aussi des propositions avec des quantifications implicites, pour s'habituer à cette pratique de la communauté mathématique. P'2 signale qu'ils en rencontrent de toute façon dans les manuels.
R. Cori intervient sur la terminologie « l'expression est égale à » (utilisée dans l'affirmation 3) à laquelle il dit préférer « l'expression prend la valeur » par exemple, pour distinguer l'objet (le nombre) et le nom de l'objet (l'expression). Il précise que cette remarque n'est pas à faire aux élèves, mais juste pour que les professeurs fassent attention aux formulations utilisées. Notons que plusieurs manuels utilisent la terminologie « expressions égales », certains en précisant parfois « pour toutes les valeurs de x ».
C. Hache revient sur l'idée qu'il faut parfois écrire des propositions volontairement implicitement quantifiées. Pour lui, « dans une situation d'apprentissage, [...] c'est précieux qu'un enseignant sache parler de façon rigoureuse et claire avec le moins d'ambiguïtés possible ».

L.3 Atelier Logique en Sixième

P2 et P2' présentent ensuite le dispositif d'atelier Logique en Sixième dans le cadre d'ateliers pour développer des compétences transdisciplinaires sur les heures d'aide aux devoirs : « on avait mis en place nos ateliers logique en se disant que la logique ça devait pouvoir s'employer dans pas mal d'autres matières ». Tous les élèves de Sixième passent dans l'atelier, pour 4 séances. Le travail s'appuie sur un système de fiches que les élèves ont à remplir en groupe pendant les deux premières séances. Dans la troisième séance, les élèves font individuellement des exercices sur ordinateur. La dernière séance est une séance d'évaluation, basée sur les fiches ci-après, identiques aux fiches d'entraînement des deux premières séances.

Evaluation de l'atelier : logique.
Logigrammes

NE RIEN ECRIRE SUR CETTE FEUILLE

En fonction de ce que tu penses être ton niveau, choisis un problème de logique à résoudre. Ecris les réponses sur la fiche réponse.

Aucun problème résolu : 2 points rouges
Problème niveau 2 réussi : 1 point rouge
Problème niveau 3 réussi : 1 point vert
Problème niveau 4 réussi : 2 points verts

Logigramme niveau 2

A la fin de l'année, les quatre musées d'une ville de province font leurs comptes de visiteurs :

1. Le musée du costume a eu plus d'entrées que celui des traditions populaires.
2. Le musée de la pêche a vu défiler moins de monde que celui des traditions populaires.
3. Le musée du costume a eu moins de succès que celui des Beaux-Arts.

Range ces quatre musées dans l'ordre décroissant de leur fréquentation en partant de celui qui a eu le plus de visiteurs.

Logigramme niveau 3

Trois amis, Auguste, Denis et Walter, sont abonnés à un hebdomadaire différent : Le Nouvel Observateur, L'Evénement du Jeudi et Le Point.

1. Le lecteur du Point, qui est fils unique, est le plus jeune des trois.
2. Denis, qui est le frère de Walter, est plus âgé que le fidèle de l'Evénement du Jeudi.

Retrouve le journal de chacun et classe-les du plus jeune au plus âgé.

Logigramme niveau 4

Cinq commerçants M. Lepic, M. Cajol, M . Peyron, M. Sénac et M. Tardieu travaillent dans le même quartier. L'un est charcutier, un autre est fleuriste, un autre est boulanger, un est poissonnier et le dernier est coiffeur.

1. M. Lepic, M. Cajol et le fleuriste apprécient énormément le pain et la saucisse qu'ils trouvent chez leurs amis M. Peyron et M. Sénac.
2. M. Sénac et le poissonnier se retrouvent au café du coin qu'évitent M. Lepic, M. Tardieu et le charcutier.

Retrouve le métier de chacun des commerçants.

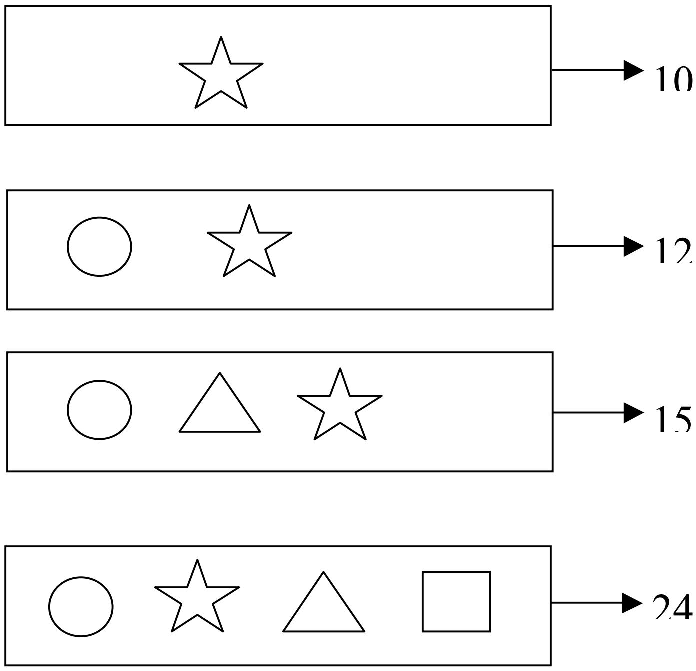
Evaluation de l'atelier : logique.
Opérations

NE RIEN ECRIRE SUR CETTE FEUILLE

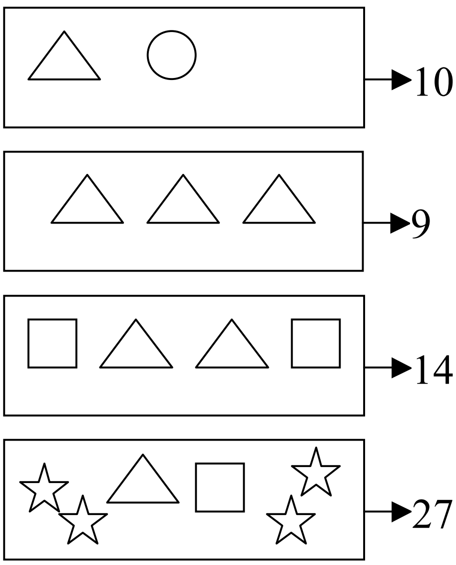
En fonction de ce que tu penses être ton niveau, choisis un problème de logique à résoudre. Ecris les réponses sur la fiche réponse.

Aucun problème résolu : 2 points rouges
Problème niveau 2 réussi : 1 point rouge
Problème niveau 3 réussi : 1 point vert
Problème niveau 4 réussi : 2 points verts

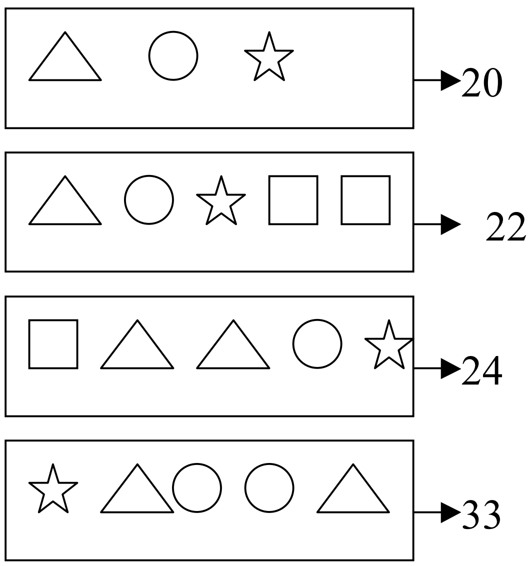
Opération niveau 2



Opération niveau 3



Opération niveau 4



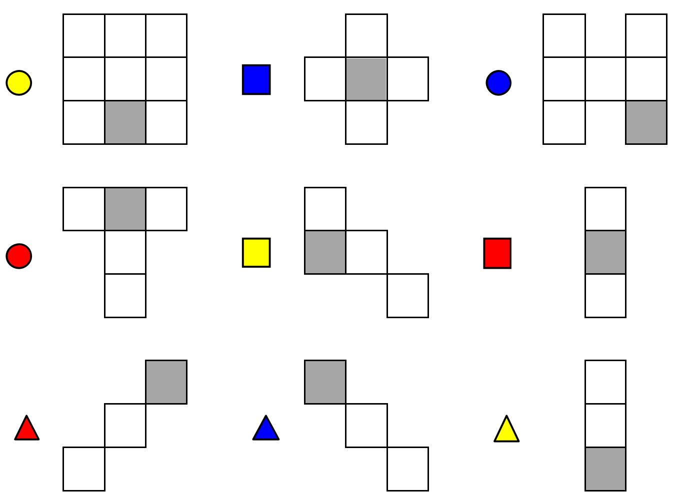
Evaluation de l'atelier : logique.
Raisonnement non verbal

NE RIEN ECRIRE SUR CETTE FEUILLE

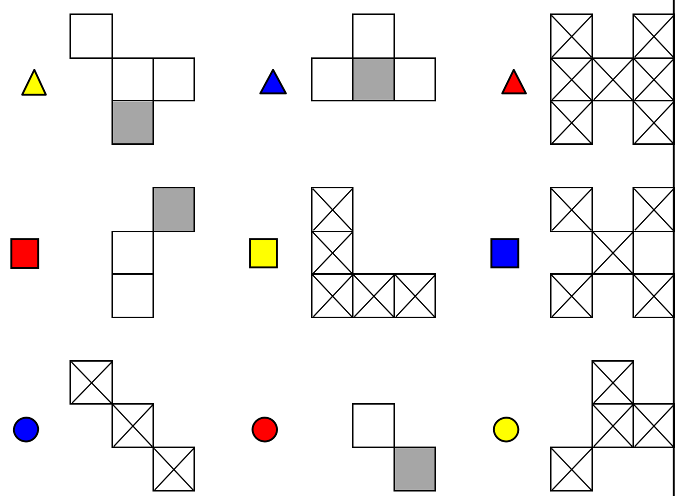
En fonction de ce que tu penses être ton niveau, choisis un problème de logique à résoudre. Ecris les réponses sur la fiche réponse.

Aucun problème résolu : 2 points rouges
Problème niveau 2 réussi : 1 point rouge
Problème niveau 3 réussi : 1 point vert
Problème niveau 4 réussi : 2 points verts

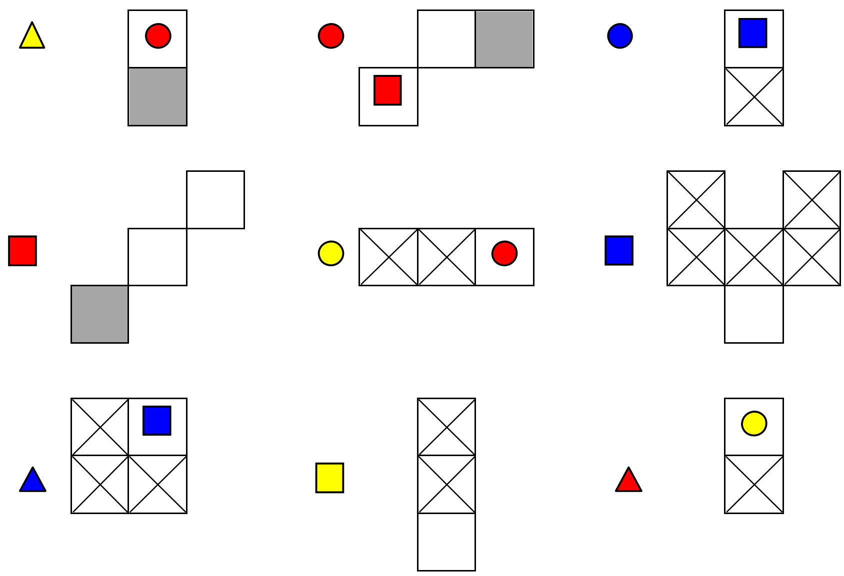
niveau 2



niveau 3



niveau 4



Evaluation de l'atelier : logique.
Dénombrements

NE RIEN ECRIRE SUR CETTE FEUILLE

En fonction de ce que tu penses être ton niveau, choisis un problème de logique à résoudre. Ecris les réponses sur la fiche réponse.

Aucun problème résolu : 2 points rouges
Problème niveau 2 réussi : 1 point rouge
Problème niveau 3 réussi : 1 point vert
Problème niveau 4 réussi : 2 points verts

Combinaison niveau 2

Tu es un agent secret et tu dois travailler sur des codes.
Combien de codes secrets à deux lettres peux-tu créer en utilisant uniquement les lettres A et B ?

Combinaison niveau 3

Tu es un agent secret et tu dois travailler sur des codes.
Combien de codes secrets à trois lettres peux-tu créer en utilisant uniquement les lettres A, B et C ?

Combinaison niveau 4

Chez un marchand de glaces, on peut choisir quatre parfums : vanille, chocolat, fraise et citron.
Il est autorisé de choisir plusieurs fois le même parfum.
Combien de cornets différents avec trois boules de glace peut-on servir ?

Nom et prénom : ……………………………………………………………………………..
Classe de 6ème : …….

	niveau
Logigramme	
Opérations	
Raisonnement non verbal	
Dénombrement	

Fiche réponse

Logigramme niveau 2

Les quatre musées dans l'ordre décroissant de leur fréquentation en partant de celui qui a eu le plus de visiteurs sont ……………………….……………….., ………………………….…………….., …………………………………………..…….. et ……………………………………………..

Logigramme niveau 3

Auguste est abonné ………………….……………………., Denis …………………………. ……………………………………. et Walter lit ……………………………………..………

Le plus jeune est ………………………………., puis ……………………………. et le plus âgé …………………………………

Logigramme niveau 4

M. Lepic est ……………………….. M. Cajol est ………………………M . Peyron est ……………....
M. Sénac est ……………………………..et M. Tardieu est ..…………………

Opération niveau 2 ○ ➤ △ ➤ □ ➤ ☆ ➤ 10

Opération niveau 3 ○ ➤ △ ➤ □ ➤ ☆ ➤

Opération niveau 4 ○ ➤ △ ➤ □ ➤ ☆ ➤

Raisonnement non verbal

niveau 2

niveau 3

niveau 4

Dénombrement niveau 2

Avec 2 lettres, je peux composer ………… codes secrets.

Dénombrement niveau 3

Avec 3 lettres, je peux composer ………… codes secrets.

Dénombrement niveau 4

On peut servir ………… cornets différents avec trois boules de glace.

Fiche solution

<u>Logigramme niveau 2</u>

Les quatre musées dans l'ordre décroissant de leur fréquentation en partant de celui qui a eu le plus de visiteurs sont **Beaux Arts, Costumes, traditions populaires et la pêche.**

<u>Logigramme niveau 3</u>

Auguste est abonné **au Point** Denis **au Nouvel Observateur** et Walter lit **l'Evénement du jeudi**
Le plus jeune est **Auguste** puis **Walter** et le plus âgé **Denis**

<u>Logigramme niveau 4</u>

M. Lepic est **coiffeur** M. Cajol est **poissonnier** M . Peyron est **charcutier** M. Sénac est **boulanger** et M. Tardieu est **fleuriste**.

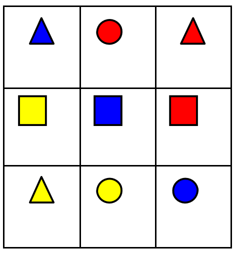
<u>Opération niveau 2</u> ○ ► 2 △ ► 3 □ ► 9 ☆ ► 10

<u>Opération niveau 3</u> ○ ► 7 △ ► 3 □ ► 4 ☆ ► 5

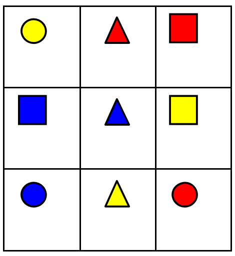
<u>Opération niveau 4</u> ○ ► 10 △ ► 3 □ ► 1 ☆ ► 7

<u>Raisonnement non verbal</u>

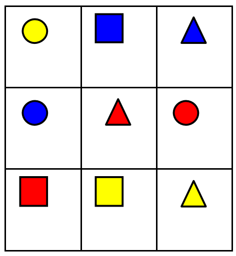
<u>niveau 2</u>



<u>niveau 3</u>



<u>niveau 4</u>



<u>Dénombrement niveau 2</u>

Avec 2 lettres, je peux composer **4** codes secrets.

<u>Dénombrement niveau 3</u>

Avec 3 lettres, je peux composer **27** codes secrets.

<u>Dénombrement niveau 4</u>

On peut servir **20** cornets différents avec trois boules de glace.

L.3.1 Analyse a priori des fiches d'évaluation

Les problèmes appelés *Logigramme* ressemblent aux énigmes que l'on trouve dans le commerce. Il est cependant important de différencier le logigramme 4 des logigrammes 2 et 3. Les deux premiers n'ont rien à voir avec la logique dans le sens où elle n'interviendrait pas dans une modélisation de ces problèmes qui ont essentiellement à voir avec la relation d'ordre sur les nombres. Pour le troisième exercice, il est possible de le modéliser en utilisant des variables propositionnelles (25 variables $R_{X,y}$ qui prennent la valeur vraie lorsque M.X exerce le métier y, la variable X étant astreinte à l'ensemble $\{L, C, P, S, T\}$, et la variable y à l'ensemble $\{ch, f, b, p, co\}$ reprenant les initiales des noms et des métiers) et en traduisant les informations par des formules (par exemple (NON $R_{L,f}$ ET NON $R_{C,f}$ ET NON $R_{P,f}$ ET NON $R_{S,f}$) qui traduit l'information que ni M. Lepic, ni M. Cajol, ni M. Peyron, ni M. Sénac n'est fleuriste, information sous-entendue dans l'affirmation 1). Résoudre le problème consiste alors à trouver une distribution de valeurs de vérité sur ces variables qui rend toutes les formules vraies [2], ce qui peut se faire de façon algorithmique par des manipulations de formules. Mais bien sûr, cette technique de résolution est bien trop complexe pour être efficace, ici la résolution à l'aide d'un tableau à double entrée étant beaucoup plus opératoire.
Les exercices appelés *Opérations* sont des exercices de résolution d'équation dans le sens où il faut trouver la valeur des symboles de façon à ce que les égalités symbolisées par les flèches soient vraies. Il y a des codes graphiques implicites : la juxtaposition des symboles signifie l'addition de leurs valeurs, les encadrés et la flèche à leur droite signifie que la somme à égale à.
Les exercices appelés *Raisonnement non verbal* sont des exercices qui pourraient également être modélisés par du calcul propositionnel, modélisation qui n'aide en rien à la résolution. Ils sont inspiré d'un jeu (Logix ou Métaforme). Là encore les informations sont données par des codes graphiques.
Les exercices de la dernière série sont des exercices de dénombrement.
Finalement, ces exercices ont peu à voir avec des notions de logique mathématique. Ils demandent par contre aux élèves d'exercer des raisonnements, et c'est dans ce sens qu'ils ont un lien avec la logique, en tant que science du raisonnement. Notons que dans les logigrammes, des formulations complexes du langage courant sont utilisées pour donner les informations et la première tâche de l'élève est donc de les comprendre, avant même de coder (si nécessaire) l'information qu'elles contiennent.

L.3.2 Présentation de l'activité et discussions

P2 et P'2 présentent chaque type d'exercices les uns après les autres.

2. Cette technique de résolution est présentée aux stagiaires lors de cette dernière journée de stage, suite à une demande d'explicitation de ce qu'il y a de logique dans ces exercices.

Logigrammes

P2 et P'2 disent qu'ils sentent qu'ils manquent de connaissance en logique pour se sentir capable de voir vraiment ce qui est en jeu dans ces exercices.

R. Cori revient sur le logigramme niveau 2 et précise que ça n'a rien à faire avec la logique, il s'agit de classer des nombres. Il critique l'habillage « vie courante » de cet exercice.

Une stagiaire intervient pour dire qu'elle trouve intéressant de voir dans ces exercices comment justement ils vont retirer de ces phrases en langage courant des informations plus formalisées qui vont permettre de résoudre l'exercice.

Je reprends cette idée que ces exercices permettent de travailler sur la représentation de données. J'associe le qualificatif *Logique* utilisé pour ces exercices au fait qu'on y est confronté à un système organisé avec des règles (les nombres et les propriétés de la relation d'ordre par exemple), ce qui correspond à une conception de la logique comme science des systèmes formels.

P2 précise qu'au début les élèves ne sont pas organisés, et que le travail de groupe permet une organisation collective.

P'2 signale que le recours à un tableau à double entrée pour le logigramme 4 n'est pas évident pour les élèves.

C. Hache fait une remarque sur le « et » de « M. Lepic, M. Cajol et le fleuriste apprécient énormément le pain et la saucisse » qui sous-entend que le fleuriste n'est ni M. Lepic ni M. Cajol. Il y a globalement beaucoup d'implicites dans ce texte.

Opérations

(plusieurs stagiaires n'avaient pas regardé les fiches réponses qui aident à comprendre ce qu'il faut faire)

Plusieurs stagiaires réagissent par rapport aux codes implicites. P2 et P'2 disent qu'ils se sont posé la question d'expliciter plus ou non, par exemple en mettant des signes d'addition. Mais depuis deux ou trois ans qu'ils le proposent, aucun élève n'a eu besoin d'explications de ces codes. P2 présente ces codages graphiques comme un plus qui permet aux élèves de rentrer dans l'activité très facilement.

P2 précise que le niveau 4, où il faut raisonner avec la valeur d'un bloc, est plus difficile pour les élèves.

Pour une stagiaire, ces exercices « mettent en place le statut de variable ».

Raisonnement non verbal :

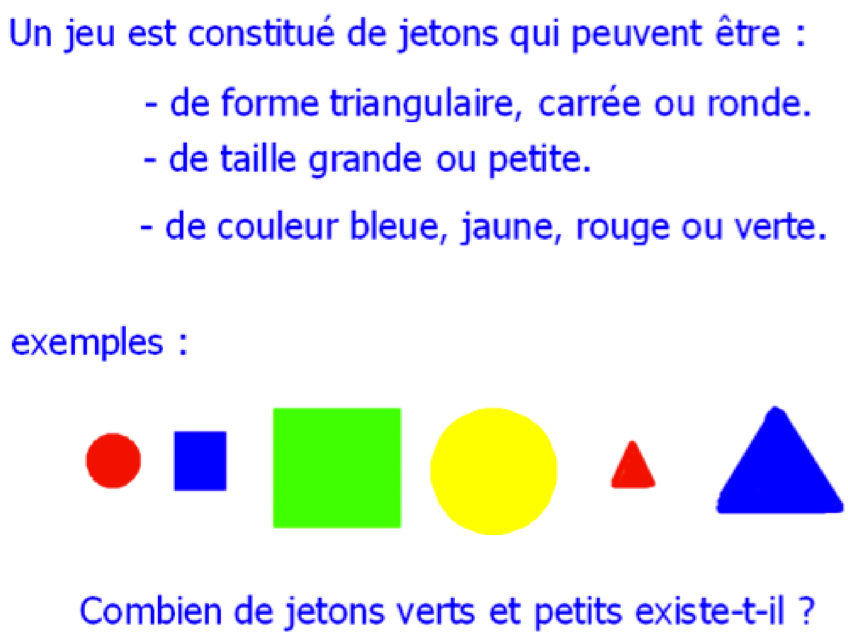
Ces exercices ne posent pas de problème aux élèves, en tout cas les plus simples.

Dénombrements

P2 et P'2 précisent que ces exercices sont difficiles pour les élèves qui n'arrivent pas à organiser leur dénombrement.

Sur des exercices de dénombrement qui sont résolus individuellement sur ordinateur

P2' a proposé une résolution collective le jour où je suis venue, et il y avait notamment eu discussion sur la question ci-dessous :



Dans un groupe, les élèves n'arrivent pas à se mettre d'accord. Une élève compte les cartes de pions verts et les cartes de pions petits [3]. Les trois autres n'étaient pas d'accord et l'une d'entre elle a dit à la première « toi tu comptes ceux qui sont verts ou petits ». P'2 a profité de cette confusion pour re-préciser la différence entre ET et OU, tout en reconnaissant certains usages compliqués, par exemple que pour compter les cartes avec un pion vert ou petit, il faut compter les cartes qui ont un pion vert et les cartes qui ont un pion petit.
P2 raconte qu'il se sert de ce jeu de carte pour proposer une tâche du type tâche de Wason : on met un signe distinctif au dos d'une ou plusieurs cartes, je vois le signe qu'est-ce que je peux déduire ? (je ne sais pas s'il propose des raisonnements par contraposition).
Je reviens sur l'aspect logique de ces exercices, et conclut que la logique peut permettre de réfléchir sur ce qu'on fait dans ces exercices, à défaut d'être directement opératoire pour leur résolution.

L.4 Activité circuit

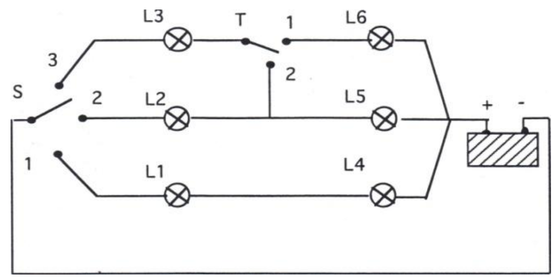
L'analyse de cette activité se trouve dans le corps de la thèse. Ci-après sont donnés des extraits plus conséquents des discussions.

3. La première tâche de chaque groupe avait été de fabriquer les cartes du jeu.

Initiation à la logique
Séance extraite de « le vrai et le faux au collège et au lycée »
par Michèle Gandit, IREM de Grenoble.

Description de la séance :

La séance a été présentée devant une classe de seconde de 33 élèves répartis par groupes de 4/5. On distribue à chacun le circuit électrique suivant :



Plusieurs phrases sont proposées. On les appelle des conjectures car à priori, on ne connait pas leur valeur de vérité. Pour chaque conjecture, on demande aux élèves si elles sont justes ou fausses. Après un moment de réflexion, on effectue un vote suivie d'une phase de discussions. A l'issu de ce débat, un deuxième vote sera réalisé si besoin suivi d'un moment d'institutionnalisation.

Voici les résultats des votes obtenus ainsi que les remarques/ arguments présentés par les élèves.

Conjecture n°1 :

Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi.

	VRAI	FAUX	AUTRE
Vote 1	27	2	4
Vote 2	26	6	1

« C'est vrai car si la lampe 4 brille, alors il y a du courant qui circule dans le fil relié à la lampe 1 »
« C'est faux car il est possible que l'ampoule ne marche pas »
« C'est vrai dans certains cas, faux dans d'autres cas : Si on a S2 alors la lampe 1 ne brille pas … »
«… Dans ce cas la, la lampe 4 ne brille pas non plus »
« On ne sait pas puisqu'on ne connaît pas la position de l'interrupteur »
« Peut-être que le courant passe mais que la lampe ne brille pas »

Mise en place du modèle mathématique :
On se met d'accord pour se situer dans le modèle suivant :
- Voir briller = le courant passe
- On suppose que les lampes et la batterie fonctionnent parfaitement.
- On suppose que les lampes sont de même puissance.

Dans ce cadre, il n'y a plus de doutes possible et tout le monde se met d'accord sur le fait que la conjecture n°1 est vraie.
Dans la suite, pour signifier que le courant passe dans la lampe n°i, nous écrirons Li .

L.4.1 Présentation de l'activité et discussion

P3 a connu cette activité lors de sa formation d'enseignante à Grenoble. Il s'agit d'une activité présentée dans la brochure *Le vrai et le faux au collège et au lycée* de M. Gandit et M.C. Demongeot, de l'IREM de Grenoble :

> — P3 : Je vais vous présenter une séquence que j'ai faite l'année dernière dans une classe de Seconde de 33 élèves. Je n'ai rien inventé, j'ai repris ça de la formation que j'ai eue l'année dernière dans mon année de stage. Donc le but c'est qu'on a mis les élèves par groupe, on leur a tous distribué le circuit magnifique, et donc à chaque fois on leur propose une conjecture, on leur laisse un temps de réflexion, on fait un vote pour savoir qui pense que la conjecture est vraie, qu'elle est fausse ou il y a toujours une case autre pour ceux qui pensent que c'est ni faux ni vrai. Ensuite on fait une phase de débat, à certains moments on refait un vote quand on voit qu'il y a eu un changement d'opinion dans la salle et on finit par un petit moment d'institutionnalisation.

La phase sur la première conjecture se conclut par la mise en place du modèle mathématique :

> — P3 : Donc la première conjecture qu'on propose c'est « Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi »
>
> — Z. Mesnil : Et juste, est-ce que tu fais des rappels sur l'électricité avant ou pas ?
>
> — P3 : Rien du tout, absolument pas. Donc c'est pour ça aussi, pour la première conjecture il y en a qui mettent AUTRE parce qu'ils ne se rappellent plus notamment des règles de l'électricité. Donc après un petit moment de réflexion on se rend compte qu'il y a beaucoup de réponses vraies. Donc là j'ai fait 2 votes, premier vote, 27 réponses VRAI, 2 pour le FAUX et 4 qui ne se prononcent pas. Donc j'ai marqué en dessous les explications des élèves. Ceux qui se prononçaient pour le VRAI m'ont dit « c'est vrai car si la lampe 4 brille il y a du courant dans le fil relié à la lampe 1 ». Ceux qui se prononçaient pour le FAUX m'ont dit « c'est faux parce que peut-être que le courant passe mais la lampe ne brille pas ou qu'il y a un problème dans le circuit ». Et à propos de ceux qui ont répondu AUTRE donc c'est soit parce qu'ils ne se rappelaient plus des règles de la physique ou soit on a eu « c'est vrai dans certains cas faux dans d'autres cas, si on met l'interrupteur S au niveau du 2 la lampe 1 ne brille pas », ou alors « on ne sait pas puisqu'on ne connaît pas la position de l'interrupteur ». Donc on a eu ces différentes réponses, et c'est vrai qu'après cette phase de débat on a fait un vote et il y a plus de personnes qui se sont mises sur le FAUX parce qu'elles ont été assez convaincues par le fait que, ben oui, si l'ampoule elle ne marche pas, forcément ça ne va pas briller et on va rien voir. Donc c'est à ce moment là qu'on met en place, on va dire qu'on

va mettre en place un modèle mathématique donc effectivement tant qu'on n'a pas donné certaines règles on ne va pas pouvoir dire si la conjecture est vraie ou fausse. Donc c'est pour ça qu'on va dire que « voir briller » on va dire que c'est la même chose que « le courant passe », on va supposer que les lampes, que la batterie fonctionnent et qu'on n'a pas de problème au niveau du circuit électrique. Si on se place dans ce cadre et qu'on rappelle un peu les lois de la physique, dans ce cas tout le monde est d'accord pour dire que effectivement il n'y a plus de doute la conjecture n° 1 est vraie. Et après on a juste, pour simplifier un peu on va écrire Li pour dire que la lampe n° i va briller. Donc voilà pour la première conjecture.

À la fin de la phase sur la conjecture n° 2, l'enseignante institutionnalise la notion de contre-exemple et définit la vérité d'une conjecture par rapport à de l'existence ou non de contre-exemple :

— P3 : Donc on arrive à la conjecture n° 2, si non L2 alors non L5. Donc là c'est assez partagé, on voit qu'on a 10 VRAI, 15 réponses pour FAUX, et 8 pour AUTRE. Donc là on va reprendre un peu ce dont on parle depuis le début du stage. Alors en fait c'est sur la question quand est-ce qu'on peut dire qu'une conjecture est fausse, quand est-ce qu'on peut dire qu'elle est vraie ? Puisqu'on va voir « si on a S3 et T1 alors la lampe 1 [4] ne brille pas et la lampe 5 non plus », oui mais certains vont dire « Oui mais dans dautres cas on peut avoir la lampe 2 qui brille mais pas la 5 », donc des fois c'est vrai, des fois c'est faux alors est-ce qu'on peut dire que c'est vrai, que c'est faux ou est-ce que c'est ni l'un ni l'autre ? Donc c'est pour ça qu'après on va expliquer ce qu'est un contre-exemple et à quoi sert un contre-exemple. Donc on va dire qu'une conjecture elle est fausse si on trouve un contre exemple c'est-à-dire que l'hypothèse est vérifiée mais pas la conclusion. Et à l'inverse une conjecture va être vraie si elle n'admet aucun contre-exemple.

La conjecture n° 3 ne pose pas vraiment de problème :

— P3 : Alors on arrive à la conjecture 3, si L3 alors L2. Ça c'est encore un cas de figure différent parce que cette fois-ci on n'a aucun exemple possible. Donc là les élèves se mettent assez d'accord pour dire qu'on a trouvé un contre-exemple donc forcément la conjecture est fausse. Donc si la lampe 3 brille, alors on a S3, et pour que la lampe 2 brille il faut S2. Donc tout le monde se met assez d'accord là-dessus.

La grande majorité des élèves déclare fausse la conjecture n° 4 :

— P3 : Et donc la conjecture 4 qui est un peu différente puisque, si L1 et L3 alors L2 et non L5, et dans ce cas là qu'est-ce qui se passe, c'est qu'on

4. Il est écrit « lampe 1 »dans le document de la stagiaire mais je pense qu'il s'agit d'une erreur.

ne peut ni avoir L1 et L3 en même temps. Alors là c'est le cas qui embête un peu les élèves puisque comme c'est pas possible est-ce qu'on dit que c'est faux, est-ce qu'on dit que c'est vrai ? Donc j'ai eu comme remarque « c'est pas possible alors c'est faux », « du coup on ne peut pas dire si c'est vrai si c'est faux », ou alors « si c'est pas possible on ne peut pas dire non plus que c'est faux ». Donc là on va revenir à ce qu'on a dit précédemment, donc qu'est-ce qu'une conjecture vraie, qu'est-ce qu'une conjecture fausse. On a dit que c'était faux si on trouvait un contre-exemple et est-ce qu'ici on peut trouver un contre-exemple ? Ben on a absolument aucun contre-exemple donc on va dire que la conjecture est vraie.

P3 utilise un tableau pour dire le statut de chaque cas :

— P3 : Et ça ça n'a pas mis tout le monde d'accord, et donc on a fini la séance, à propos de tables de vérité, en disant que là, à chaque fois il y avait 6 cas, selon la position des interrupteurs S et T. Et donc là c'est pour la conjecture 2, on n'a eu le temps de faire que la conjecture 2 en classe, donc suivant la position des interrupteurs, est-ce que l'hypothèse est vérifiée, est-ce que la conclusion est vérifiée, et est-ce qu'on peut parler d'un exemple, d'un contre-exemple ou alors d'un hors-sujet ? Alors hors-sujet on l'a défini juste avant, c'est quand l'hypothèse ne peut pas être vérifiée. Et donc dans ce cas là on voit tout de suite qu'on peut trouver un contre-exemple donc la conjecture 2 est fausse. Donc je ne sais pas s'il y a des questions.

Un stagiaire réagit par rapport à la notion de hors-sujet :

— S13 : Hors-sujet ça veut dire que l'implication est quand même vraie de toute façon.

— P3 : Hors-sujet oui ça veut dire que c'est vrai. Ça veut dire que l'hypothèse n'est pas vérifiée donc il n'y a forcément aucun contre-exemple donc c'est vrai.

— Z. Mesnil : un hors-sujet c'est quelque chose qui ne peut pas permettre d'infirmer la conjecture. C'est dans ce sens là je pense que c'est hors-sujet, c'est-à-dire que ça ne peut pas être quelque chose qui dit que c'est vrai ou qui dit que c'est faux.

— S13 : Pour le…

— Z. Mesnil : Un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse n'est pas vérifiée parce que…

— S13 : Si L2 est vraie…

— P3 : L2 là est forcément fausse puisqu'on a trouvé un contre-exemple.

— Z. Mesnil : Oui mais du coup si L2 est vraie…

— S13 : Donc l'implication est vraie.

— Z. Mesnil : Oui mais du coup on ne peut pas savoir, elle est vraie…

— S13 : Du point de vue d'un élève oui je comprends.

— Z. Mesnil : C'est pas l'implication qui est vraie, c'est l'implication instanciée à ce cas là.

— S13 : Oui voilà c'est ça.

— Z. Mesnil : Donc ça ne dit pas...

— S14 : S'il n'y avait que des exemples et des hors-sujet, alors ça serait vrai.

— Z. Mesnil : Si quoi ?

— S14 : S'il y avait une table comme ça avec que des exemples ou des hors-sujet, mais sans contre-exemple, alors c'est vrai.

— P3 : Oui voilà exactement.

— S14 : C'est le cas du 4.

Je signale l'importance du fait d'être ici dans une situation où il n'y a qu'un nombre fini de cas, ce qui permet de conclure sur l'absence de contre-exemple en en donnant comme preuve l'absence dans la liste exhaustive de tous les cas possibles :

— Z. Mesnil : Ben là ça marche parce qu'on est sur du fini. Alors moi c'est ça qui me... Alors parce que ces règles là elles viennent d'un, de quelque chose de plus général qu'ils développent à l'IREM de Grenoble depuis longtemps qui s'appelle le débat mathématique, qui est notamment associé au nom de Marc Legrand. C'est lui qui a mis en place un peu toute cette activité qui tourne dans les classes depuis un moment, et Michèle Gandit a repris ça et en a fait effectivement une brochure, sa thèse etc. Quand on dit « une conjecture est vraie s'il est impossible qu'elle soit fausse, c'est-à-dire si l'on démontre qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple », il faut faire attention effectivement à l'idée qu'il y a des choses qui marchent parce qu'on est dans un cas, il y a un nombre de cas fini et donc on peut vérifier tous les cas. Et par contre dans le cas infini, le fait de ne pas trouver de contre-exemple ça ne dit pas forcément que c'est vrai. Alors là il y a marqué « il faut démontrer qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple », ça n'est pas le fait de ne pas en trouver qui valide que c'est vrai.

Une discussion s'engage avec S13 qui fait remarquer que le tableau donné à la fin de l'activité n'est pas une table de vérité. P3 reconnaît qu'elle a utilisé abusivement ce terme. S13 poursuit son idée qu'on pourrait, en mettant Vrai ou Faux dans la dernière colonne, avoir en fait une table de vérité, ce que C. Hache remet en question :

— S13 : Ça me fait un peu bizarre exemple et hors-sujet parce que une table de vérité habituellement la réponse c'est vrai ou faux, c'est pas une réponse comme ça avec trois possibilités.

— P3 : Ben c'est pas vraiment une table de vérité en fait. Je ne sais pas si j'ai employé ce mot là mais...

— S13 : Ben si là c'est des valeurs de vérité pourtant, c'est une table de vérité, mais dans une table de vérité ce qu'il y a à droite c'est vrai ou faux. Par exemple hors-sujet c'est vrai, contre-exemple c'est faux, quand on remplit une table de vérité.

— C. Hache : Là ça serait la table de vérité de quoi ?

— S13 : Ben quand on vérifie.

— C. Hache : Pour vérifier quoi ?

— S13 : Pour vérifier si c'est ou non une tautologie.

De fait, en complétant la dernière colonne par Vrai ou Faux, nous obtiendrions une table de vérité, non pas d'une proposition, mais de toutes les instanciations possibles d'une implication :

— Z. Mesnil : Mais en fait là elle n'y est pas là, il manque la dernière colonne de la table de vérité. La colonne où on dit c'est un exemple, c'est un hors-sujet, c'est un contre-exemple, elle n'a effectivement rien à faire dans... C'est ce que tu dis, on pourrait faire une table de vérité, mais dans la troisième colonne ce qu'il faudrait avoir c'est la valeur de vérité de l'implication.

La discussion se poursuit sur cette notion de hors-sujet :

— S13 : En fait le hors-sujet ici c'est le cas bizarre où le faux implique le vrai.

— Z. Mesnil : Oui puis c'est quand même quelque chose que font pas mal les élèves de donner comme contre-exemple quelque chose qui ne vérifie pas l'hypothèse. C'est pour différencier le contre-exemple de... Enfin voilà le hors-sujet c'est ce truc : tu me proposes ça mais en fait ça ne va pas servir à dénoncer.

— S13 : J'ai l'impression que ça confond un peu ce que c'est une implication et ce que c'est un raisonnement avec un donc.

— C. Hache : Oui. On peut dire ça. C'est non L2 donc non L5 c'est hors-sujet de regarder un cas où L2 est vraie. C'est hors-sujet pour le donc, pas forcément pour le implique.

— Z. Mesnil : Ben c'est hors-sujet aussi...

Je signale que la quantification universelle des conjectures (sur toutes les positions d'interrupteur possibles) est très implicite. P3 signale qu'elle l'a mentionnée dans la discussion. C. Hache souligne que « je suis certain que » dans la première conjecture explicite un peu cette idée de quantification universelle sur les cas :

— Z. Mesnil : Mais de toute façon, il y a quelque chose là... Ces histoires de cas là, finalement, c'est très implicite là dans l'activité telle qu'elle est proposée. Ces implications elles sont quantifiées sur tous les cas possibles finalement, alors là il y en a 6, mais c'est vraiment complètement implicite.

Est-ce que toi dans ta discussion ça t'es arrivé de dire « est-ce que dans tous les cas ? », « est-ce que pour tous les cas ? »

— P3 : Ben oui forcément. Quand on arrive à la première qui est fausse, quand ils disent des fois c'est vrai des fois c'est faux, ah oui mais il faudrait montrer justement est-ce que c'est vrai dans tous les cas ou est-ce qu'il existe un moment où c'est faux.

— Z. Mesnil : Et c'est vrai que moi je trouve que dans la manière dont c'est rédigé là ça reste très implicite dans ce qui est écrit, mais comme tu dis ça vient forcément à l'oral.

— C. Hache : Dans la première il y a « je suis certain que », qui explicite un peu le…

Je fais alors remarquer que la première proposition n'est pas formulée comme une proposition mais comme un raisonnement :

— Z. Mesnil : Alors la première conjecture elle n'est pas formulée comme une proposition, contrairement aux autres.

— P3 : Non.

— Z. Mesnil : C'est comme ce qu'on disait tout-à-l'heure, la première conjecture c'est un raisonnement, donc ça n'est pas une proposition.

Je signale ensuite que ce qui est dit ici pour les conjectures est vrai pour des conjectures de la forme *Si A alors B*, qui sont implicitement universellement quantifiées. C. Hache parle alors du lien entre contre-exemple et quantification universelle :

— Z. Mesnil : Et après c'est pareil, une conjecture, alors là elles sont toutes de la forme si… alors. Mais une conjecture ça n'est pas forcément de la forme si… alors, une conjecture ça peut aussi être il existe un x tel que. Et du coup c'est vrai que dire « une conjecture est dite fausse si elle admet un contre-exemple », ben c'est un certain type. Les conjectures qui se présentent sous la forme d'implications universellement quantifiées sont fausses lorsqu'elles admettent un contre-exemple.

— C. Hache : Moi je pense que c'est bien d'associer contre-exemple à quantification universelle, bon pas avec ce vocabulaire mais… Parce que des fois prouver quelque chose c'est trouver un exemple, ça dépend de la propriété qu'on veut montrer mais le contre-exemple c'est pour montrer qu'une propriété universellement quantifiée est fausse, mais si on veut montrer une propriété existentielle… Alors c'est moins souvent qu'on fait ça.

S13 n'est pas d'accord avec le fait que la conjecture n° 1 n'est pas une proposition :

— S13 : La première aussi c'est bien une proposition conditionnelle. Si je vois L1 alors, le « alors » est juste implicite mais c'est bien…

— Z. Mesnil : La conjecture 1 ?

— S13 : Ouais. c'est bien un si quelque chose alors même si le alors n'est pas dit.

— Z. Mesnil : Ben non il y a du je dedans.

— S13 : C'est pas très. . .

— P3 : De toute façon le but de la première conjecture c'est de dire. . . Ben vu qu'elle est présentée comme ça on ne peut rien en dire on ne peut pas dire si c'est vrai si c'est faux, il nous manque à la fois un modèle, il nous manque brille qu'est-ce que ça veut dire.

— Z. Mesnil : Moi je sais que la conjecture 1 quand je la lis j'ai plus envie de répondre oui ou non que vrai ou faux. Quelqu'un qui dit « je vois la lampe n° 4 briller ah ben je suis certain que la lampe 1 brille aussi » je lui dis tu as raison ou tu as tort. Il se met en jeu puisqu'il dit je, du coup on lui répond par rapport à ce qu'il est en train d'élaborer comme raisonnement. Alors évidemment derrière son raisonnement il y a une implication, il y a une proposition qu'il considère comme vraie, nous on la voit cette proposition, mais ce qui est écrit ça n'est pas la proposition, c'est la personne en train de raisonner.

— S13 : C'est pas clair parce que ça commence par « si », comme le modèle.

— Z. Mesnil : Oui mais alors, ce « si. . . alors », quand est-ce qu'il est vrai, ben il est vrai si je ferme les yeux par exemple, parce que je ne vois pas la lampe 4 briller quand je ferme les yeux. Ceci dit, ça n'est peut-être pas par hasard qu'il n'y a pas le alors, peut-être qu'il viendrait moins spontanément là.

La première étape de mise en place du modèle mathématique m'amène à parler des exemples de la vie courante :

— Z. Mesnil : Alors cette activité, indépendamment des quelques remarques sur la formulation, les gens qui l'ont testée étaient toujours contents des débats que ça suscitait. Et puis moi je trouve ça très intéressant cette étape de. . . La première discussion qui est comme ça à chaud, et donc les arguments pragmatiques vont arriver, ben oui mais si la lampe est cassée, si ceci. Du coup on voit bien que pour être d'accord il y a besoin de fixer un peu, alors tu as dit mise en place du modèle mathématique, il y a besoin de fixer des choses, il y a besoin effectivement de se mettre d'accord sur quoi on travaille. Alors c'est ça un peu en fait par rapport aux exemples de la vie courante : si on dit qu'on travaille dans la vie courante, avec toutes les discussions qu'il peut y avoir sur la vie courante parce qu'on n'a pas la même façon de voir les choses de la vie courante, on va avoir du mal à se mettre d'accord. Alors après on peut faire des situations de la vie courante où on fixe des choses. On est dans une situation qu'on appelle la vie courante mais finalement on va fixer ça on va fixer ça. Mais ça il faut penser à le dire, c'est la vie courante mais quand même avec certaines règles.

P3 signale que cette activité a été marquante pour les élèves :

— P3 : En tout cas ils s'en souvenaient, à chaque fois qu'on revenait sur des questions de logique où il fallait trouver un contre-exemple notamment, enfin moi j'ai vraiment vu qu'ils se rappelaient de ce circuit et de ce qu'il fallait faire.

— Z. Mesnil : Et toi tu ré-utilisais la terminologie contre-exemple et hors-sujet par exemple ?

— P3 : Ouais.

— Z. Mesnil : Je pense que c'est bien effectivement. Ce mot hors-sujet je trouve qu'il est assez pratique. Après je ne sais pas si c'est facile pour eux de comprendre ce que c'est et pourquoi un hors-sujet c'est un hors-sujet.

L.5 Vrai/Faux en Seconde

Une professeure (P4) présente l'activité qu'elle a proposé dans se classe de Seconde. Elle avait d'abord refait une activité présentée par C. Hache, dans laquelle des élèves devaient se prononcer sur la vérité ou non d'implications volontairement implicitement universellement quantifiées (ils pouvaient aussi cocher une case AUTRE), le but étant de provoquer un débat amenant à la prise de conscience de la nécessité de quantifier. P4 raconte qu'elle a dans sa classe des élèves excellents à qui cette quantification implicite ne pose aucun problème, et que cela « casse un peu le débat » (elle précise que c'est aussi un peu ce qui s'est passé pour l'activité présentée). La première activité avait permis de préciser la quantification universelle implicite :

— P4 : [...] Et puis après on a pris un moment pour mettre noir sur blanc tout ce qu'on en avait tiré. Et donc ce qui m'a paru intéressant, je crois qu'il y a une collègue qui l'a dit tout-à-l'heure dans la première intervention, c'est que quand on avait une implication, on en a tiré la conclusion que A implique obligatoirement (*en insistant sur ce terme B*. Et le fait de mettre le mot obligatoirement, après j'ai dit nécessairement, pour introduire l'histoire de la condition nécessaire, mais du coup il y en a certains qui je pense ont bien compris que c'était pas une fois sur deux ou une fois sur trois mais il fallait que ça soit systématique.

Ils ont ensuite parlé de contre-exemple, de contraposée suite à une question d'une élève qui voulait savoir ce que c'était, de négation, tout ça un mois avant l'activité présentée.

Logique : comparaison d'énoncés écrits avec des longueurs ou avec des vecteurs.

1) Parmi les implications ci-dessous lesquelles sont vraies ? Si certaines sont fausses, donnez un contre-exemple.

- $AB = CD \; => ABDC$ est un parallélogramme
- $ABDC$ est un parallélogramme $=> AB = CD$
- $AI = ID => I$ est le milieu de $[AD]$
- I est le milieu de $[AD] => AI = ID$

2) En déduire si les équivalences suivantes sont vraies ?

- $AB = CD <=> ABDC$ est un parallélogramme
- $AI = ID <=> I$ est le milieu de $[AD]$

3) On a vu dans le cours :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} <=> ABDC$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID} <=> I$ est le milieu de $[AD]$

Expliquez pourquoi en écrivant les énoncés ci-dessus avec des vecteurs on obtient des équivalences et pourquoi ces équivalences sont fausses si on les écrit avec des longueurs.

L.5.1 Analyse a priori

Les élèves ont à étudier deux implications et leurs réciproques. Elles sont écrites avec le symbole de la double flèche et ne sont pas explicitement universellement quantifiées. Mais une activité faite quelques temps plus tôt avait permis de préciser cet implicite.
Les élèves doivent ensuite se prononcer sur les équivalences associées à ces implications et réciproques en utilisant l'équivalence comme conjonction d'une implication et de sa réciproque.
En remplaçant les longueurs par des vecteurs dans les équivalences proposées, on obtient deux équivalences vraies. Les élèves doivent alors expliquer ce qui est présent dans la notion de vecteur qui assure qu'on ait des équivalences, là où il n'y a qu'une implication vraie dans le cas des longueurs.

L.5.2 Présentation de l'activité et discussion

P4 a pensé que le chapitre des vecteurs était une bonne occasion de travailler sur la différence entre implication et équivalence, en montrant la différence entre ce qu'on pouvait dire avec les longueurs et ce qu'on pouvait dire avec les vecteurs. L'activité a pris peu de temps. Les élèves ont du faire cette activité à la maison mais il n'y a pas eu vraiment de débat car les très bons élèves ont tout de suite vu ce qui était vrai ou non. Du point de vue du contenu mathématique, les élèves semblent avoir compris la différence vecteur/longueur.
je demande à P4 si elle a utilisé dans la discussion l'expression « pour tous points A, B, C, D ». Celle-ci ne l'a pas fait, elle a réutilisé les expressions utilisées suite à la première activité sur des implications, « si A alors obligatoirement/forcément B », et trouve que les élèves comprennent bien quand on le dit comme ça.
Je fais remarquer que les termes *forcément, obligatoirement, toujours* sont effectivement porteurs de quantification universelle , mais que ce sur quoi porte la quantification (les variables) reste implicite. P4 a l'impression que certains élèves comprennent mieux ces expressions que le quantificateur « pour tout ».

La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement

La thèse porte sur l'enseignement de notions de logique au lycée. Les instructions officielles actuelles précisent qu'il ne s'agit pas de faire un cours de logique mathématique, mais de développer une utilisation en tant qu'outils des notions de logique considérées. Afin de prendre en compte cette contrainte dans l'étude du processus de transposition didactique, j'introduis, entre *savoir savant* et *savoir à enseigner*, un *savoir de référence* pour la logique, savoir qui n'a jamais été institué par la communauté de l'enseignement des mathématiques. Je m'appuie pour proposer une telle référence sur une double étude épistémologique et didactique, dans laquelle je privilégie les liens entre logique et langage, souvent moins présents à l'esprit des enseignants que les liens entre logique et raisonnement. Cette référence prend en compte des aspects théoriques et pragmatiques des notions de logique à partir de l'étude du langage des mathématiciens et des éléments didactiques issus de travaux existants. Une étude plus fine du savoir à enseigner, où les choix actuels sont situés dans une perspective historique, donne à voir la complexité des conditions et contraintes portant sur l'enseignement de ces notions. Malgré cela, la formation des enseignants sur ces questions est pratiquement inexistante. L'analyse d'une formation continue de trois jours sur la logique, dans laquelle les notions de logique sont abordées à partir d'une étude naïve du langage mathématique, montre la pertinence de cette approche : beaucoup de stagiaires semblent prendre conscience des ambiguïtés et des implicites de nos pratiques langagières, et déclarent modifier leurs pratiques en conséquence.

Logic : from a tool for language and reasoning in mathematics towards a teaching object

The thesis focuses on the teaching of concepts of logic in high school. The current official instructions state that the aim is not to give a course of mathematical logic, but to develop its use as a tool for the formulation of considered logic. To take this constraint into account in the study of the process of didactic transposition, I introduce, between the *scholar knowledge* and the *knowledge to teach*, a *knowledge of reference* for logic, which has never been established by the mathematics teaching community. To provide such a reference, I lead an epistemological and didactic study, in which I highlight the relationship between logic and language, often less present in the minds of teachers than the links between logic and reasoning. This reference takes into account theoretical and pragmatic aspects of the concepts of logic towards the study of language utilised by mathematicians and didactical elements in existing works. A more detailed study of the knowledge to teach, in which the current choices are situated in a historical perspective, reveals the complexity of the requirements and constraints on the teaching of these concepts. Nevertheless, teacher training on these issues is virtually nonexistent. The analysis of a three-day training on logic for active teachers, in which the concepts of logic are addressed from a naive study of mathematical language, shows the relevance of this approach : many trainees seem to become aware of the ambiguities implicit in our linguistic practices, and express their intention consequently to change their methods.